

GROUPE D'ÉQUIVALENCES D'ARBRES ET MONÔMES DE JORDAN

GÉRARD DUCHAMP ET OMAR KHADIR

RÉSUMÉ. L'équivalence entre les arbres, par échange de sous-arbres attachés au même nœud apparaît dans de nombreux contextes. Cette équivalence est, en fait, due à l'action d'un groupe dont nous donnons ici une présentation par générateurs et relations et des applications au calcul des monômes de Jordan.

ABSTRACT. The flipping equivalence between binary trees is the orbital equivalence under the action of a group involved in many situations. We give here a presentation by generators and relations of this group and some applications to the computations of Jordan monomials.

0. Introduction. Une des opérations non associatives importantes est le q -crochet, défini dans un anneau par

$$[x, y]_q := xy - qyx.$$

Cette opération est visiblement une q -déformation du crochet de Lie classique. Les caractères de modules construits à l'aide de $[\ , \]_q$ sont calculés dans [CHS].

Soit $\mathbb{A}$, un alphabet et k , un corps. On considère la sous-algèbre de $k\langle \mathbb{A} \rangle$ engendrée à partir des lettres par le q -crochet. C'est une sous-algèbre stricte pour $q = \pm 1$.

Pour $q = 1$, on obtient l'algèbre de Lie libre bien étudiée en informatique théorique [Lo], en combinatoire [Re] et en algèbre [Bo2], [Ba], [Reu]. On en connaît les caractères, les rangs et des bases combinatoires.

Pour $q = -1$, on obtient l'algèbre de Jordan dite *spéciale libre* [Co] qui sera notée $J(\mathbb{A})$ (on l'appelle spéciale parce qu'elle est solution du problème universel usuel à condition que le crochet de Jordan provienne d'une structure d'anneau [Co]). Sa loi est commutative et elle vérifie l'identité

$$(J) \quad ((xx)(yx)) = \left(((xx)y)x \right).$$

On appelle d'ailleurs couramment *algèbre de Jordan* une algèbre commutative qui vérifie (J).

La considération de l'algèbre de Jordan spéciale libre conduit naturellement à étudier des transformations de formules du type

$$(\cdots (P_1, P_2) \cdots) \longrightarrow (\cdots (P_2, P_1) \cdots).$$

Reçu le 11 octobre 1994 et, sous forme définitive, le 17 mars 1995.

Ces transformations engendrent un groupe de symétries S de l'ensemble des arbres binaires. On les retrouve dans [PS] et [AHU] (arbres A. V. L. [AVL], «flipping equivalence»), dans [De] (pour la logique), ou encore dans [GM] (construction d'un groupe à croissance intermédiaire). Ces transformations sont définies comme suit.

À un arbre binaire $\mathcal{A}$, on associe l'arbre $\mathcal{B}$ obtenu en échangeant les sous-arbres de $\mathcal{A}$ issus du même nœud. Les monômes de Jordan associés à un arbre et à son transformé ont la même valeur.

Ainsi, en posant $\langle x, y \rangle = xy + yx$, le monôme de Jordan

$$\langle \langle \langle x_1, x_2 \rangle, x_3 \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle \rangle$$

est-il égal à

$$\langle \langle x_3, \langle x_1, x_2 \rangle \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle \rangle$$

mais aussi à

$$\langle \langle x_3, \langle x_2, x_1 \rangle \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle \rangle .$$

On peut accéder aux nœuds d'un arbre binaire par un mot sur les lettres g et d (sous-arbres gauche et droit). Par exemple, le passage du premier arbre au second est dû à l'action de s_g , celui du second au troisième à celle de s_{gd} .

L'article est divisé en trois sections. Dans la première, on étudie un groupe de symétries (S) qui agit fidèlement sur les codes préfixes maximaux finis et dont la définition est naturelle sur les langages. La seconde section est consacrée à montrer que les relations entre générateurs qui furent mises en évidence précédemment en sont une présentation. Pour le montrer, on exhibe une forme normale qui consiste à factoriser tout élément en paquets commutatifs ainsi qu'un algorithme pour la calculer. L'existence de cette forme normale a plusieurs conséquences. D'une part, que le groupe S étudié en première partie est naturellement isomorphe au groupe des équivalences d'arbres, d'autre part que ce groupe est en bijection naturelle avec l'ensemble des langages finis et, enfin, qu'il est la limite inductive des 2-sous-groupes de Sylow des groupes symétriques $\mathfrak{S}_{2^n}$. Dans une troisième section, on revient aux monômes de Jordan et il est montré que l'évaluation est une bijection entre les monômes de Jordan sans répétition et les orbites de l'ensemble des arbres à n feuilles sous l'action du groupe S .

