

LE THÉORÈME DE LA GOUTTE SANS CONVEXITÉ

JEAN GUILLERME

RÉSUMÉ. Soit A et B deux parties disjointes d'un espace normé. Si B est convexe, et sous des hypothèses complémentaires (en particulier, l'ensemble B doit être borné), le théorème de la goutte [2, 5] permet de trouver un point a dans A tel qu'il n'existe aucun (autre) point de A entre a et l'ensemble B . Nous établissons un résultat de ce type pour des ensembles B , non nécessairement convexes (qui peuvent être, dans certains cas, des réunions d'ensembles convexes) ou non nécessairement bornés.

ABSTRACT. Let A and B be two disjoint sets in a normed space, with B convex. Under suitable assumptions (in particular the convexity and the boundedness of B), the drop theorem [2, 5] proves the existence of a point a in A such that there is no other point of A between a and B . We prove a result of this kind for sets B not necessarily convex (which may be, in certain cases, union of convex sets), or not necessarily bounded.

Notre but est d'obtenir des résultats du type «théorème de la goutte» pour une plus large classe d'ensembles que celle habituellement rencontrée [2, 5, 7]. Pour ce faire, nous utiliserons des remarques géométriques simples et le principe d'Ekeland [4].

Soit (X, d) un espace métrique et soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$, la droite numérique achevée. Pour tout point x de X , le pétale issu de x et relatif à la fonction f (on dira le f -pétale issu de x) est défini [6, 7] comme étant l'ensemble :

$$F_f(x) := \{ y \in X \mid f(y) + d(y, x) \leq f(x) \}.$$

On peut alors rappeler le principe variationnel d'Ekeland [1, 4] sous sa forme la plus simple :

Théorème 1. Soit (X, d) un espace métrique complet et soit f une fonction semi-continue inférieurement, bornée inférieurement, définie sur X et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors, quel que soit le point x de X tel que $f(x) < +\infty$, on peut trouver un point $\bar{x}$ dans $F_f(x)$ tel que $F_f(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.

Dans la suite, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé et A et B sont deux parties de E . On utilisera les notations suivantes : $[uv]$, le segment joignant les deux points u et v , est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{u, v\}$; $D(x, B)$, la «goutte» de x vers B , est

Reçu le 18 juillet 1993 et, sous forme définitive, le 23 novembre 1993.

l'ensemble $\{\alpha x + (1 - \alpha)b \mid b \in B, \alpha \in [0, 1]\}$; $d_B(x) := \inf\{d(x, b) \mid b \in B\}$ est la distance de x à B , avec $d(u, v) := \|u - v\|$; $d(A, B) := \inf\{d(u, v) \mid u \in A, v \in B\}$ est la distance entre les ensembles A et B ; enfin $\delta(B) := \sup\{d(u, v) \mid u \in B, v \in B\}$ est le diamètre de B .

Définition 1. Soit x un point de E . On dit que le sous-ensemble B de E est vu de x comme un ensemble convexe (ou que B est presque convexe vu de x) si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout point y dans B , on peut trouver deux points h et z dans B tel que :

(1) h est la projection de x sur B à ε près : $d_B(x) \leq \|x - h\| \leq d_B(x) + \varepsilon$;

(2) y appartient au segment $[xz]$ et le segment $[hz]$ est contenu dans B .

L'ensemble B est dit presque convexe vu de A s'il est presque convexe vu de n'importe quel point de l'ensemble A .

Exemples. 1) Un ensemble convexe est presque convexe vu de n'importe quel point et un ensemble étoilé autour de x est presque convexe vu de x , mais les réciproques ne sont pas nécessairement vraies, comme le montre l'exemple suivant. Soit

$$V := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y \leq \frac{1}{2}|x| + 1 \text{ et } (|x|, y) \neq (1, \frac{3}{2}) \}.$$

L'ensemble V n'est pas convexe, mais il est presque convexe vu de tout point de $\{0\} \times \mathbb{R}$ et V n'est pas étoilé autour de $(0, 1)$ mais cet ensemble est presque convexe vu de ce point.

2) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles convexes de E et soit $B := \cup_{i \in I} C_i$. Soit A l'ensemble des points équidistants de chaque ensemble C_i :

$$A := \{ x \in E \mid d(x, C_i) = d(x, C_j) \text{ pour tout } i, j \text{ dans } I \}.$$

Il est alors facile de vérifier que B est presque convexe vu de A (lorsque ce dernier ensemble est non vide, naturellement).

