

LE PROBLÈME DU COUREUR ET SON INTERPRÉTATION PROBABILISTE

CLAUDE BÉLISLE

RÉSUMÉ. Un coureur a couru un intervalle de longueur δ en un temps τ . Soit s , un nombre réel entre 0 et 1. Existe-t-il, à l'intérieur de cet intervalle de longueur δ , un sous-intervalle de longueur $s\delta$ couru en un temps $s\tau$? Chose étonnante, la réponse n'est pas nécessairement oui. Soit F , une stratégie de course, c'est-à-dire une fonction continue, croissante, définie sur l'intervalle $[0, \tau]$ et telle que $F(0) = 0$ et $F(\tau) = \delta$. Soit S_F , l'ensemble des $s \in [0, 1]$ pour lesquels la stratégie F admet un sous-intervalle de l'intervalle $[0, \delta]$ de longueur $s\delta$ couru en un temps $s\tau$. Dans cet article, nous établissons quelques propriétés non triviales de l'ensemble S_F . Nos résultats se traduisent de façon naturelle en termes probabilistes. En particulier, nous obtenons le curieux résultat suivant. D'une part, si P est une mesure de probabilité sur l'intervalle $[0, 1]$ et si P n'a pas d'atomes, alors pour tout entier m il existe un sous-intervalle de l'intervalle $[0, 1]$ de longueur $1/m$ et de probabilité $1/m$. D'autre part, si $s \in [0, 1]$ n'est ni 0 ni l'inverse d'un entier positif, alors il existe une mesure de probabilité sur l'intervalle $[0, 1]$ pour laquelle aucun sous-intervalle de $[0, 1]$ de longueur s n'a une probabilité égale à s .

ABSTRACT. A runner has covered an interval of length δ in a time τ . Fix s , a number between 0 and 1. Does there exist, within this interval of length δ , a subinterval of length $s\delta$ covered in a time $s\tau$? Surprisingly, the answer is not necessarily yes. Let F be a race strategy, i.e., let F be a continuous increasing function defined on the interval $[0, \tau]$ and satisfying $F(0) = 0$ and $F(\tau) = \delta$. Let S_F denote the set of $s \in [0, 1]$ for which the race strategy F admits a subinterval of $[0, \delta]$ of length $s\delta$ covered in a time $s\tau$. In this article, we establish a few non-trivial properties of the set S_F . Our results have a natural probabilistic interpretation. In particular, we prove the following curious result. On one hand, if P is a continuous probability measure on the interval $[0, 1]$ then for every positive integer m there is a subinterval of $[0, 1]$ of length $1/m$ and of probability $1/m$. On the other hand, if $s \in [0, 1]$ is neither 0 nor the inverse of a positive integer, then there exists a continuous probability measure on $[0, 1]$ for which no subinterval of length s has probability s .

1. Introduction. La course à pied a souvent été l'objet d'études mathématiques et statistiques. Certains, à l'aide d'outils probabilistes et statistiques, ont essayé de

Reçu le 9 septembre 1994 et, sous forme définitive, le 17 février 1995.

modéliser l'évolution des records mondiaux dans le but de prédire les performances humaines ultimes (Ballerini and Resnick [1], Chatterjee and Chatterjee [4], De Haan and Verkade [5], Smith [12], Smith and Miller [13], Tryfos and Blackmore [14], Yang [16]). D'autres, en se basant sur les principes fondamentaux de la physique classique, ont étudié l'aspect énergétique de la course à pied et ont tenté de décrire la stratégie de course optimale et de prédire les performances à partir de divers paramètres physiologiques (Buoncristiani and Martin [3], Keller [6], Lloyd [7], Margaria *et al.* [8], Péronnet and Thibault [9], Riegel [10], Ward-Smith [15]). Dans le présent article, nous considérons un problème purement analytique concernant les stratégies de course.