Ces monômes ne sont pas linéairement indépendants. Le défaut de dimension est dû à des identités vérifiées par toutes les algèbres de Jordan spéciales.

1. Symétries sur les arbres et les langages binaires.

1.1. Le groupe S et son action sur les arbres. Soit x une lettre, on considère $M(x) = \sum_{n \geq 1} M_n$, le magma libre sur l'alphabet à une lettre $\{x\}$, qui est défini récursivement par

- $M_1 = \{x\}$,
- $M_n = \sum_{p+q=n} M_p \times M_q$.

Les éléments de $M(x)$ s'identifient aux mots bien parenthésés sur l'alphabet $\{x\}$. Par exemple, les formules qui définissent les monômes de l'introduction sont les éléments de M_5 respectivement égaux à

$$(((x, x), x), (x, x)), ((x, (x, x)), (x, x)) \text{ et } ((x, (x, x)), (x, x)) .$$

On notera que $M(x)$ s'identifie également à l'ensemble des arbres binaires, puisque tout élément de M_p , pour $p \geq 2$ s'écrit de façon unique $(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_d)$, on utilisera indifféremment les deux représentations. Chaque nœud d'un arbre binaire a une adresse dans $w \in \{g, d\}^*$ et on définit récursivement la transformation s_w (échange des deux sous-arbres issus du nœud d'adresse w) par les conditions suivantes :

- $s_w(x) = x$ pour tout w ;
- $s_1(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_d) = (\mathcal{A}_d, \mathcal{A}_g)$;
- $s_{gw}(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_d) = (s_w(\mathcal{A}_g), \mathcal{A}_d)$;
- $s_{dw}(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_d) = (\mathcal{A}_g, s_w(\mathcal{A}_d))$.

Chaque élément s_w est évidemment d'ordre 2 et les s_w engendrent un sous-groupe S du groupe symétrique $\mathfrak{S}_M$.

1.2. Le groupe T et son action sur les langages binaires. Soit $\mathbb{A} = \{a, b\}$, un alphabet a deux lettres. On appelle *code préfixe* [BP] une partie $C \subset \mathbb{A}^+$ telle que

$$u, uv \in C \implies v = 1.$$

Un code préfixe est dit *maximal* s'il l'est au sens de l'inclusion. L'ensemble des parties préfixes maximales finies, que nous noterons $Pmf(\mathbb{A})$, est formé des codes préfixes maximaux finis et du langage $\{1_{\mathbb{A}}\}$. L'opération

$$U \odot V = aU + bV$$

définit une loi dans $Pmf(\mathbb{A})$ telle que l'unique flèche $x \longrightarrow 1$ soit un isomorphisme $(M(x), (,)) \cong (Pmf(\mathbb{A}), \odot)$; ceci permet de transporter l'action de S aux codes par les formules :

- R1) $t_w(\{1\}) = \{1\}$;
- R2) $t_1(aU + bV) = bU + aV$;
- R3) $t_{gw}(aU + bV) = at_w(U) + bV$;
- R4) $t_{dw}(aU + bV) = aU + bt_w(V)$.

On notera T_c le groupe engendré par les t_w agissant dans $(Pmf(\mathbb{A}), \odot)$. Remarquons que les formules précédentes ont encore un sens lorsque les arguments sont des langages puisque tout langage $L \subseteq \mathbb{A}^*$ s'écrit de façon unique :

$$L = \epsilon + aU + bV$$

avec $\epsilon \in \{0, 1\}$. On prolonge alors l'action des t_w aux langages par les règles R1..R4 en imposant $s(\epsilon + aU + bV) = \epsilon + s(aU + bV)$. Dans la suite le contexte permettra toujours de décider si t_w est une action sur les codes ou les langages.

Exemple 1.1. Pour $X = 1 + aa + bb + aba = 1 + a(a + ba) + bb$ on a $t_1(X) = 1 + b(a + ba) + ab$, $t_a(X) = 1 + at_1(a + ba) + bb = 1 + a(b + aa) + bb$ et $t_b(X) = 1 + a(a + ba) + bt_1(b) = 1 + a(a + ba) + ba$.

Le groupe engendré par les actions des t_w sur les langages sera noté T .

On a deux morphismes naturels $\alpha : T \longrightarrow T_c$ (la restriction) et $\beta : T_c \longrightarrow S$ (le transport). Par construction α est surjectif et β bijectif. En fait, comme nous verrons dans la section suivante, α est aussi un isomorphisme.