Lemme 2. Soit B un ensemble borné, presque convexe vu d'un point x tel que $d_B(x) > 0$. Alors, quel que soit le point u dans la goutte $D(x, B)$, on a :

$$d_B(x) - d_B(u) \geq \lambda(x)\|x - u\| \quad \text{avec} \quad \lambda(x) = d_B(x)/(d_B(x) + \delta(B)) > 0.$$

Démonstration. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et un point $u \neq x$ dans $D(x, B)$; choisissons un point y dans B tel que u appartienne au segment $[xy]$ et considérons les points h, z associés à ε, x et y par l'hypothèse faite sur B ; u appartient évidemment au segment $[xz]$ et donc :

$$\text{pour un certain } \alpha \in [0, 1], \quad u = \alpha x + (1 - \alpha)z. \quad (1)$$

Soit p (resp. q) la projection de u sur $[hz]$ (resp. $[xh]$) parallèlement à $[xh]$ (resp. $[hz]$) ; ainsi, on a $p = \alpha h + (1 - \alpha)z$ et $q = \alpha x + (1 - \alpha)h$, d'où l'on tire :

$$u - p = \alpha(x - h). \quad (2)$$

On peut maintenant écrire les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{d_B(x) - d_B(u)}{\|x - u\|} &\geq \frac{\|x - h\| - \varepsilon - \|u - p\|}{\|x - u\|} && [\text{car } d_B(u) \leq \|u - p\|] \\
 &= \frac{\|x - h\| - \varepsilon - \alpha\|x - h\|}{(1 - \alpha)\|x - z\|} && [\text{par (1) et (2)}] \\
 &\geq \frac{(1 - \alpha)d_B(x) - \varepsilon}{(1 - \alpha)(d_B(x) + \varepsilon + \delta(B))} && [\text{car } \|x - z\| \leq \|x - h\| + \|h - z\|] \\
 &\leq d_B(x) + \varepsilon + \delta(B).
 \end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré puisque ε est arbitraire. $\square$

Lemme 3. *Soit B un ensemble borné, presque convexe vu de l'ensemble A . On suppose $d(A, B) > 0$. Il existe alors un nombre réel $\lambda > 0$ tel que, quel que soit le point x dans A et le point u dans la goutte $D(x, B)$, l'inégalité suivante soit satisfaite :*

$$d_B(x) - d_B(u) \geq \lambda\|x - u\|.$$

Démonstration. Comme l'application $t \mapsto \frac{t}{t + \delta(B)}$ est croissante sur $[d(A, B), +\infty[$, il suffit de choisir $\lambda := \inf\{\lambda(x) \mid x \in A\} = d(A, B)/(d(A, B) + \delta(B))$. $\square$

Avec le nombre λ que l'on vient de trouver, désignons par $P_{B,\lambda}(x)$ le pétale, dans E , issu de x et relatif à la fonction $\lambda^{-1}d_B$:

$$P_{B,\lambda}(x) = \{u \in E \mid d_B(u) + \lambda d(u, x) \leq d_B(x)\}.$$

Alors le lemme 3 nous dit exactement que, quel que soit le point x dans A , la goutte $D(x, B)$ est contenue dans le pétale $P_{B,\lambda}(x)$. Avec cette remarque en tête, si nous choisissons un point x dans A , l'application du théorème d'Ekeland à l'ensemble $X := A \cap D(x, B)$, au point x et à la fonction $\lambda^{-1}d_B$ (restreinte à X), nous conduit immédiatement au théorème suivant :

Théorème 4. *Soit A une partie complète de E . On suppose $d(A, B) > 0$ et l'ensemble B fermé, borné et presque convexe vu de A . Alors, quel que soit le point x dans A , on peut trouver un point $\bar{x}$ dans $A \cap D(x, B)$ tel que $A \cap D(x, B) \cap D(\bar{x}, B) = \{\bar{x}\}$.*

Remarque 1. Si B est convexe, $D(x, B) \cap D(\bar{x}, B) = D(\bar{x}, B)$, et le théorème ci-dessus est exactement le théorème de la goutte pour les ensembles convexes fermés bornés [3, 5]; c'est le résultat classique de Daneš [2] si B est une boule. Voir aussi [6].

Remarque 2. La propriété cruciale pour obtenir un théorème de la goutte est que « les gouttes sont contenues dans les pétales » ; mais n'importe quel pétale $P_{B,\beta}(x)$ contient toujours l'ensemble B et le point x si B est borné et β suffisamment petit. De telle sorte que si la fonction $u \mapsto d_B(u) + \beta d(u, x)$ est quasi-convexe (ce qui est évidemment le cas si B est convexe!) ou si le pétale $P_{B,\beta}(x)$ est convexe, on obtiendra directement $D(x, B) \subset P_{B,\beta}(x)$. Mais la convexité du pétale, même lorsque B est presque convexe vu de x , n'est pas une condition nécessaire pour obtenir l'inclusion souhaitée, comme

le montre l'exemple suivant. On considère, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $B := \{(u, |u|) \mid |u| \in [0, 2]\}$, le point $x := (0, 1)$ et un nombre réel β suffisamment petit ; alors les deux points $(-2, 2)$ et $(2, 2)$ appartiennent à $P_{B, \beta}(x)$ mais pas le point $(0, 2)$.

