

POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES AVEC POINTS CRITIQUES DE MULTIPLICITÉS RESPECTIVES PRÉDÉTERMINÉES

MICHEL ARSENAULT

RÉSUMÉ. Soient $\vec{\nu}$ un vecteur dont les composantes $\nu_1, \dots, \nu_n$ sont des entiers naturels tels que $\sum_{k=1}^n \nu_k$ soit pair, disons $2N$, et $y_0, y_1, \dots, y_n$ des nombres réels satisfaisant certaines conditions naturelles. Alors, il existe un et un seul polynôme trigonométrique t d'ordre N avec $t(0) = y_0$ et un système de nombres $0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi$ tels que $t(\theta) - y_k$ possède un zéro de multiplicité $\nu_k + 1$ en $\theta = \varphi_k$, $k = 1, \dots, n$. En fait, ce résultat est obtenu ici comme corollaire d'un théorème plus général.

ABSTRACT. Given a vector $\vec{\nu}$ whose components $\nu_1, \dots, \nu_n$ are positive integers such that $\sum_{k=1}^n \nu_k$ is even, say $2N$, and real numbers $y_0, y_1, \dots, y_n$ satisfying some natural conditions, there exist a unique trigonometric polynomial t of order N with $t(0) = y_0$ and numbers $0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi$ such that $t(\theta) - y_k$ has a zero of multiplicity $\nu_k + 1$ at $\theta = \varphi_k$, $k = 1, \dots, n$. In fact, this result is obtained here as a corollary of a more general theorem.

1. Introduction. Le théorème suivant a été démontré par C. Davis [3].

Théorème A. Soient $y_0, \dots, y_n$ des nombres réels satisfaisant

$$(-1)^k (y_k - y_{k-1}) < 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Alors, il existe un et un seul polynôme p de degré n de même qu'un système associé de points $-1 =: x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n := 1$ tels que

$$\begin{aligned} p(x_k) &= y_k, & k &= 0, 1, \dots, n, \\ p'(x_k) &= 0, & k &= 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

L'analogie de ce théorème pour les polynômes trigonométriques a été prouvé par C. H. Fitzgerald et L. L. Schumaker [4]. Voici leur résultat :

Reçu le 15 juillet 1993 et, sous forme définitive, le 3 mars 1994.

Théorème B. Soient $y_0, \dots, y_{2n}$ des nombres réels satisfaisant aux conditions

$$(-1)^k (y_k - y_{k-1}) < 0, \quad k = 1, \dots, 2n, \quad \text{et} \quad y_{2n} < y_0.$$

Alors, il existe un et un seul polynôme trigonométrique t d'ordre n de même qu'un système associé de points $0 =: \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{2n} < 2\pi$ tels que

$$\begin{aligned} t(\varphi_k) &= y_k, & k &= 0, 1, \dots, 2n, \\ t'(\varphi_k) &= 0, & k &= 1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Une généralisation importante du Théorème A a été découverte par B. D. Bojanov qui a démontré le résultat suivant :

Théorème C [2, Cor. 1]. Étant donnés $N \in \mathbb{N}$ et $\vec{\nu}$ un vecteur dont les composantes $\nu_1, \dots, \nu_n$ sont des entiers naturels satisfaisant $N = \sum_{k=1}^n \nu_k$, posons $\sigma_{n+1} := 0$ et $\sigma_k := \sum_{j=k}^n \nu_j$, $k = 1, \dots, n$. Soient $y_0, \dots, y_{n+1}$ des nombres réels satisfaisant

$$(-1)^{\sigma_k} (y_k - y_{k-1}) > 0, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Alors, pour tout intervalle $[a, b]$ donné, il existe un et un seul polynôme p de degré $N+1$ de même qu'un système associé de points $a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} := b$ tels que

$$\begin{aligned} p(x_k) &= y_k, & k &= 0, 1, \dots, n+1, \\ p^{(j)}(x_k) &= 0, & j &= 1, \dots, \nu_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

R. B. Barrar et H. L. Loeb [1] ont généralisé le résultat précédent en considérant des systèmes de Tschebyscheff *non-périodiques*.