1.3. Forme normale et présentation des groupes T , T_c et S . Ici $A = \{g, d\}$. Les s_w et les t_w vérifient les mêmes relations soit

$$\begin{array}{lll} \text{T1)} \ t_u^2 = 1 & \text{S1)} \ s_u^2 = 1 & \text{pour tout } u \\ \text{T2)} \ t_u \circ t_v = t_v \circ t_u & \text{S2)} \ s_u \circ s_v = s_v \circ s_u & \text{si } u \notin vA^* \text{ et } v \notin uA^* \\ \text{T3)} \ t_u \circ t_{udv} = t_{ugv} \circ t_u & \text{S3)} \ s_u \circ s_{udv} = s_{ugv} \circ s_u \\ \text{T4)} \ t_u \circ t_{ugv} = t_{udv} \circ t_u & \text{S4)} \ s_u \circ s_{ugv} = s_{udv} \circ s_u \end{array}$$

Les relations T1..T4 (resp. S1..S4) entraînent qu'on peut toujours réordonner un produit de générateurs élémentaires en paquets commutatifs indexés par des mots de longueur croissante.

Exemple 1.2.

$$\begin{aligned} t_g \circ t_{dg^2} \circ t_1 \circ t_{dg} \circ t_d &= t_g \circ t_1 \circ t_{g^3} \circ t_{dg} \circ t_d \\ t_1 \circ t_d \circ t_{g^3} \circ t_{dg} \circ t_d &= t_1 \circ t_d \circ t_{g^3} \circ t_d \circ t_{d^2} \\ t_1 \circ t_d \circ t_d \circ t_{g^3} \circ t_{d^2} &= t_1 \circ t_{d^2} \circ t_{g^3} \end{aligned}$$

Remarquons que le même calcul peut être conduit dans S .

Pour tout $X \subset A^n$, on pose $t_X = \prod_{w \in X} t_w$ (produit commutatif). Les langages finis peuvent s'écrire comme des polynômes non commutatifs à coefficients dans l'anneau de Boole $\mathbb{B}$ [BR]. Avec cette identification $X = \sum_{x \in X} x = \sum_{0 \leq k \leq n} X \cap A^k$. On pose alors

$$t_X = t_{X_0} \circ t_{X_1} \circ \cdots \circ t_{X_n}$$

où $X_k := X \cap A^k$. Ces définitions deviennent compatibles avec les notations précédentes avec l'identification $t_w = t_{\{w\}}$. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer

Théorème 1.3. *i) L'application $X \longrightarrow t_X$ est une bijection*

$$\mathbb{B}\langle A \rangle \longrightarrow T_c.$$

ii) Les relations T1..T4 constituent une présentation de T_c et de T . En particulier α est un isomorphisme.

Preuve. i) Soit $X = u + \sum_{|v| \geq |u|} v \in \mathbb{B}\langle A \rangle$. Formons le code préfixe maximal fini

$$F = au + bau + b^2u + \sum_{\substack{|v|=|u| \\ v \neq u}} v.$$

On a $t_X(F) = bu + a^2u + abu + \sum_{\substack{|v|=|u| \\ v \neq u}} v$. Ceci montre que

$$t_X = 1 \implies X = \emptyset.$$

Supposons maintenant que $t_X = t_Y$ avec $X, Y \neq \emptyset$ et, sans perte de généralité, que $\inf_{w \in X} |w| \leq \inf_{w \in Y} |w|$. La construction précédente montre que tout mot de longueur minimale de X appartient à Y . On termine le raisonnement par récurrence en considérant un mot u de longueur minimale dans X et les éléments $t_{X-u} = t_u \circ t_X = t_u \circ t_Y = t_{Y-u}$. Il reste à prouver que l'application $X \longrightarrow t_X$ est surjective ce qui se fait en remarquant que $1 = t_\emptyset$ et que $t_X \circ t_u = t_{X'}$ à l'aide d'un calcul comme dans l'exemple 3.1.

ii) Soit $G = \langle (r_w)_{w \in A^*}; R1..R4 \rangle$, les relations R1..R4 étant les mêmes (avec les générateurs r_w) que les relations T1..T4. Comme ces seules relations permettent la définition des t_X , on peut définir les r_X de façon similaire et prouver par le même argument qu'en (i) que l'application $j : X \longrightarrow r_X$ est surjective. Comme T vérifie les relations de G on a des morphismes surjectifs $\rho : G \longrightarrow T$ et $\alpha : T \longrightarrow T_c$. La composée $X \longrightarrow r_X \longrightarrow t_X$ est injective, ce qui montre que la dernière flèche ($\alpha \circ \rho$) est injective, et comme G est présenté, ceci établit complètement le point (ii). $\square$