Remarque 3. Il est généralement impossible, dans le théorème 4, de trouver un point $\bar{x}$ dans $D(x, B)$ tel que $A \cap D(\bar{x}, B) = \{\bar{x}\}$, et non pas seulement tel que $A \cap D(x, B) \cap D(\bar{x}, B) = \{\bar{x}\}$. Considérons en effet, dans $\mathbb{R}^2$, les ensembles :

$$B := [ab] \cup [cd] \quad \text{avec} \quad a := (-3, 2), \quad b := -a, \quad c := (-3, -2), \quad d := -c ;$$

et

$A := \{e\} \cup [fg] \cup \{h\}$ avec $e := (0, 2)$, $f := (-2, 0)$, $g := (-1, 0)$, $h := (0, -\frac{1}{4})$. Il est alors facile de voir que, pour tout point u dans $A \cap D(e, B)$, l'ensemble $A \cap D(u, B)$ contient toujours au moins les deux points g et h , si $u \neq e$ et les deux points e et g , si $u = e$.

Nous allons maintenant montrer que l'hypothèse « B borné» peut être facilement affaiblie. Pour cela, introduisons la notion suivante :

Définition 2. Soit A et B deux sous-ensembles de E . Le sous-ensemble B est dit être vu de A comme un ensemble borné (ou être borné vu de A) s'il existe un sous-ensemble borné B' de B tel que, quel que soit le point x de A , les traces sur A des deux gouttes $D(x, B)$ et $D(x, B')$ soient identiques, c'est-à-dire $A \cap D(x, B) = A \cap D(x, B')$.

Avec cette notion, nous obtenons :

Théorème 5. Soit A une partie complète de E . On suppose $d(A, B) > 0$ et l'ensemble B fermé, convexe et borné vu de A . Alors, quel que soit le point x dans A , on peut trouver un point $\bar{x}$ dans $A \cap D(x, B)$ tel que $A \cap D(\bar{x}, B) = \{\bar{x}\}$.

Démonstration. Soit B' un sous-ensemble borné de B tel que $A \cap D(x, B) = A \cap D(x, B')$ pour tout x dans A . Fixons un point x_0 dans A et soit B_0 l'enveloppe convexe fermée de B' ; on peut alors appliquer le théorème 2 aux ensembles A et B_0 et donc trouver un point $\bar{x}_0$ dans $A \cap D(x_0, B_0)$ tel que $A \cap D(x_0, B_0) \cap D(\bar{x}_0, B_0) = \{\bar{x}_0\}$. Comme $B' \subset B_0 \subset B$, on a $A \cap D(x, B_0) = A \cap D(x, B)$ pour tout point x de A ; de plus, on a $D(x_0, B_0) \cap D(\bar{x}_0, B_0) = D(\bar{x}_0, B_0)$ car B_0 est convexe et $\bar{x}_0$ appartient à $D(x_0, B_0)$. La démonstration est ainsi complète. $\square$

Le théorème 5 peut être utilisé par exemple lorsque l'ensemble B est l'épigraphe d'une fonction convexe (pourvu que l'hypothèse «borné vu de A » soit satisfaite). Pour conclure, remarquons qu'il serait possible de donner des énoncés un peu techniques pour pouvoir considérer des ensembles B qui soient à la fois presque convexes vus de A et bornés vus de A .

English extended abstract. Our aim is to use some geometrical remarks, together with the Ekeland principle, in order to obtain results of “drop type” for a larger class of sets.