Un coureur a parcouru une distance δ en un temps τ . Si $0 \leq s \leq 1$, existe-t-il, à l'intérieur de cet intervalle de longueur δ , un sous-intervalle de longueur $s\delta$ couru en un temps $s\tau$? Chose étonnante, la réponse n'est pas nécessairement oui. Par exemple, un coureur qui a parcouru une distance de 12 kilomètres en 48 minutes n'a pas nécessairement couru un intervalle de 10 kilomètres en 40 minutes à l'intérieur de cet intervalle de 12 kilomètres. Il suffit de considérer la stratégie suivante: on court le premier kilomètre à la vitesse constante de 3 minutes au kilomètre, on court les dix kilomètres suivants à la vitesse constante de 4 minutes et 12 secondes au kilomètre, et on court le dernier kilomètre à la vitesse constante de 3 minutes au kilomètre. Avec une telle stratégie de course, on parcourt les douze kilomètres en 48 minutes mais le plus rapide segment de 10 kilomètres est parcouru en 40 minutes et 48 secondes. Il est facile de vérifier que pour cette stratégie de course, il existe un intervalle de longueur $12s$ kilomètres couru en un temps de $48s$ minutes si et seulement si $s \in [0, 1/2] \cup \{1\}$. Il est alors naturel de poser la question suivante. Étant donné $s \in [0, 1]$, existe-t-il une stratégie de course de 12 kilomètres en 48 minutes pour laquelle aucun intervalle de longueur $12s$ kilomètres n'est couru en un temps $48s$? Plus généralement, étant donné un ensemble $S \subset [0, 1]$, existe-t-il une stratégie de course de 12 kilomètres en 48 minutes pour laquelle S est l'ensemble des $s \in [0, 1]$ tels qu'il existe un intervalle de $12s$ kilomètres couru en $48s$ minutes?

2. Énoncés des résultats. Sans perte de généralité, nous considérons le cas où $\delta = 1$ et $\tau = 1$. Soit $\mathcal{F}$, l'ensemble des stratégies de course, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant les conditions suivantes:

- (a): $F(0) = 0$,
- (b): $F(1) = 1$,
- (c): F est continue sur $[0, 1]$,
- (d): $F(x) \leq F(y)$, pour tout $0 \leq x \leq y \leq 1$.

Les conditions (a) et (b) spécifient que le coureur a franchi la distance unité en un temps unité. La condition (c) interdit les sauts quantiques. La condition (d) correspond au fait que le coureur va toujours de l'avant. Nous n'imposons pas que F soit strictement croissante; le coureur peut s'arrêter pour boire ou pour nouer ses lacets de souliers. Nous n'imposons pas non plus de condition de différentiabilité sur la fonction F . Pour tout $F \in \mathcal{F}$, posons

$$S_F = \{s \in [0, 1] : \exists 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1 \text{ tels que } t_2 - t_1 = s \text{ et } F(t_2) - F(t_1) = s\}.$$

Cet ensemble S_F est l'ensemble des $s \in [0, 1]$ pour lesquels il existe, à l'intérieur de

l'intervalle de longueur unité couru en une unité de temps, un intervalle de longueur s couru en un temps s . Le problème du coureur se pose alors comme suit.

LE PROBLÈME DU COUREUR:

POUR QUELS $S \subset [0, 1]$ EXISTE-T-IL UN $F \in \mathcal{F}$ TEL QUE $S_F = S$?

   la section 4 nous démontrons les résultats suivants:

Théorème 1. *Pour tout $F \in \mathcal{F}$, l'ensemble S_F est fermé.*

Théorème 2. *Pour tout $F \in \mathcal{F}$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $[0, \epsilon] \subset S_F$.*

Théorème 3. *Soit S , un sous-ensemble fermé de $[0, 1]$. Si S contient l'ensemble $[0, 1/2] \cup \{1\}$ alors il existe une fonction $F \in \mathcal{F}$ telle que $S_F = S$.*

Théorème 4. *Pour tout $F \in \mathcal{F}$, on a $\{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \subset S_F$.*

Théorème 5. *Pour tout entier positif n , il existe une fonction $F_n \in \mathcal{F}$ telle que $S_{F_n} \cap (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) = \emptyset$.*

Le théorème 5 implique que si $x \in [0, 1] - \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ alors il existe une fonction $F \in \mathcal{F}$ telle que $x \notin S_F$. Donc, comme corollaire immédiat des deux derniers théorèmes, on obtient:

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} S_F = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}.$$

La résolution complète du problème du coureur demeure un problème ouvert. Les résultats présentés dans cet article donnent une bonne indication de la complexité du problème. Avant de passer à la démonstration de ces résultats, nous faisons une observation qui aidera le lecteur à mieux visualiser certains de nos raisonnements. Soit $\mathcal{G}$, l'ensemble des fonctions réelles G définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et telles que

- $G(0) = 0$,
- $G(1) = 0$,
- G est continue sur $[0, 1]$,
- $G(t_1) + t_1 \leq G(t_2) + t_2$, pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.

