

RECOUVREMENTS PAR DES INTERVALLES DE LONGUEURS ALÉATOIRES

AI HUA FAN

RÉSUMÉ. On résout le problème généralisé de recouvrement de Dvoretzky, le problème de recouvrement par des intervalles aléatoires. Le résultat obtenu étend celui de Kahane dans le cas de longueurs constantes.

ABSTRACT. We solve the generalized Dvoretzky covering problem — when we can cover the circle by intervals of random lengths. The obtained result extends that of Kahane in the case of constant lengths.

Introduction. On tente de résoudre le problème de recouvrement par des intervalles de longueurs aléatoires sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On se donne deux suites de variables $\{\omega_n\}$ et $\{L_n\}$ dont ω_n se distribue uniformément sur $\mathbb{T}$ et L_n est positive et $\mathbb{E}L_n < 1$. Puis on considère la suite des intervalles $\{I_n\}$ définis par

$$I_n = [\omega_n, \omega_n + L_n[.$$

Supposons que toutes les variables en question soient indépendantes. Le problème de recouvrement se pose ainsi : étant donné un fermé $F \subset \mathbb{T}$, quand a-t-on $F \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n$ p.s. ou autrement dit $F \subset G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ p.s. ? Dans le cas affirmatif on dit que F est recouvert.

Si $L_n = \ell_n$ constante, le problème a été posé par Dvoretzky [2] et étudié postérieurement de diverses manières [4, 10]. En 1972, L. Shepp [12] a répondu à la question posée pour $F = \mathbb{T}$: si $\{\ell_n\}$ est décroissante, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{T}$ soit recouvert est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \cdots + \ell_n) = \infty.$$

Une autre condition suffisante avait été obtenue antérieurement par P. Billard [1]. C'est

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \exp(\ell_1 + \cdots + \ell_n) = \infty.$$

Reçu le 15 juillet 1994 et, sous forme définitive, le 27 octobre 1994.

Mais ce n'est que récemment que J.-P. Kahane a donné la solution finale en annonçant dans [6] que F est recouvert si et seulement si

$$\text{Cap}_k F = 0$$

où $\text{Cap}_k F$ désigne la capacité de F par rapport au noyau

$$k(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n - |t|)_+.$$

Notre but est d'étendre ce résultat au cas où les L_n sont aléatoires. Bien entendu, la condition de Kahane peut offrir une condition nécessaire et suffisante :

$$\text{Cap}_{k_\omega} F = 0 \text{ p.s.}$$

où

$$k_\omega(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (L_n - |t|)_+.$$

Néanmoins cette condition est trop implicite. C'est pourquoi on se propose d'essayer de trouver des conditions plus explicites. On peut le faire et en revanche seulement partiellement. Supposons qu'on puisse écrire $L_n = \ell_n Y_n$ où Y_n obéit à la loi d'une variable Y donnée au préalable. Faisons encore l'hypothèse, par exemple,

$$\mathbb{E}Y(\log^+ Y)^{3+\varepsilon} < \infty \text{ (pour un certain } \varepsilon > 0 \text{)}.$$

On démontre au § 3 qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un fermé F soit recouvert est

$$\text{Cap}_K F = 0$$

où

$$K(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\ell_n Y - |t|)_+.$$

Si l'hypothèse se renforce par le fait que Y est bornée, le noyau K dans l'énoncé précédent peut être remplacé par (§ 4)

$$K^*(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n \mathbb{E}Y - |t|)_+.$$

Cela veut dire qu'à ce moment le résultat ne dépend que de la moyenne de Y , mais pas de sa distribution.

Le problème est ainsi résolu, du moins partiellement. C'est parce qu'il peut se ramener à un problème pareil qui est associé à un processus de Poisson. Ce dernier fait l'objet du § 2.

Au § 1 on essaye de trouver des conditions suffisantes pour que le cercle tout entier soit recouvert dans le cas plus général.

Du point de vue de multiplication aléatoire [5], des opérateurs projectifs sont liés aux problèmes de recouvrement. On détermine au § 5 les noyaux et les images de ces opérateurs.

1. Conditions suffisantes pour le recouvrement de $\mathbb{T}$. Au paragraphe présent on va trouver des conditions suffisantes pour que $\mathbb{T}$ soit recouvert. Le point de départ est la condition de L. Shepp. Le but est alors de trouver des conditions telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(L_1^* + \cdots + L_n^*) = \infty \text{ p.s.} \quad (1.1)$$

où $\{L_n^*\}$ est le réarrangement décroissant de $\{L_n\}$. On utilisera aussi, à l'occasion, la condition de Billard.