Let (X, d) be a metric space and f a function from X into $\overline{\mathbb{R}}$, the set of extended real numbers. For every point x of X , we define the petal $[6, 7]$ from x to f to be the set:

$$F_f(x) := \{y \in X \mid f(y) + d(y, x) \leq f(x)\}.$$

We can now recall the classical Ekeland's variational principle [1, 4] in its simplest form:

Theorem 1. *Let (X, d) be a complete metric space and let f be a lower bounded, lower semi-continuous function from X into $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Then, for every x in X with $f(x) < +\infty$, it is possible to find a point $\bar{x}$ in $F_f(x)$ such that $F_f(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.*

In the sequel, $(E, \|\cdot\|)$ is a normed space and A and B two subsets of E . We use the following notations: $[uv]$, the segment joining the two points u and v , is the convex hull of the set $\{u, v\}$; $D(x, B)$, the “drop” from x to B , is the set $\{\alpha x + (1 - \alpha)b \mid b \in B, \alpha \in [0, 1]\}$; $d_B(x) := \inf\{d(x, b) \mid b \in B\}$ is the distance between x and B , with $d(u, v) := \|u - v\|$; $d(A, B) := \inf\{d(u, v) \mid u \in A, v \in B\}$ is the distance between the two sets A and B ; $\delta(B) := \sup\{d(u, v) \mid u \in B, v \in B\}$ is the diameter of B .

Definition 1. Let x be a point of E . The subset B is said to be seen from x like a convex set (or B is said to be nearly convex from x) if, for every $\varepsilon > 0$ and every point y in B , it is possible to find two points h and z in B such that:

- (1) h is a projection of x on B up to ε : $d_B(x) \leq \|x - h\| \leq d_B(x) + \varepsilon$;
- (2) y belongs to the segment $[xz]$ and the segment $[hz]$ is contained in B .

A set B is said to be nearly convex from A if it is nearly convex from every point of A .

Some examples are given. In particular let $(C_i)_{i \in I}$ be a family of convex sets in E and $B := \cup_{i \in I} C_i$; then the set B is nearly convex from every point which is at the same distance from every set C_i ($i \in I$).

With the help of simple geometrical lemmas, we can prove:

Theorem 2. *Let A be a complete subset of E . Suppose $d(A, B) > 0$ and B closed, bounded and nearly convex from A . Then, for every point x in A , it is possible to find a point $\bar{x}$ in $A \cap D(x, B)$ such that $A \cap D(x, B) \cap D(\bar{x}, B) = \{\bar{x}\}$.*

When the set B is convex, $D(x, B) \cap D(\bar{x}, B) = D(\bar{x}, B)$, and the above theorem is exactly the drop theorem for closed convex bounded sets [3, 5]; it is the classical result of Daneš [2] if B is a ball. See also [6] for a petal theorem. But if the set B is not convex, an example allows to see that it is generally impossible, in the preceeding generalized drop theorem, to find $\bar{x}$ in $D(x, B)$ such that $A \cap D(\bar{x}, B) = \{\bar{x}\}$, in place of $A \cap D(x, B) \cap D(\bar{x}, B) = \{\bar{x}\}$.

We prove also that the boundedness assumption of the set B can be easily weakened. In order to do this weakening, we introduce the following notion:

Definition 2. Let A and B be two subsets of E . The subset B is said to be seen from the subset A as a bounded set (or to be bounded from A) if there exists a bounded subset B' of B such that, for every point x in A , the trace on A of the two drops $D(x, B)$ and $D(x, B')$ are equal, i.e. $A \cap D(x, B) = A \cap D(x, B')$.

With this notion, we obtain:

Theorem 3. *Let A be a complete subset of E . Suppose $d(A, B) > 0$ and B closed, convex and bounded from A . Then, for every point x in A , it is possible to find a point $\bar{x}$ in $A \cap D(x, B)$ such that $A \cap D(\bar{x}, B) = \{\bar{x}\}$.*

Theorem 3 can be used for instance when the set B is the epigraph of a convex function, provided the assumption of boundedness from A holds. To conclude, let us remark that it would be possible to give some technical statements related to sets B which are nearly convex from A and also bounded from A .

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Brøndsted, *On a lemma of Bishop and Phelps*, Pacific J. Math. **55** (1974), 335–341.
2. J. Daneš, *A geometric theorem useful in nonlinear functional analysis*, Boll. Un. Mat. Ital. **6** (1972), 369–375.
3. J. Daneš, *Equivalence of some geometric and related results of nonlinear functional analysis*, Comment. Math. Univ. Carolin. **26** (1985), 443–454.
4. I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **1** (1979), 443–475.
5. P. G. Georgiev, *The strong Ekeland variational principle, the strong drop theorem and applications*, J. Math. Anal. Appl. **131** (1988), 1–21.
6. W. Oettli and M. Théra, *Equivalents of Ekeland's principle*, Bull. Austral. Math. Soc. **48** (1993), 385–392.
7. J. P. Penot, *The drop theorem, the petal theorem and Ekeland's variational principle*, Non-linear Anal. **10** (1986), 813–822.

J. GUILLERME
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES DE LIMOGES
123, AV. ALBERT THOMAS
87060 LIMOGES CEDEX (FRANCE)