L'isomorphisme α permet d'en déduire le

Corollaire 1.4. *Les règles S1..S4 sont une présentation de S .*

Le groupe engendré par les $(s_w)_{|w| \leq n}$ que l'on notera S_n , est l'image de $\mathbb{B}_{\leq n} < A >$, on en déduit le corollaire suivant

Corollaire 1.5. *Le sous-groupe S_n est un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_{2^{n+1}}$.*

Preuve. D'une part $S_n \subset \mathfrak{S}_{2^{n+1}}$ car S_n agit fidèlement sur les mots binaires de longueur $n + 1$. D'autre part, son cardinal est celui de $\mathbb{B}_{\leq n} < A >$ soit $2^{2^{n+1}-1}$ ce qui est exactement le cardinal des 2-sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_{2^{n+1}}$ $\square$

Nous allons maintenant voir que l'évaluation

$$\overline{ev} : \text{Arbre standard} \longrightarrow \text{monôme}$$

sépare les orbites de G .

Remarque. Cette présentation du groupe permet de voir immédiatement que l'application

$$\epsilon(g) = (-1)^{l(g)}$$

est un morphisme $S \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ (cf. [AK] pour une application de cette signature aux bases des algèbres de Lie libres).

2. Orbites et monômes de Jordan. Soit $\mathbb{X}$, un alphabet. On définit le magma libre $M(\mathbb{X})$ de la même façon qu'en 1.1, c'est-à-dire

- $M_1 = \mathbb{X}$,
- $M_n = \sum_{p+q=n} M_p \times M_q$.

La loi de $M(\mathbb{X})$ est définie par la formation du couple $(,)$ [Bo1] et les éléments de M s'identifient aux mots bien parenthésés à lettres dans $\mathbb{X}$. Pour chaque $w \in \{g, d\}^*$, on définit une involution $s_w \in \mathfrak{S}_{M(\mathbb{X})}$. Les $(s_w)_{w \in \{g, d\}^*}$ vérifient les relations S1..S4; on a donc une action (fidèle comme on le voit en spécialisant toutes les variables en une seule) de G sur $M(\mathbb{X})$. Soit maintenant $(\mathcal{E}, *)$, un magma. Toute application $ev : \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{E}$ s'étend de façon unique en un morphisme $\overline{ev} : M(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathcal{E}$ [Bo1]. Si le magma est commutatif, $\overline{ev}$ est constante sur les orbites de G . Dans le cas des arbres de Jordan standard, l'évaluation sépare les orbites comme nous allons le montrer maintenant.

Soit $\mathbb{Z} < \mathbb{X} >$, l'algèbre libre à coefficients entiers sur l'alphabet $\mathbb{X}$. On la munit du crochet de Jordan défini par $\langle P, Q \rangle := PQ + QP$. L'algèbre $(\mathbb{Z} < \mathbb{X} >, \langle, \rangle)$ ainsi définie s'appelle *algèbre de Jordan spéciale libre* [Co]. En particulier, pour $\langle, \rangle$, c'est un magma commutatif. On appellera *standard*, un arbre $\mathcal{A} \in M(\mathbb{X})$ dont toutes les lettres sont distinctes. On a alors le

Théorème 2.1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des arbres standards. Pour que $\overline{ev} \mathcal{A} = \overline{ev} \mathcal{B}$, il faut et il suffit que $\mathcal{A} \sim_G \mathcal{B}$.

Preuve. La condition est évidemment suffisante puisque, comme $<, >$ est commutative, $\overline{ev}$ est constante sur les orbites de G .

Supposons maintenant que $\overline{ev} \mathcal{A} = \overline{ev} \mathcal{B} = P$. Les deux arbres doivent être du même degré qui est celui du polynôme P . Si ce degré est 1, $\overline{ev}(\mathcal{A}) = a = \overline{ev}(\mathcal{B}) = b$ et la nécessité est évidente dans ce cas. Si $|\mathcal{A}| \geq 2$ on peut poser $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_d)$ le théorème sera démontré par récurrence si l'on prouve que $\overline{ev}(\mathcal{A})$ détermine de façon unique $\overline{ev}(\mathcal{A}_g)$ et $\overline{ev}(\mathcal{A}_d)$, ce qui résulte du lemme suivant

Lemme 2.2. Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_d) \in M(\mathbb{X})$ tel que $Alph(\mathcal{A}_g) \cap Alph(\mathcal{A}_d) = \emptyset$ et soit $a \in Alph(\mathcal{A}_g)$ alors

$$\{ b \in \mathbb{X} \mid (\exists u \in \mathbb{X}^*)((aub, \overline{ev}(\mathcal{A})) \neq 0) \} = Alph(\mathcal{A}_d)$$

où (w, P) désigne le coefficient de w dans P .