Théorème 1. *Supposons que $\mathbb{E}L_n^2$ existe ($n \geq 1$) et que la suite $\mathbb{E}L_n$ est décroissante. Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(L_n - \mathbb{E}L_n)^2 < \infty \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\mathbb{E}L_1 + \cdots + \mathbb{E}L_n) = \infty. \\ \text{b)} \quad & D_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(L_k - \mathbb{E}L_k)^2 \uparrow \infty \\ & \mathbb{E}L_n^2 = O((\mathbb{E}L_n)^2) \\ & |L_n - \mathbb{E}L_n| = o\left(D_n / \sqrt{\log \log D_n^2}\right) \text{ p.s.} \\ & \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}L_k / \sqrt{2D_n^2 \log \log D_n^2} > 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Écrivons

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}L_k + \sum_{k=1}^n (L_k - \mathbb{E}L_k).$$

On s'aperçoit que la condition (a) entraîne (1.1). Supposons maintenant b) vraie. Soit β la limite inférieure. Fixons deux positifs a et b tels que $1 < a < b < \beta$. Puisque le théorème du logarithme itéré est valable, on a

$$\sum_{k=1}^n (L_k - \mathbb{E}L_k) \geq -a \sqrt{2D_n^2 \log \log D_n^2} \quad (n \geq n(\omega)).$$

D'après la définition de β , on a

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}L_k \geq b \sqrt{2D_n^2 \log \log D_n^2} \quad (n \geq N).$$

D'ailleurs, $\sum (\mathbb{E}L_n)^2 = \infty$ résulte immédiatement de b) et on sait que $\mathbb{E}L_n$ est une suite décroissante. En conséquence, pour tout $\lambda > 0$ on a facilement (voir aussi [12])

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \exp \left(\lambda \sum_{k=1}^n \mathbb{E}L_k \right) = \infty.$$

Écrivons enfin

$$\frac{1}{n} \exp \sum_{k=1}^n L_k = \frac{1}{n} \exp \left(\left(1 - \frac{a}{b}\right) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}L_k \right) \cdot \exp \left(\frac{a}{b} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}L_k + \sum_{k=1}^n (L_k - \mathbb{E}L_k) \right).$$

Des quatre expressions précédentes résulte la condition de Billard

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \exp \sum_{k=1}^n L_k = \infty \text{ p.s.} \quad \square$$

Corollaire 1. *Supposons que les L_n soient uniformément bornées et que $\mathbb{E}L_n^2 = O((\mathbb{E}L_n)^2)$. Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\mathbb{E}L_1 + \dots + \mathbb{E}L_n) = \infty.$$

Pour cela, il suffit de vérifier b) quand D_n tend vers l'infini. Le seul point non évident est que la limite inférieure est plus grande que 1. En réalité, elle est infinie car on a

$$\mathbb{E}(L_k - \mathbb{E}L_k)^2 = O(\mathbb{E}L_k).$$

Corollaire 2. *Soit $L_n = \ell_n Y_n$ où Y_n obéit à la loi d'une variable bornée Y . Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \mathbb{E}Y(\ell_1 + \dots + \ell_n) = \infty.$$

Corollaire 3. *Soit $L_n = \ell_n Y_n$ où Y_n obéit à la loi d'une variable Y telle que $P(Y = 0) < 1$. Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n^p = \infty \text{ (pour un certain } p > 1 \text{)}.$$

Le corollaire 2 est une conséquence directe du corollaire 1. Et le corollaire 3 est une conséquence du corollaire 2 si l'on considère $Y' = Y \wedge 1$ au lieu de Y .

Relâchons maintenant la restriction que le moment $\mathbb{E}L_n^2$ existe.

Théorème 2. *Soit $L_n = \ell_n Y_n$. Soit Y un représentant des Y_n , dont la distribution est $F(y)$. Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

a) $\mathbb{E}Y = \infty, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} (\ell_1 + \dots + \ell_n) \neq 0.$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - F\left(\frac{\alpha}{\ell_n}\right)\right) = \infty \quad (\text{pour un certain } \alpha > 0).$$

Démonstration. La condition a) entraîne qu'il existe un positif N tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \mathbb{E}(Y \wedge N)(\ell_1 + \dots + \ell_n) = \infty.$$

Donc le corollaire 2 assure le recouvrement.

Supposons b) vraie, c'est-à-dire $\sum P(|I_n| > \alpha) = \infty$. Soit $N = \left[\frac{2}{\alpha}\right] + 1$. Subdivisons $\mathbb{T}$ en N intervalles égaux $T_1, \dots, T_N$. Alors (Borel-Cantelli)

$$P\left(\bigcup_{j=1}^N \left(T_j \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n\right)\right) = 1.$$

Donc

$$1 \leq \sum_{j=1}^N P\left(T_j \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n\right).$$

Or, les probabilités sont égales. On en déduit que $P\left(T_1 \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n\right) > 0$ puis $P\left(\mathbb{T} \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n\right) = 1$. $\square$

2. Recouvrement poissonnien. On se pose ici un problème de recouvrement poissonnien sur la droite $\mathbb{R}$, auquel sera ramené le problème de recouvrement sur le cercle.

Soient dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, μ une mesure de Radon définie sur $\mathbb{R}^+$ et Y une variable aléatoire positive dont la distribution est $F(y)$. Considérons la mesure produit $\nu = dx dF d\mu$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, puis le processus ponctuel de Poisson $\Xi = (X_n, Y_n, H_n)$ d'intensité ν et enfin la famille des intervalles

$$J_n = X_n +]0, L_n[\quad \text{avec } L_n = H_n Y_n.$$

Voici le problème de recouvrement poissonnien : étant donné un fermé $F \subset \mathbb{R}$, quand a-t-on $F \subset G = \cup J_n$ p.s. ? Posons

$$K(t) = \exp \int_0^\infty \mathbb{E}(hY - |t|)_+ d\mu(h).$$

On annonce la réponse.