Pour $G \in \mathcal{G}$, posons

$$T_G = \{t \in [0, 1] : \exists 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1 \text{ tels que } t_2 - t_1 = t \text{ et } G(t_1) = G(t_2)\}.$$

Les deux lemmes suivants sont des conséquences immédiates de nos définitions. On s'en servira dans la démonstration des théorèmes 3 et 5.

Lemme 1. *Soit F et G des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[0, 1]$. Supposons que $F(t) = G(t) + t$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors $F \in \mathcal{F}$ si et seulement si $G \in \mathcal{G}$.*

Lemme 2. *Soit $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$ des fonctions telles que $F(t) = G(t) + t$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors $S_F = T_G$.*

3. Interprétation probabiliste. Soit $\mathcal{P}$, l'ensemble des mesures de probabilité définies sur l'intervalle $[0, 1]$ (muni de sa tribu borélienne) et n'ayant pas d'atomes. Autrement dit, $P \in \mathcal{P}$ si et seulement si P est une mesure de probabilité sur l'intervalle $[0, 1]$ (muni de sa tribu borélienne) et $P[\{x\}] = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ (Billingsley [2]). Alors la famille $\mathcal{F}$ définie à la section précédente est précisément la famille des fonctions de répartition des mesures de probabilité appartenant à $\mathcal{P}$. En d'autres mots, si pour $0 \leq x \leq 1$ on pose $F_P(x) = P[[0, x]]$, alors $F_P \in \mathcal{F}$ si et seulement si $P \in \mathcal{P}$. Chacun des résultats énoncés à la section précédente peut donc se traduire en terme de la famille $\mathcal{P}$. En particulier, on obtient le curieux résultat que voici:

Théorème 6.

$$\bigcap_{P \in \mathcal{P}} S_{F_P} = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}.$$

4. Démonstration du théorème 1. Fixons $F \in \mathcal{F}$. Notons que $S_F \neq \emptyset$ puisque notre définition de S_F implique que 0 et 1 appartiennent à S_F . Soit $(s_n; n \geq 1)$, une suite de nombres réels appartenant à S_F et supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ pour un certain s . Par définition, pour chaque n il existe $0 \leq t_{n,1} \leq t_{n,2} \leq 1$ tels que $t_{n,2} - t_{n,1} = s_n$ et $F(t_{n,2}) - F(t_{n,1}) = s_n$. Il existe alors des entiers positifs $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tels que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k,1} = t_1$ pour un certain $t_1 \in [0, 1]$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k,2} = t_2$ pour un certain $t_2 \in [0, 1]$ (Rudin [11], Théorème 3.6). On a alors $t_{n_k,2} - t_{n_k,1} = s_{n_k}$ pour tout $k \geq 1$ et $F(t_{n_k,2}) - F(t_{n_k,1}) = s_{n_k}$ pour tout $k \geq 1$. Par continuité on obtient $t_2 - t_1 = s$ et $F(t_2) - F(t_1) = s$, ce qui permet de conclure que $s \in S_F$.

5. Démonstration du théorème 2. Fixons $F \in \mathcal{F}$. Si $F(t) = t$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors la conclusion du théorème est satisfaite avec $\epsilon = 1$. Supposons maintenant qu'il existe un $t_o \in (0, 1)$ tel que $F(t_o) \neq t_o$. Considérons le cas où $F(t_o) > t_o$; le cas où $F(t_o) < t_o$ se traite de la même façon. Posons

$$\begin{aligned} a &= \inf\{t \in [0, t_o] : F(s) > s \text{ pour tout } s \in [t, t_o]\}, \\ b &= \sup\{t \in [t_o, 1] : F(s) > s \text{ pour tout } s \in [t_o, t]\}. \end{aligned}$$

Puisque F est continue, on a $F(a) = a$, $F(b) = b$ et $a < b$. Nous allons montrer que la conclusion du théorème est valide avec $\epsilon = b - a$. Fixons $s \in [0, b - a]$. Pour $t \in [a, b - s]$, posons $H_s(t) = F(t + s) - F(t)$. Alors la fonction H_s satisfait les conditions suivantes:

- H_s est continue sur $[a, b - s]$,
- $H_s(a) > s$,
- $H_s(b - s) < s$.