Preuve du lemme. Il suffit de remarquer que, pour un monôme de Jordan $\overline{ev}(\mathcal{A})$, l'ensemble des lettres finales des monômes de $\overline{ev}(\mathcal{A})$ est $Alph(\mathcal{A})$, ce qui se démontre par récurrence. Alors, si $b \in Alph(\mathcal{A}_d)$, b est la lettre finale d'un monôme de $\overline{ev}(\mathcal{A}_d)$ et donc appartient à l'ensemble du lemme. Inversement, si b est dans l'ensemble du lemme, b ne saurait être la lettre finale d'un monôme de $\overline{ev}(\mathcal{A}_d)\overline{ev}(\mathcal{A}_g)$ puisqu'aucun monôme de ce produit ne commence par a , b est donc lettre finale d'un monôme de $\overline{ev}(\mathcal{A}_g)\overline{ev}(\mathcal{A}_d)$ et ces lettres sont celles de $Alph(\mathcal{A}_d)$. $\square$

Fin de la preuve du théorème. Soit $a \in Alph(\overline{ev}(\mathcal{A}))$. On a $a \in Alph(\overline{ev}(\mathcal{A}_g))$ ou bien $a \in Alph(\overline{ev}(\mathcal{A}_d))$ et on peut toujours se ramener au premier cas par l'action de G . Supposons donc que $a \in Alph(\overline{ev}(\mathcal{A}_g))$ et, alors, $Alph(\mathcal{A}_d)$ est déterminé par le lemme à partir de $\overline{ev}(\mathcal{A})$. $\square$

Un calcul simple montre que les monômes trouvés ne sont plus linéairement indépendants à partir du poids 4. Pour les poids ≤ 3 les monômes sont indépendants. On a la table

Poids	Classes	Polynômes
2	(x, y)	$xy + yx$
3	$(x, (y, z))$	$xyz + xzy + yzx + zyx$
3	$(y, (x, z))$	$yxz + yzx + xzy + zxy$
3	$(z, (x, y))$	$zxy + zyx + xyz + yzx$

3. Dépendance linéaire des monômes et identités. Soit k , un corps de caractéristique 0, $\mathbb{A}$ un alphabet et $J(\mathbb{A}) \subset k\langle \mathbb{A} \rangle$, l'algèbre de Jordan spéciale libre d'alphabet $\mathbb{A}$. Cet espace est gradué pour le multidegré et l'on pose, pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(A)}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$J_\alpha(\mathbb{A}) = J(\mathbb{A}) \cap k_\alpha \langle \mathbb{A} \rangle ; J_n(\mathbb{A}) = J(\mathbb{A}) \cap k_n \langle \mathbb{A} \rangle .$$

Soit $V = k\mathbb{A}$, l'espace vectoriel librement engendré par $\mathbb{A}$. Le groupe $GL(V)$ agit sur J_n par changement de variables. Comme la série de Hilbert $\sum_n \dim(J_n)q^n$ est

inconnue (pour $|A| \geq 4$), on ne connaît pas non plus le caractère de $GL(V)$ sur J_n , ni (ce qui est équivalent [Ba]) le caractère de $\mathfrak{S}_{\mathbb{A}}$ sur $J_{11..1}(\mathbb{A}) = J_{1^n}(\mathbb{A})$ (le sous-espace de Pauli de $J(\mathbb{A})$). Pour calculer ce caractère il suffit de connaître une base, ou bien un système générateur et l'espace des relations de liaison. Nous allons, à titre d'application, détailler complètement, pour $n = 4$, le calcul d'un système générateur et ses relations de liaison.

Calculons d'abord $\dim(J_{1^4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4))$, grâce au théorème suivant dû à Cohn [Co]

Théorème 3.1. *Soit $\omega : k \langle \mathbb{A} \rangle \longrightarrow k \langle \mathbb{A} \rangle$, le prolongement linéaire de l'application palindrome définie par*

$$\omega(a_1 a_2 \cdots a_n) := a_n \cdots a_2 a_1.$$

Soit H le sous-espace des invariants de ω . Alors H est la sous-algèbre de Jordan engendrée par J et les tétrades c'est-à-dire les polynômes de la forme

$$a_1 a_2 a_3 a_4 + a_4 a_3 a_2 a_1$$

où les $(a_i)_{i=1..4}$ sont des lettres distinctes.