Théorème 3. Soit F un compact sur $\mathbb{R}$.

$$F \subset G \text{ p.s.} \iff \text{Cap}_k F = 0.$$

Dans le cas $Y \equiv 1$, c'est le théorème de Kahane donné dans l'introduction.

Décrivons avant tout le fait qu'un point soit recouvert. À tout point $t \in \mathbb{R}$ associons le domaine dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ défini par

$$D_t = \bigcup_{0 < h < \infty} \Delta_t^h \quad \text{avec } \Delta_t^h = \{(x, y, h) : t - hy < x < t\}.$$

On a alors la description suivante

$$t \in G \iff \Xi \cap D_t \neq \emptyset.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons pour l'instant la mesure «tranchée» $\mu_\varepsilon = \mu 1_{] \varepsilon, \infty[}$ de μ , et puis le processus associé à $\nu_\varepsilon = dx dF d\mu_\varepsilon$. ε variant, la martingale indexée ci-dessous est bien définie

$$Q_\varepsilon(t) = \frac{1(t \notin G_\varepsilon)}{P(t \notin G_\varepsilon)} \quad (t \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)$$

où $G_\varepsilon = \bigcup J_n \ (H_n > \varepsilon)$. Observons que

$$P(t \notin G_\varepsilon) = P(N(D_t) = 0) = \exp(-\nu_\varepsilon(D_t)).$$

$N(D_t)$ étant le nombre des points du processus qui se trouvent dans D_t , et que

$$\nu_\varepsilon(D_t) = \int_\varepsilon^\infty d\mu(h) \int \int_{D_t} dx dF(y) = \mathbb{E} Y \int_\varepsilon^\infty h d\mu(h).$$

La martingale s'écrit donc

$$Q_\varepsilon(t) = 1(t \notin G_\varepsilon) \exp \mathbb{E} \int_\varepsilon^\infty Y h d\mu(h). \quad (2.1)$$

Démonstration de la nécessité. ($F \subset G \implies \text{Cap}_k F = 0$) : D'abord du calcul. D'après (2.1), pour tout t_1 et t_2 appartenant à $\mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E} Q_\varepsilon(t_1) Q_\varepsilon(t_2) = P(t_1, t_2 \notin G_\varepsilon) \exp \mathbb{E} \int_\varepsilon^\infty 2Y h d\mu(h).$$

Or, supposons que $t_2 \geq t_1$, on a

$$\begin{aligned} P(t_1, t_2 \notin G_\varepsilon) &= P(N(D_{t_1} \cup D_{t_2}) = 0) = P(N(D_{t_2} \setminus D_{t_1}) = 0) P(N(D_{t_1}) = 0) \\ \nu_\varepsilon(D_{t_2} \setminus D_{t_1}) &= \int_\varepsilon^\infty d\mu(h) \left(\int_0^{(t_2-t_1)/h} dF(y) \int_{t_2-hy}^{t_2} dx + \int_{(t_2-t_1)/h}^\infty dF(y) \int_{t_1}^{t_2} dx \right) \\ &= \int_\varepsilon^\infty \mathbb{E}(hY(t_2 - t_1)) d\mu(h). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E} Q_\varepsilon(t_1) Q_\varepsilon(t_2) = \exp \int_\varepsilon^\infty \mathbb{E}(hY - |t_2 - t_1|)_+ d\mu(h). \quad (2.2)$$

Ensuite le raisonnement. Si $F \subset G$ p.s., la martingale $Q_\varepsilon(t)$ indexée par F est fortement dégénérée au sens de

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in F} Q_\varepsilon(t) = 0 \text{ p.s.}$$

On a en conséquence que $Q\sigma = 0$ p.s. quelle que soit $\sigma \in M^+(F)$, où Q est l'opérateur associé à la martingale Q_ε [5]. Supposons que $\text{Cap}_k F > 0$, il existe une mesure $\sigma \in M^+(F)$ telle que

$$I_k^\sigma = \int \int K(t_2 - t_1) d\sigma(t_1) d\sigma(t_2) < \infty.$$

Néanmoins, d'après (2.2) on a

$$\mathbb{E} \left(\int Q_\varepsilon d\sigma \right)^2 \leq I_k^\sigma.$$

Cela implique que la martingale $\int Q_\varepsilon d\sigma$ converge dans L^2 et que sa limite $Q\sigma \neq 0$ avec une probabilité positive. Donc $\text{Cap}_k F = 0$.

Envisageons maintenant la suffisance. Voici quelques remarques dont on aura besoin. Soient $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t < x$. Comme dans [11], on peut montrer

$$P(x \notin G_\varepsilon \mid t \notin G_\varepsilon; t_1, \dots, t_n \in G_\varepsilon) = P(x \notin G_\varepsilon \mid t \notin G_\varepsilon) \quad (2.3)$$

grâce au fait que $(D_x \setminus D_t) \cap D_{t_i} = \emptyset$ ($1 \leq i \leq n$). Et on a déjà démontré que pour tout réel r et tout positif y on a

$$P(r + y \notin G_\varepsilon \mid r \notin G_\varepsilon) = \exp - \int_\varepsilon^\infty y \mathbb{E} h Y d\mu(h). \quad (2.4)$$

D'ailleurs, pour tout compact F définissons

$$Q^F = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k^F \quad \text{avec} \quad Q_k^F = \left\{ \frac{j}{2^k} : d\left(\frac{j}{2^k}, F\right) < \frac{1}{2^k} \right\}.$$

Alors F est exactement l'ensemble des points d'accumulation de Q^F . Par ailleurs posons $Q_k = \bigcup_{\ell=1}^k Q_\ell^F$.