Par continuité, il existe un $t_* \in [a, b - s]$ tel que $H_s(t_*) = s$. On a donc $F(t_* + s) - F(t_*) = s$. Par conséquent, on a $s \in S_F$. Donc $[0, b - a] \subset S_F$.

6. Démonstration du théorème 3. Soit S , un ensemble fermé satisfaisant $[0, 1/2] \cup \{1\} \subset S \subset [0, 1]$. Nous allons construire une fonction F telle que $F \in \mathcal{F}$ et $S_F = S$. Nous utiliserons les notations suivantes. Si J est un sous-intervalle de l'intervalle $[0, 1]$,

on pose

$$w_J(t) = \begin{cases} (t-a)/2 & a < t \leq (a+b)/2 \\ (b-t)/2 & (a+b)/2 < t < b \\ 0 & t \notin (a,b), \end{cases}$$

où $a = \inf J$ et $b = \sup J$. Puisque S est fermé, on a $[0, 1] - S = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup \dots$ où $J_1, J_2, J_3, \dots$ sont des intervalles ouverts et disjoints. Posons $J_0 = (0, t_*)$ où $t_* = \sup\{t \in [0, 1] : [0, t] \subset S\}$. Enfin, posons

$$G(t) = w_{J_0}(t) - \sum_{k \geq 1} w_{J_k}(t),$$

$$F(t) = G(t) + t.$$

En inspectant le graphe de G (présenté à la figure 1 pour le cas $S = [0.00, 0.60] \cup [0.70, 0.75] \cup [0.80, 0.85] \cup [0.90, 1.00]$), on voit facilement que $G \in \mathcal{G}$ et que $T_G = S$. Donc, en vertu des lemmes 1 et 2, $F \in \mathcal{F}$ et $S_F = S$.

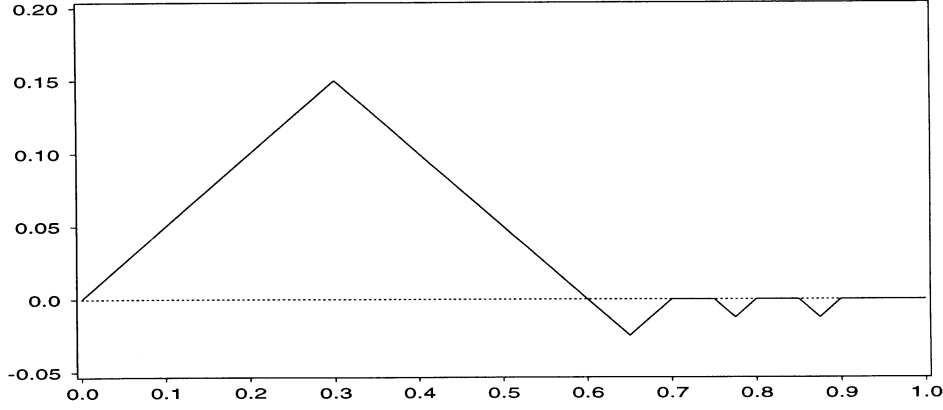


Figure 1. Le graphe de la fonction G introduite dans la démonstration du Théorème 3 (pour le cas $S = [0.00, 0.60] \cup [0.70, 0.75] \cup [0.80, 0.85] \cup [0.90, 1.00]$).

7. Démonstration du théorème 4. Fixons $F \in \mathcal{F}$. Comme on l'a mentionné plus haut, on a $0 \in S_F$ et $1 \in S_F$. Fixons m , un entier plus grand que 1 et montrons que $1/m \in S_F$. Si $F(j/m) - F((j-1)/m) = 1/m$ pour un certain $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, alors $1/m \in S_F$. Considérons le cas où $F(j/m) - F((j-1)/m) \neq 1/m$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Puisque $\sum_{j=1}^m (F(j/m) - F((j-1)/m)) = F(1) - F(0) = 1$, il existe des entiers $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq m$ tels que

$$F(j_1/m) - F((j_1-1)/m) < 1/m \text{ et } F(j_2/m) - F((j_2-1)/m) > 1/m.$$

La fonction $H(t) = F(t) - F(t - 1/m)$, $1/m \leq t \leq 1$, est continue. En vertu de l'équation précédente, on a $H(j_1/m) < 1/m$ et $H(j_2/m) > 1/m$. Donc, par continuité, il existe un t_o entre j_1/m et j_2/m tel que $H(t_o) = 1/m$, c'est-à-dire $F(t_o) - F(t_o - 1/m) = 1/m$. Il s'ensuit que $1/m \in S_F$.