Remarque. On peut affaiblir les hypothèses du théorème en conservant la même conclusion. En effet, si $\overline{abcd}$ désigne la tétrade $abcd + dcba$. On a

$$\begin{aligned} \overline{abcd} + \overline{bacd} &= \langle a, b \rangle cd + dc \langle a, b \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle + \langle d, \langle \langle a, b \rangle, c \rangle \rangle - \langle c, \langle \langle a, b \rangle, d \rangle \rangle). \end{aligned}$$

Ce qui montre que, dans le théorème 4.1, on peut se ramener à une seule tétrade par ensemble de quatre lettres distinctes. On obtient alors le corollaire suivant

Corollaire 3.2. *Soit $\mathbb{A} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, un alphabet à quatre lettres. L'espace H_4 des polynômes de degré 4 invariants par ω est la somme directe*

$$J_4 \oplus k.\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

Une base de H_4 est formée des $\overline{a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} a_{\sigma(4)}}$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ tels que

$$\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4) < \sigma(4)\sigma(3)\sigma(2)\sigma(1),$$

$<$ étant l'ordre lexicographique. On a donc $\dim(H_4) = 12$ et $\dim(J) = 11$.

Il y a 15 orbites d'arbres de poids 4 à 4 lettres dans $\mathbb{A}$.

Les orbites de forme $\langle \langle \bullet, \bullet \rangle, \langle \bullet, \bullet \rangle \rangle$ qui fournissent 3 monômes distincts.

Les orbites de forme $\langle \bullet, \langle \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle \rangle \rangle$ qui fournissent 12 monômes distincts.

Ces monômes seront mieux décrits en considérant l'algèbre du groupe symétrique. Dans la suite on notera une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ comme le mot $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)$ et les éléments de l'algèbre $k[\mathfrak{S}_4]$ comme des combinaisons linéaires de mots. À chaque arbre binaire $\mathcal{A}$ correspond un élément de Ω défini par la formule

$$\overline{ev}\mathcal{A} = a_1 a_2 a_3 a_4 . \Omega$$

où ev est l'évaluation identique. On a donc la correspondance

Forme	Ω
$\langle \langle \bullet, \bullet \rangle, \langle \bullet, \bullet \rangle \rangle$	$1234 + 1243 + 2134 + 2143$ $+3412 + 3421 + 4312 + 4321$
$\langle \bullet, \langle \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle \rangle \rangle$	$1234 + 1243 + 1342 + 1432$ $+2341 + 2431 + 3421 + 4321$

Le procédé précédent est évidemment général et consiste à exhiber une base de relations entre les arbres d'une classe d'arbres (qui sont des relations de liaison pour l'évaluation). Il donne, via le théorème de polarisation des applications multilinéaires, toutes identités homogènes de degré donné dans l'algèbre de Jordan spéciale libre.

4. Conclusion. Grâce à l'action du groupe d'équivalence d'arbres qui permet de réduire le nombre de dimensions à traiter, nous avons décrit ici un procédé qui permet de calculer automatiquement un système complet d'identités vérifiées par l'algèbre de Jordan spéciale libre.

Remerciements. Les auteurs remercient les arbitres pour leurs remarques constructives.

English extended abstract.

0. Introduction. An important non-associative operation is the q -bracket, defined by

$$\langle x, y \rangle := xy - qyx. \quad (qBR)$$

Let $\mathbb{A}$ be an alphabet and k , a field. The formula (qBR) defines on $k\langle \mathbb{A} \rangle$ an additional law. The subalgebra generated by the letters is not the whole algebra for values $q = \pm 1$. For $q = 1$ we obtain the free Lie algebra. For $q = -1$ the subalgebra will be denoted $J(\mathbb{A})$ in the sequel and called *free special Jordan algebra* [Co] (it is called special as it solves the usual universal problem under the restrictive condition that the Jordan bracket comes from an associative structure).

As usual, to each binary tree, one can associate the corresponding evaluation in $J(\mathbb{A})$, but several trees can give the same result. For example

$$\begin{aligned} &\langle \langle \langle x_1, x_2 \rangle, x_3 \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle \rangle \\ &\langle \langle x_3, \langle x_1, x_2 \rangle \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle \rangle \\ &\langle \langle x_3, \langle x_2, x_1 \rangle \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle \rangle. \end{aligned}$$

So we are led to consider the group acting on (binary) trees just by swapping the trees attached to some node. This group appears in many contexts [PS][AHU][De][GM].