Démonstration de la suffisance. ($\text{Cap}_k F = 0 \implies F \subset G$ p.s.). Posons

$$K_\varepsilon(t) = \exp \int_\varepsilon^\infty \mathbb{E}(hY - |t|)_+ d\mu(h).$$

Selon la théorie du potentiel [8], il existe une mesure d'équilibre σ_ε de $\tilde{F} = F \cup Q^F$, telle que

$$A_\varepsilon = \text{Cap}_{K_\varepsilon}^{-1} \tilde{F} = \int K_\varepsilon(t) d\sigma_\varepsilon(t + u), \quad \forall u \in \tilde{F}. \quad (2.5)$$

Désignons par $\sigma_\varepsilon(0, 2)$ la σ_ε -mesure de la partie non recouverte par G_ε de l'intervalle $[0, 2]$. On va calculer $\mathbb{E}\sigma_\varepsilon(0, 2)$ de deux manières.

Le premier pas est simple :

$$\mathbb{E}\sigma_\varepsilon(0, 2) = 2 \exp - \int_\varepsilon^\infty \mathbb{E}hY d\mu(h). \quad (2.6)$$

Définissons maintenant pour tout entier $k \geq 1$ une variable $\xi_k : \xi_k = \infty$ si tout $r \in Q_k$ est recouvert; $\xi_k = r$ s'il existe un point dans Q_k non recouvert et que r est le plus petit. En utilisant la formule de probabilité totale on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sigma_\varepsilon(0, 2) &= \int_0^2 \sum_{r \in Q_k \cup \{\infty\}} P(x \notin G_\varepsilon \mid \xi_k = r) P(\xi_k = r) d\sigma_\varepsilon(x) \\ &\geq \sum_{r \in Q_k} P(\xi_k = r) \int_r^{r+1} P(x \notin G_\varepsilon \mid \xi_k = r) d\sigma_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

D'après (2.3) et (2.4), on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sigma_\varepsilon(0, 2) &\geq \sum_{r \in Q_k} P(\xi_k = r) \int_r^{r+1} P(x \notin G_\varepsilon \mid r \notin G_\varepsilon) d\sigma_\varepsilon(x) \\ &= \sum_{r \in Q_k} P(\xi_k = r) \int_0^1 \exp - \int_\varepsilon^\infty y \mathbb{E}hY d\mu(h) d\sigma_\varepsilon(y + r). \end{aligned}$$

Combinant cela avec (2.6) et tenant compte de (2.5), on obtient

$$\sum_{r \in Q_k} P(\xi_k = r) \leq \frac{2}{A_\varepsilon}.$$

On en déduit

$$P(\tilde{F} \not\subset G_\varepsilon) \leq \frac{2}{A_\varepsilon}.$$

Comme A_ε tend vers l'infini quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a la conclusion. $\square$

Faisons une remarque avant de terminer ce paragraphe. Soit $\{\ell_n\}$ une suite décroissante de positifs. Considérons

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\ell_n}.$$

On a vu que $\text{Cap}_k F = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que F soit recouvert par $\cup J_n$. Posons

$$O_n = \bigcup_{H_k \leq \ell_n} J_k.$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} \text{Cap}_k F = 0 &\iff P(F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n) = 1 \\ \text{Cap}_k F > 0 &\iff P(F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n) = 0. \end{aligned}$$

3. Recouvrement sur le cercle. Du résultat obtenu au paragraphe précédent on déduit à présent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un compact sur le cercle soit recouvert par des intervalles jetés au hasard. Référons-nous à l'introduction pour mieux comprendre le problème. Nous nous bornons ici au cas où $L_n = L_n Y_n$ dont Y_n obéit à la même loi que Y donnée. La distribution de ce dernier est notée par $F(y)$. Posons

$$K(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\ell_n Y - |t|)_+.$$

Théorème 4. *Supposons que $\{\ell_n\}$ et $F(x)$ satisfassent*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \int_{\varepsilon/\ell_n}^{\infty} [1 - F(x)] dx < \infty \quad (\forall \varepsilon > 0). \quad (3.1)$$

Alors $F \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n$ p.s. si et seulement si $\text{Cap}_k F = 0$.

Remarque 1. La condition (3.1) implique $\mathbb{E}Y < \infty$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - F\left(\frac{\alpha}{\ell_n}\right)\right) < \infty \quad (\forall \alpha > 0). \quad (3.2)$$

Par ailleurs grâce au corollaire 3 du paragraphe 1, on peut supposer encore que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n^p < \infty \quad (\forall p > 1). \quad (3.3)$$

Des préparatifs sont nécessaires afin de démontrer le théorème. D'abord le développement de Taylor assure que

$$e^{1-x/2} < (1+x)^{1/x} < e^{1-x/6} \quad (0 < x < 1) \quad (3.4)$$

$$e^{-1-x} < (1-x)^{1/x} < e^{-1-x/2} \quad (0 < x < 1/2). \quad (3.5)$$

Désignons par $\mathcal{P}_c$ une variable de Poisson à paramètre c (on a $\mathbb{E}\mathcal{P}_c = c$). On a le lemme suivant qui se démontre aisément.