8. Démonstration du théorème 5. Soit n un entier positif. Pour $k = 1, 2, \dots, n$, posons

$$I_k = [(k-1)/n, k/(n+1)] \text{ et } J_k = [k/(n+1), k/n].$$

Posons

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \sum_{k=1}^n w_{I_k}(t) - \sum_{k=1}^n w_{J_k}(t), \\ F_n(t) &= G_n(t) + t, \end{aligned}$$

où w_J est la fonction définie à la section 6. En inspectant le graphe de G_n (présenté à la figure 2 pour le cas $n = 4$), on voit facilement que $G_n \in \mathcal{G}$ et que $T_{G_n} = \cup_{k=1}^n I_k$. Donc, en vertu des lemmes 1 et 2, $F_n \in \mathcal{F}$ et $S_{F_n} = \cup_{k=1}^n I_k$. En particulier on a $S_{F_n} \cap (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) = \emptyset$.

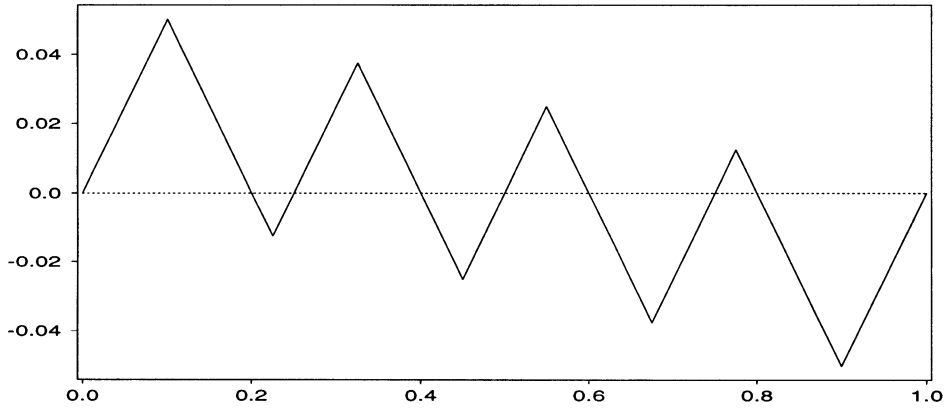


Figure 2. Le graphe de la fonction G_4 introduite dans la démonstration du Théorème 5.

Remarque. Le problème du coureur peut se généraliser de la façon suivante. Dénotons par $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-intervalles de l'intervalle $[0, 1]$ et par λ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour $F \in \mathcal{F}$, posons

$$A_F = \{(y, s) \in [0, 1]^2 : \exists I \in \mathcal{I} \text{ tel que } \lambda(I) = s \text{ et } F(I) = y\},$$

avec $F(I) = F(b) - F(a)$, où a est la borne inférieure de I et où b est la borne supérieure de I . En terme de course à pied, A_F est l'ensemble des couples (y, s) tels qu'il existe, à l'intérieur de l'intervalle de longueur unité couru en un temps unité, un sous-intervalle de longueur y franchi en un temps s . Il est alors naturel de poser la question suivante. Pour quels $A \subset [0, 1]^2$ existe-t-il un $F \in \mathcal{F}$ tel que $A_F = A$? L'ensemble S_F considéré dans cet article est la diagonale de l'ensemble A_F , c'est-à-dire

$$S_F = \{s \in [0, 1] : (s, s) \in A_F\}.$$

Remerciements. L'auteur tient à remercier: (a) les coureurs du PEPS de l'Université Laval, pour leur continuelle inspiration; (b) ses collègues Christian Genest, Bernard Hodgson, Claude Levesque et Jean-Claude Massé, pour de nombreuses discussions durant la rédaction de cet article; (c) deux arbitres anonymes, pour leur excellent travail.