The paper is divided in three parts. In section one, we study the action of our group on maximal prefix codes.

In the second part, it is shown that the relations we got previously are, in fact, a presentation of the group. To this end, we use a normal form which is a product of commutative subproducts. This implies that this group is the direct limit of 2-Sylow subgroups of $\mathfrak{S}_{2^n}$.

In the third section, we come back to Jordan monomials and show that two standard monomials are equal iff the corresponding trees are equivalent under the action of S .

These monomials are linearly dependent and the dimensional defect is due to the presence of a complete set of identities satisfied by the special Jordan algebras.

1. Symmetries on trees and binary languages.

1.1. Action of S on the binary trees. One can define the magma $M(x) = \sum_{n \geq 1} M_n$, of binary trees (i.e. the free magma on a single variable $\{x\}$), recursively by

- $M_1 = \{x\}$;
- $M_n = \sum_{p+q=n} M_p \times M_q$.

Every element of M_p , for $p \geq 2$ can be uniquely written $(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_r)$. The group S acts on $M(x)$ by means of its generators $(s_w)_{w \in \{l,r\}^*}$ and formulas

- $s_w(x) = x$ for all w ;
- $s_1(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_r) = (\mathcal{A}_r, \mathcal{A}_l)$;
- $s_{lw}(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_r) = (s_w(\mathcal{A}_l), \mathcal{A}_r)$;
- $s_{rw}(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_r) = (\mathcal{A}_l, s_w(\mathcal{A}_r))$.

1.2. The group T and its action on binary languages. Let $A = \{a, b\}$, then every language can be written

$$L = \epsilon + aU + bV = \epsilon + U \odot V$$

with $\epsilon \in \{0, 1\}$. One then define T by means its generators $(t_w)_{w \in \{l,r\}^*}$, the rule $t_w(\epsilon + aU + bV) = \epsilon + t_w(aU + bV)$ and formulas

- R1) $t_w(\{1\}) = \{1\}$;
- R2) $t_1(aU + bV) = bU + aV$;
- R3) $t_{lw}(aU + bV) = at_w(U) + bV$;
- R4) $t_{rw}(aU + bV) = aU + bt_w(V)$.

The set $(Pmf(A), \odot)$ of maximal prefix codes (see [BP]) is invariant by T . Let $\alpha : T \rightarrow T_c$ be the morphism *restriction to $Pmf(A)$* . Also, the usual bijection between $M(x)$ and $Pmf(A)$ induces an isomorphism $\beta : T_c \rightarrow S$.

1.3. Normal form and presentation of the groups T, T_c et S . Families (s_w) and (t_w) satisfy the same relations

- | | | |
|---|---|--|
| T1) $t_u^2 = 1$ | S1) $s_u^2 = 1$ | for all u |
| T2) $t_u \circ t_v = t_v \circ t_u$ | S2) $s_u \circ s_v = s_v \circ s_u$ | if $u \notin vA^*$ and $v \notin uA^*$ |
| T3) $t_u \circ t_{urv} = t_{ulv} \circ t_u$ | S3) $s_u \circ s_{urv} = s_{ulv} \circ s_u$ | |
| T4) $t_u \circ t_{ulv} = t_{urv} \circ t_u$ | S4) $s_u \circ s_{ulv} = s_{urv} \circ s_u$ | |

For $X \subset A^n$, set $t_X = \prod_{w \in X} t_w$ and

$$t_X = t_{X_0} \circ t_{X_1} \cdots \circ t_{X_n}$$

with $X_k := X \cap A^k$. With these conventions, we have

Theorem 1.3. i) The mapping $X \rightarrow t_X$ is one to one

$$\mathbb{B} < A > \rightarrow T_c.$$

ii) The relations T1..T4 are a presentation of T_c and of T . In particular α is an isomorphism.

Corollary 1.4. *S1..S4 is a presentation for S .*

Corollary 1.5. *S_n is a 2-Sylow subgroup in $\mathfrak{S}_{2^{n+1}}$.*

2. Orbits and Jordan monomials. Let $\mathbb{X}$ be an alphabet and $M(\mathbb{X})$ the free magma constructed in a way similar as in 1.1. That is

- $M_1 = \mathbb{X}$;
- $M_n = \sum_{p+q=n} M_p \times M_q$.