Lemme. *Pour tout $m \geq 0$ et $1/2 < \lambda < 1$, on a*

$$P\left(\mathcal{P}_{m+[m^\lambda]} < m\right) \leq A m \exp\left(-\frac{1}{6}m^{2\lambda-1}\right) \quad (3.6)$$

$$P\left(\mathcal{P}_{m-[m^\lambda]} > m\right) \leq B m \exp\left(-\frac{1}{2}m^{2\lambda-1}\right). \quad (3.7)$$

A et B étant deux constantes absolues.

Soit maintenant $\{A_{n,m}\}$ une suite double d'événements. Définissons

$$\begin{aligned} \limsup_{n,m \rightarrow \infty} A_{n,m} &= \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \bigcup_{m=M}^{\infty} A_{n,m} \\ \liminf_{n,m \rightarrow \infty} A_{n,m} &= \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \bigcap_{m=M}^{\infty} A_{n,m}. \end{aligned}$$

Voici le lemme de Borel-Cantelli double : supposons $A_{n,m}$ indépendantes; alors

$$P\left(\limsup_{n,m \rightarrow \infty} A_{n,m}\right) = 0 \text{ (ou } 1) \iff \sum_{n,m=1}^{\infty} P(A_{n,m}) < \infty \text{ (ou } = \infty).$$

Démonstration de la suffisance. ($\text{Cap}_k F = 0 \implies F \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n$ p.s.) : À partir de $\{\ell_n\}$ on définit d'abord $\lambda_m = \ell_{\frac{m(m+1)}{2}}$ pour $m \geq 1$, puis une suite $\{\ell'_n\}$ telle que

$$\ell'_{\frac{m(m-1)}{2}+1} = \dots = \ell'_{\frac{m(m+1)}{2}} = \lambda_m.$$

La nouvelle suite $\{\ell'_n\}$ prend la valeur λ_m à m reprises. Effectivement $\ell'_n \leq \ell_n$. Pourtant la différence est négligeable au sens que $\sum (\ell_n - \ell'_n) < \infty$ grâce à (3.3). Si K' désigne le noyau correspondant à $\{\ell'_n\}$, on a alors

$$K' \approx K.$$

Ensuite on prend $[m^{2/3}]$ termes parmi les m termes égaux à λ_m . On obtient ainsi une autre suite $\{\ell''_n\}$ dont le noyau est désigné par K'' . On voit que ce qui est ôté n'est pas trop de sorte que

$$K'' \approx K'$$

car $\sum m^{2/3} \lambda_m < \infty$ grâce encore à (3.3).

La deuxième étape est de considérer la mesure

$$\mu = \sum \delta_{\ell''_n}$$

et le processus de Poisson associé construit au § 2. Comme on a une équivalence entre K et K'' , $\text{Cap}_{K''} F = 0$. Donc, d'après le théorème au § 2, F est recouvert par les intervalles J_n liés au processus. On va montrer que cela implique le recouvrement de F par les $I'_n = \omega_n +]0, \ell'_n Y_n[$, *a fortiori* par les $I_n = \omega_n +]0, \ell_n Y_n[$.

Supposons $F \subset]0, 1[$. On démontre d'abord la proposition suivante : si $F \subset \cup J_n$ p.s., $F \subset \cup J_n$ où J_n est soumis à la restriction $0 < X_n < 1$. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^p &= \{J_n : p \leq X_n < p+1\} \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ \mathcal{J}_m^p &= \{J_n \in \mathcal{J}^p : H_n = \lambda_m\} \quad (p \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{m-[m^{3/2}]}^p = \text{Card } \mathcal{J}_m^p.$$

Les points (X_n, Y_n) tels que $J_n \in \mathcal{J}_m^p$ peuvent être considérés, dès que $\mathcal{P}_{m-[m^{3/2}]}^p$ est fixé, comme $\mathcal{P}_{m-[m^{3/2}]}^p$ vecteurs indépendants et équidistribués sur $]p, p+1[\times \mathbb{R}^+$ selon la probabilité $dx dF$. Dans le fond, c'est la définition du processus de Poisson [9]. Soit 2ε la distance de F à l'ensemble $\{0, 1\}$. Posons

$$A_{p,m} = \{\omega : \text{il existe } J_n \in \mathcal{J}_m^p \text{ tel que } \lambda_m Y_n \geq p-1+\varepsilon\}.$$

Admettons que

$$\sum_{p,m=1}^{\infty} P(A_{p,m}) < \infty. \quad (3.8)$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli double, p.s. il n'y a qu'un nombre fini de J_n avec $X_n \leq 0$ qui peuvent toucher l'intervalle $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Par ailleurs, J_n avec $X_n \geq 1$ ne touche jamais cet intervalle. Néanmoins, d'après la remarque faite à la fin du § 2, F est recouvert par une infinité de J_n . Donc p.s. $F \subset \cup J_n$ avec $0 < X_n < 1$ et même à une infinité de reprises.