English extended abstract. Let $\mathcal{F}$ be the set of all continuous increasing functions F defined on the interval $[0, 1]$ and satisfying $F(0) = 0$ and $F(1) = 1$. For $F \in \mathcal{F}$, let

$$S_F = \{s \in [0, 1] : \exists 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1 \text{ with } t_2 - t_1 = s \text{ and } F(t_2) - F(t_1) = s\}.$$

The purpose of this paper is to exhibit some non-trivial properties of the set S_F . In particular, we are interested in the following problem. Given a set $S \subset [0, 1]$, is there an $F \in \mathcal{F}$ such that $S_F = S$? This study is motivated by the following application. Imagine that $F(t)$ represents the position at time t of a runner who runs a unit interval in a unit time. Fix $0 \leq s \leq 1$. Then $s \in S_F$ if and only if there exists, within the unit interval, a subinterval of length s covered in time s . The following results are established.

Theorem 1. *For every $F \in \mathcal{F}$, the set S_F is closed.*

Theorem 2. *For every $F \in \mathcal{F}$, there is an $\epsilon > 0$ such that $[0, \epsilon] \subset S_F$.*

Theorem 3. *Let S be a closed subset of $[0, 1]$. If S contains the set $[0, 1/2] \cup \{1\}$, then there is an $F \in \mathcal{F}$ such that $S_F = S$.*

Theorem 4. *For every $F \in \mathcal{F}$, we have $\{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \subset S_F$.*

Theorem 5. *For every positive integer n , there is a function $F_n \in \mathcal{F}$ such that $S_{F_n} \cap (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) = \emptyset$.*

Theorems 1, 2 and 4 are proved using continuity arguments. Theorems 3 and 5 are obtained by simply constructing functions exhibiting the desired properties.

These results have an interesting probabilistic interpretation. Let $\mathcal{P}$ denote the set of atomless probability measures on the interval $[0, 1]$ (equipped with its Borel sigma-field). Then, the family $\mathcal{F}$ defined above is precisely the family of cumulative distribution functions of the probability measures belonging to $\mathcal{P}$. More precisely, if for $0 \leq x \leq 1$ we let $F_P(x) = P[[0, x]]$, then $F_P \in \mathcal{F}$ if and only if $P \in \mathcal{P}$. Therefore the results stated above can be phrased in terms of probability measures on $[0, 1]$. In particular, from Theorem 4 and Theorem 5 we obtain the following curious result:

Theorem 6.

$$\bigcap_{P \in \mathcal{P}} S_{F_P} = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Ballerini, S. Resnick, *Records from improving populations*, J. Appl. Probab. **22** (1985), 487–502.
2. P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley, New York, 1979.
3. J. F. Buoncristiani, D. E. Martin, *Factors affecting runners' marathon performance*, Chance **6** (1993), 24–30.
4. S. Chatterjee, S. Chatterjee, *New lamps for old: an exploratory analysis of running times in olympic games*, Appl. Statist. **31** (1982), 14–22.
5. L. De Haan, E. Verkade, *On extreme-value theory in the presence of a trend*, J. Appl. Probab. **24** (1987), 62–76.
6. J. B. Keller, *Optimal velocity in a race*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), 474–480.
7. B. B. Lloyd, *The energetics of running: an analysis of world records*, Advancement of Science **22** (1966), 515–530.
8. R. Margaria, P. Cerretelli, P. Aghemo, G. Sassi, *Energy cost of running*, J. Appl. Physiology **18** (1963), 367–370.
9. F. Péronnet, G. Thibault, *Mathematical analysis of running performance and world running records*, J. Appl. Physiology **67** (1989), 453–465.
10. P. S. Riegel, *Athletic records and human endurance*, Amer. Scientist **69** (1981), 285–290.
11. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis, Third Edition*, McGraw Hill, New York, 1976.
12. R. L. Smith, *Forecasting records by maximum likelihood*, J. Amer. Statist. Assoc. **83** (1988), 331–338.
13. R. L. Smith, J. E. Miller, *A non-Gaussian state space model and application to prediction of records*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **48** (1986), 79–88.
14. P. Tryfos, R. Blackmore, *Forecasting records*, J. Amer. Statist. Assoc. **80** (1985), 46–50.
15. A. J. Ward-Smith, *A mathematical theory of running, based on the first law of thermodynamics, and its application to the performance of world-class athletes*, J. Biomechanics **18** (1985), 337–349.
16. M. C. K. Yang, *On the distribution of the inter-record times in an increasing population*, J. Appl. Probab. **12** (1975), 148–154.

C. BÉLISLE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

UNIVERSITÉ LAVAL

SAINTÉ-FOY (QUÉBEC)

CANADA G1K 7P4