For every $w \in \{l, r\}^*$ the involution $s_w \in \mathfrak{S}_{M(\mathbb{X})}$ is defined exactly as for $M(x)$. The elements $(s_w)_{w \in \{l, r\}^*}$ satisfy the relations S1..S4 so we get a natural action of G on $M(\mathbb{X})$. Every mapping $ev : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}\langle \mathbb{A} \rangle$ extends in a unique way as a morphism $\bar{ev} : M(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{Z}\langle \mathbb{A} \rangle$ [Bo1]. As $(\mathbb{Z}\langle \mathbb{A} \rangle, <, >)$ is commutative, one can see easily that $\bar{ev}$ is constant within the orbits of G . In the sequel we consider the case when $\mathbb{A} = \mathbb{X}$ and $ev = Id_{\mathbb{X}}$. Call now *standard* a tree such that the letters involved in it are all different. Then

Theorem 2.1. *Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be standard trees. Then $\bar{ev} \mathcal{A} = \bar{ev} \mathcal{B}$ iff $\mathcal{A} \sim_G \mathcal{B}$.*

3. Linear relations between monomials and identities. Let k be a field of characteristic 0, $\mathbb{A}$ an alphabet and $J(\mathbb{A}) \subset k\langle \mathbb{A} \rangle$, the free special Jordan algebra on $\mathbb{A}$. Set

$$J_\alpha(\mathbb{A}) = J(\mathbb{A}) \cap k_\alpha \langle \mathbb{A} \rangle ; J_n(\mathbb{A}) = J(\mathbb{A}) \cap k_n \langle \mathbb{A} \rangle$$

for $\alpha \in \mathbb{N}^{(A)}$ and $n \in \mathbb{N}$.

From the knowledge of the Hilbert series

$$\sum m_\alpha \mathbb{X}^\alpha ; m_\alpha := \dim(J_\alpha(\mathbb{A}))$$

we could deduce the character of $J(\mathbb{A})$ as $GL(k\mathbb{A})$ -module, but one doesn't even know

$$\sum m_n t^n ; m_n := \dim(J_n(\mathbb{A})) .$$

Considering the orbits of monomials under G reduces the number of bracket formulas.

One gets 15 orbits for $n = 4$.

Orbits with form $\langle \langle \bullet, \bullet \rangle, \bullet \rangle, \langle \bullet, \bullet \rangle \rangle$, giving 3 monomials.

Orbits with form $\langle \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle \rangle, \langle \bullet, \bullet \rangle \rangle$, giving 12 monomials.

One gets 4 independant relations between the 15 formulas (this give all the identities on 4 letters). This computing process can of course be used similarly at any degree.

4. Conclusion. Thanks to our group which reduces the number of dimensions to deal with, a process has been described which permits us to compute automatically a complete system of identities in the free special Jordan algebra.

BIBLIOGRAPHIE

- [AVL] G. M. Adel'son-Velskii and Y. M. Landis, *An algorithm for the organization of information*, Soviet Math. Dokl. **3**, 131–137.
- [AHU] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1974.
- [Ba] Y. A. Bahturin, *Identical Relations in Lie Algebras*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.

- [BR] J. Berstel and C. Reutenauer, *Rational series and their languages*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Bo1] N. Bourbaki, *Algèbre*, Hermann, Paris, 1970.
- [Bo2] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie ch II et III*, CCLS, 1972.
- [CHS] A. R. Calderbank, P. Hanlon and S. Sundaram, *Representations of the symmetric group in deformations of the free Lie algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), 315–333.
- [Co] M. P. Cohn, *Universal Algebra*, D. Reidel, Dordrecht, 1981.
- [De] P. Dehornoy, *Structural Monoids Associated to Equationel Varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 293–304.
- [GM] R.I Grigorchuk and A. Machì, *On a group of intermediate growth that acts on a line by homeomorphisms* (Russian), Math. Zametki **53** (1993), 46–63.
- [Lo] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1983.
- [PS] D. Perrin and M. P. Schützenberger, *Synchronizing Prefix Codes and Automata and The Road Coloring Problem*, LITP Report **91.22**, Paris.
- [Re] Ree R., *Lie elements associated with shuffles*, Ann. of Math. **68** (1958), 210–220.
- [Reu] C. Reutenauer, *Free Lie algebras*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

G. DUCHAMP ET O. KHADIR

LABORATOIRE D'INFORMATIQUE DE ROUEN

UNIVERSITÉ DE ROUEN, PLACE E. BLONDEL, B. P. 118

76134 MONT-SAINT-AIGNAN CEDEX

FRANCE