De la proposition on déduit maintenant que $F \subset \cup I'_n$ p.s. En effet, (3.7) avec $\lambda = \frac{2}{3}$ nous donne

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(\mathcal{P}_{m-[m^{2/3}]}^0 > m) < \infty.$$

Et (3.2) nous donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\ell'_n Y_n > \varepsilon) < \infty.$$

Donc p.s. on a $\mathcal{P}_{m-[m^{2/3}]}^0 \leq m$ et $\ell'_n Y_n \leq \varepsilon$ pour m et n grands. Enfin $F \subset \cup I'_n$ p.s.

Il nous reste (3.8) à vérifier. Posons $b = m - [m^{2/3}]$.

$$\begin{aligned} P(A_{p,m}) &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} P(A_{p,m}^c \mid \mathcal{P}_b^p = k) P(\mathcal{P}_b^p = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(P\left(Y < \frac{p-1+\varepsilon}{\lambda_m}\right) \right)^k P(\mathcal{P}_b^p = k) \\ &= 1 - \exp\left(-b P\left(Y \geq \frac{p-1+\varepsilon}{\lambda_m}\right)\right) \\ &\leq b P\left(Y \geq \frac{p-1+\varepsilon}{\lambda_m}\right) \end{aligned}$$

d'où on voit que (3.1) assure (3.8). $\square$

Démonstration de la nécessité. $\text{Cap}_k F = 0 \implies F \not\subset \overline{\lim} I_n$ p.s. : Posons

$$\ell'_{\frac{m(m-1)}{2}+1} = \dots = \ell'_{\frac{m(m+1)}{2}} = \lambda_m = \ell_{\frac{m(m-1)}{2}} \quad (m \geq 1).$$

À la suite $\{\ell'_n\}$ on ajoute $[m^{2/3}]$ termes de valeurs λ_m et on obtient donc une autre suite $\{\ell''_n\}$. Effectivement $\ell''_n \geq \ell'_n \geq \ell_n$ et $K'' \approx K' \approx K$.

Considérons maintenant la mesure

$$\mu = \sum \delta_{\ell''_n}$$

et le processus de Poisson associé. On définit de même $\mathcal{J}_m^0$ et $\mathcal{P}_{m+[m^{2/3}]}^0 = \text{Card}(\mathcal{J}_m^0)$. L'inégalité (3.6) nous affirme que

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left(\mathcal{P}_{m+[m^{2/3}]}^0 < m\right) < \infty.$$

Par conséquent, p.s. finalement $\mathcal{P}_{m+[m^2/3]}^0 \geq m$. Donc $P(F \subset \overline{\lim} I_n) \leq P(F \subset \cup J_n) < 1$. $\square$

Remarque 2. On peut toujours supposer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_n}{\log^{2+\varepsilon} \frac{\alpha}{\ell_n}} < \infty \text{ (pour un certain } \varepsilon > 0, \text{ et tout } \alpha > 0)$$

car sinon $\mathbb{T}$ sera recouvert. Sous cette hypothèse, (3.1) peut être remplacé par

$$\mathbb{E}Y(\log^+ Y)^{3+\varepsilon} < \infty. \quad (3.9)$$

Remarque 3. En ce qui concerne le recouvrement poissonnien, ce n'est pas la peine de supposer $\mathbb{E}Y < \infty$. C'est certainement le recouvrement qui a lieu si $\mathbb{E}Y = \infty$. Tandis que pour le recouvrement sur le cercle, une certaine hypothèse comme (3.1) ou (3.9) est nécessaire. Voici un contre-exemple où Y est assez dispersée :

$$P(Y = 2^k) = \frac{1}{2^k} \quad (k \geq 1)$$

$$\ell_n = \frac{1}{2^n n^2} \quad (n \geq 1).$$

On a $\mathbb{E}Y = \infty$ et c'est le non recouvrement qui a lieu.

Remarque 4. Sans hypothèse sur les L_n , la condition $\int K(t)dt = \infty$ n'entraîne pas le recouvrement de $\mathbb{T}$ où

$$K(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(L_n - |t|)_+.$$

On peut obtenir un contre-exemple en modifiant celui qui précède dans la remarque 3. Il suffit de prendre $L_n = \ell_n Y_n$ avec $Y_n = Y 1_{\{Y \leq \gamma(n)\}}$ où $\gamma(n)$ est choisi de sorte que $\gamma(n) \geq \ell_n^{-1} \exp \ell_n^{-1}$. Intuitivement, cet exemple ne se différencie guère de son prototype.

4. Le cas où Y est bornée. Supposons $0 \leq Y \leq C$ p.s. (C une constante). La condition supplémentaire (3.1) est alors satisfaite. Posons

$$K_{\mu}^*(t) = \exp \int_0^{\infty} (h\mathbb{E}Y - |t|)_+ d\mu(h)$$

$$K_{\ell}^*(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n \mathbb{E}Y - |t|)_+.$$

On a

Théorème 5. Soit F un compact dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{T}$).

$$a) \quad F \subset \cup J_n \text{ p.s.} \iff \text{Cap}_{K_{\mu}^*} F = 0$$

$$b) \quad F \subset \cup I_n \text{ p.s.} \iff \text{Cap}_{K_{\ell}^*} F = 0.$$

La démonstration du théorème repose entièrement sur le lemme suivant dont la preuve dépend du second lemme.

Lemme 1. Supposons $0 \leq Y \leq C$ p.s. Il existe un positif $\alpha (= EY)$ tel que

$$(\lambda EY - t)^+ \leq E(\lambda Y - t)^+ \leq (\lambda EY - \alpha t)^+ \quad (0 \leq t < \infty)$$

pour tout $\lambda > 0$.

Lemme 2. Supposons $0 \leq Y \leq 1$ p.s. Soit λ un positif. Posons $Y_\lambda = \lambda Y$. On a

$$EY_\lambda 1_{(Y_\lambda < t)} \geq t P(Y_\lambda < t) + t(EY - 1) \quad (0 < t \leq \lambda).$$

Preuve. Quel que soit $a > 1$, on a

$$\begin{aligned} EY_\lambda 1_{(Y_\lambda < t)} &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t}{a^{n+1}} P\left(\frac{t}{a^{n+1}} \leq Y_\lambda < \frac{t}{a^n}\right) \\ &= t \left\{ \frac{1}{a} P(Y_\lambda < t) + \left(\frac{1}{a} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} P(Y_\lambda < \frac{t}{a^n}) \right\}. \end{aligned}$$

Or, si $F_\lambda(x)$ est la distribution de Y_λ , observant que $a^{-x} F_\lambda(ta^{-x})$ est une fonction décroissante de x ($-\infty < x < +\infty$), on a

$$\sigma(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} P(Y_\lambda < \frac{t}{a^n}) \leq \int_{-1}^{\infty} a^{-x} F_\lambda(ta^{-x}) dx.$$

Posons $y = a^{-x}$, on obtient

$$\sigma(a) \leq \frac{1}{\log a} \cdot \frac{\lambda}{t} \int_0^{a \cdot t/\lambda} F(y) dy$$

où $F(y)$ est la distribution de Y . Ainsi

$$EY_\lambda 1_{(Y_\lambda < t)} \geq t \left\{ P(Y_\lambda < t) - \frac{a-1}{a \log a} \cdot \frac{\lambda}{t} \int_0^{a \cdot t/\lambda} F(y) dy \right\}.$$

Faisons $a \downarrow 1$, on a

$$EY_\lambda 1_{(Y_\lambda < t)} \geq t \left\{ P(Y_\lambda < t) - \frac{\lambda}{t} \int_0^{t/\lambda} F(y) dy \right\}.$$

Comme $t < \lambda$, on a

$$-\frac{\lambda}{t} \int_0^{t/\lambda} F(y) dy = \frac{\lambda}{t} \int_0^{t/\lambda} (1 - F(y)) dy - 1 \geq \int_0^1 (1 - F(y)) dy - 1 = EY - 1.$$

Pour l'obtention de la dernière inégalité, on a utilisé la décroissance de la fonction $x^{-1} \int_0^x (1 - F(y)) dy$ et le fait que $\frac{t}{\lambda} \leq 1$. $\square$

Preuve du lemme 1. On peut supposer $0 \leq Y \leq 1$ sans perdre la généralité. La première inégalité résulte de l'inégalité de Jensen. Supposons encore $EY > 0$. En posant $Y_\lambda = \lambda Y$, on a

$$\mathbb{E}(Y_\lambda - t)^+ = \mathbb{E}Y_\lambda - \mathbb{E}Y_\lambda \mathbf{1}_{(Y_\lambda < t)} - tP(Y_\lambda \geq t).$$

Soit $\alpha = EY$. Si $(\mathbb{E}Y_\lambda - \alpha t)^+ = 0$, à savoir $\lambda \leq t$, on a $Y_\lambda \leq t$. Donc $\mathbb{E}(Y_\lambda - t)^+ = 0$. Alors il reste à démontrer le cas $\lambda > t$. À ce moment, le lemme 1 peut nous servir. $\square$

Remarque 1. La constante $\alpha = EY$ dans le lemme 1 ne peut pas être remplacée en général par une plus grande. Par exemple, prenons U la variable uniformément distribuée sur $[0, 1]$.

Remarque 2. Le lemme 1 est faux pour toute Y non bornée car $\mathbb{E}(\lambda Y - t)^+$ est toujours positive, tandis que $(\lambda EY - \alpha t)^+$ peut s'annuler pour certains $\lambda > 0$ et $t > 0$.

5. Opérateurs de projection liés aux recouvrements. Selon la théorie de la multiplication aléatoire [5], la martingale indexée $Q_\varepsilon(t)$ ($t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$) correspond à un opérateur de projection dans l'espace $M(\mathbb{R})$. Désignons le noyau associé par

$$K_\mu(t) = \exp \int_0^\infty \mathbb{E}(hY - |t|)^+ d\mu(h)$$

et l'opérateur par $\mathbb{E}Q_\mu$. Soient $\mathcal{S}_\mu$ l'ensemble des mesures K_μ -singulières et $\mathcal{R}_\mu$ l'ensemble des mesures K_μ -régulières. On a le théorème suivant

Théorème 6. $\text{Ker}(\mathbb{E}Q_\mu) = \mathcal{S}_\mu$ et $\text{Img}(\mathbb{E}Q_\mu) = \mathcal{R}_\mu$.

Ce théorème a une conséquence qui concerne la dimension portante de la mesure $Q_\mu \sigma$. Par la dimension portante d'une mesure σ , on entend la plus petite des dimensions des boréliens qui portent cette mesure [3]. On la désigne par $\dim^* \sigma$. Comme un exemple, on considère $0 \leq Y \leq 1$ et $\mu = \frac{\alpha}{y^2} \mathbf{1}_{[0,1]}(y) dy$, pour ce choix on a $K_\mu(t) = |t|^{-\alpha EY}$.

Théorème 7. Soient Y et μ ainsi choisies. Pour toute $\sigma \in M^+(\mathbb{R})$

$$\dim^* Q_\mu \sigma = (\dim^* \sigma - \alpha EY)_+.$$

Considérons de même une suite $\{\ell_n\} (\ell_n < \frac{1}{2})$ et une variable aléatoire Y ($0 \leq Y \leq 1$), et puis la martingale indexée définie par $Q_n(t) = \prod_{m=1}^n P_m(t)$ où

$$P_m(t) = \frac{1 - \mathbf{1}_{]0, \ell_n Y_n[}(t - \omega_n)}{1 - \ell_n EY}.$$

Le noyau correspondant est défini par

$$K_\ell(t) = \exp \sum_{n=1}^\infty (\ell_n EY - |t|).$$

Désignons par $\mathbb{E}Q_\ell$ l'opérateur correspondant on a

Théorème 8. $\text{Ker}(\mathbb{E}Q_\ell) = \mathcal{S}_\ell$ et $\text{Img}(\mathbb{E}Q_\ell) = \mathcal{R}_\ell$.

Théorème 9. Supposons $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$. Pour toute $\sigma \in M^+(\mathbb{T})$,

$$\dim^* Q_\ell = (\dim^* \sigma - \alpha \mathbb{E}Y)_+.$$

English extended abstract. We consider the following random covering problem on the circle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Given two sequences of random variables $\{\omega_n\}$ and $\{L_n\}$ ($n \geq 1$). Suppose that all these variables are independent, ω_n is uniformly distributed on $\mathbb{T}$ and L_n is positive with $\mathbb{E}L_n < 1$. We consider finally the random intervals $\{I_n\}$ defined by

$$I_n = \omega_n +]0, L_n[.$$

Here is the problem: given a compact $F \subset \mathbb{T}$, when do we have almost surely $F \subset \limsup_n I_n$? If it is the case, we say that F is covered.

If $L_n = \ell_n$ are constant, the problem was posed by Dvoretzky [2] and further studied by Kahane [4], Billard [1] and Mandelbrot [10]. A necessary and sufficient condition for the entire circle $\mathbb{T}$ to be covered was found by Shepp [12]. A complete answer was given by Kahane [6] who showed that a compact F is covered if and only if

$$\text{Cap}_k F = 0$$

where $\text{Cap}_k F$ means the capacity of F with respect to the kernel

$$k(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n - |t|)_+.$$

It seems there will be no problem for the case of random lengths L_n : Kahane's condition provides a solution if one replaces ℓ_n by L_n in the definition of the kernel $k(t)$. However, the condition obtained like this is too implicate. For this reason, we try to find some explicite conditions.

We can solve only partially the problem. Suppose $L_n = \ell_n Y_n$ where Y_n obeys the same law as a fixed variable Y . Suppose again $\mathbb{E}Y(\log^+ Y)^{1+\epsilon}$ for some $\epsilon > 0$. Then we prove that a compact F is covered if and only if

$$\text{Cap}_K F = 0$$

where

$$K(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\ell_n Y - |t|)_+.$$

Furthermore, if Y is bounded the kernel $K(t)$ can be replaced by the following simpler one

$$K^*(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n \mathbb{E}Y - |t|)_+.$$

In this case, the solution does not depend upon the distribution of Y but upon its first moment.

We follow the idea of Kahane [6] and Shepp [12] considering a point Poisson process not defined on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ as in [6] but on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$. We consider also the random product problem associated to the covering problem [5] and we determine the image and the kernel of the associated projection on the space of measures on $\mathbb{T}$.

RÉFÉRENCES

1. P. Billard, *Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **82** (1965), 131–179.
2. A. Dvoretzky, *On covering a circle by randomly placed arcs*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42** (1956), 199–203.
3. Ai Hua Fan,, *Sur les dimensions de mesures*, Studia Math. **111** (1994), 1–17.
4. J.-P. Kahane, *Sur le recouvrement d'un cercle par des arcs disposés au hasard*, C. R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), 184–186.
5. ———, *Positive martingales and random measures*, Chinese Ann. Math. Ser. B **8** (1987), 1–12.
6. ———, *Intervalles aléatoires et décomposition des mesures*, C. R. Acad. Sci. Paris **304** (1987), 551–554.
7. J.-P. Kahane et Y. Katznelson, *Décomposition des mesures selon la dimension*, Colloq. Math. **VLIII** (1990), 269–279.
8. J.-P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris, 1963.
9. O. Kallenberg, *Random measures*, Akademie-Verlag, Berlin, 1983.
10. B. B. Mandelbrot, *On Dvoretzky coverings for the circle*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **22** (1972), 158–160.
11. L. A. Shepp, *Covering the line with random intervals*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **23** (1972), 163–170.
12. ———, *Covering the circle with random arcs.*, Israel J. Math. **11** (1972), 328–345.

A. H. FAN

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

8, LE CAMPUS

95033 CERGY-PONTOISE CEDEX

FRANCE