On démontrera ici, pour les polynômes trigonométriques, l'analogie suivant du Théorème C :

Théorème 1. Étant donnés $N \in \mathbb{N}$ et $\vec{\nu}$ un vecteur dont les composantes $\nu_1, \dots, \nu_n$ sont des entiers naturels satisfaisant $2N = \sum_{k=1}^n \nu_k$, on définit $\sigma_{n+1} := 0$ et $\sigma_k := \sum_{j=k}^n \nu_j$, $k = 1, \dots, n$. Soient $y_0, \dots, y_n$ des nombres réels satisfaisant aux conditions

$$(-1)^{\sigma_k} (y_k - y_{k-1}) > 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{et} \quad y_n < y_0.$$

Alors, il existe un et un seul polynôme trigonométrique t d'ordre N de même qu'un système associé de points $0 =: \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi$ tels que

$$\begin{aligned} t(\varphi_k) &= y_k, & k &= 0, 1, \dots, n, \\ t^{(j)}(\varphi_k) &= 0, & j &= 1, \dots, \nu_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

On obtiendra le Théorème 1 comme corollaire du résultat suivant :

Théorème 2. Soient $X \in (0, 2\pi]$, $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{N}$, $e_1, \dots, e_{m+1}$ des nombres réels strictement positifs et p une fonction positive continue, 2π -périodique, n'étant identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de $[0, X]$. Alors, il existe $\theta_1, \dots, \theta_m$ avec $0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < X$ et $A > 0$ satisfaisant

$$\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} A p(\theta) \prod_{j=1}^m \left(\sin \frac{\theta - \theta_j}{2} \right)^{\mu_j} d\theta = (-1)^{\tau_{m,k}} e_k, \quad k = 1, \dots, m+1,$$

où $\theta_0 := 0$, $\theta_{m+1} := X$, $\tau_{m,m+1} := 0$ et $\tau_{m,k} := \sum_{j=k}^m \mu_j$, $k = 1, \dots, m$. De plus, de tels nombres $A, \theta_1, \dots, \theta_m$ sont uniques.

Montrons pour l'instant que le Théorème 2 est suffisant pour obtenir le Théorème 1. En effet, si l'on applique le Théorème 2 avec les paramètres

$$\begin{cases} p(\theta) \equiv 1, & X := 2\pi, & m := n, \\ e_k := |y_k - y_{k-1}|, & k = 1, \dots, n, \\ e_{n+1} := y_0 - y_n, \\ \mu_k := \nu_k, & k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

on obtient

$$\tilde{t}(\theta) = A \prod_{j=1}^n \left(\sin \frac{\theta - \psi_j}{2} \right)^{\mu_j},$$

avec $0 =: \psi_0 < \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_n < \psi_{n+1} := 2\pi$, satisfaisant

$$\begin{aligned} \int_{\psi_{k-1}}^{\psi_k} \tilde{t}(\theta) d\theta &= (-1)^{\tau_{n,k}} e_k \\ &= (-1)^{\sigma_k} |y_k - y_{k-1}| \\ &= \begin{cases} y_k - y_{k-1}, & k = 1, \dots, n \\ y_0 - y_n, & k = n+1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{k=1}^n \mu_k = \sum_{k=1}^n \nu_k = 2N$, utilisant l'identité

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos(A - B) - \cos(A + B) \},$$

on montre aisément que $\tilde{t}$ est un polynôme trigonométrique d'ordre N . Ce polynôme trigonométrique est de terme constant nul, car

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tilde{t}(\theta) d\theta &= \sum_{k=1}^{n+1} \int_{\psi_{k-1}}^{\psi_k} \tilde{t}(\theta) d\theta \\ &= \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) + (y_0 - y_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction

$$t(x) := y_0 + \int_0^x \tilde{t}(\theta) d\theta$$

est donc un polynôme trigonométrique d'ordre N . De plus, des relations

$$\begin{aligned} t(0) &= y_0, \\ t(\psi_k) &= t(\psi_{k-1}) + \int_{\psi_{k-1}}^{\psi_k} \tilde{t}(\theta) d\theta, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

et du fait que $t'(x) = \tilde{t}(x)$ possède un zéro de multiplicité ν_k en ψ_k , $k = 1, \dots, n$, il suit qu'il suffit de poser $\vartheta_k := \psi_k$, $k = 1, \dots, n$, pour constater que t tel que défini ci-haut vérifie la conclusion du Théorème 1.

L'unicité découle du fait que l'équation

$$u(x) = y_0 + \int_0^x u'(\theta) d\theta$$

entraîne que la dérivée de tout polynôme trigonométrique vérifiant la conclusion du Théorème 1, vérifie le Théorème 2 avec les valeurs (1) des paramètres.

2. Lemmes. Posons

$$\begin{aligned} F_k(A, \theta_1, \dots, \theta_m; X, p) &:= \\ &\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} A p(\theta) \prod_{j=1}^m \left(\sin \frac{\theta - \theta_j}{2} \right)^{\mu_j} d\theta, \quad k = 1, \dots, m+1, \end{aligned}$$

où $X, \theta_0, \theta_{m+1}, \mu_j$ et p sont tels que dans l'énoncé du Théorème 2. On a :

Lemme 1. *Le jacobien*

$$J(A, \theta_1, \dots, \theta_m; X, p) := \frac{\partial(F_1, \dots, F_{m+1})}{\partial(A, \theta_1, \dots, \theta_m)}$$

est non-nul pourvu que $A \neq 0$ et $0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < X$.

En effet, le jacobien $J(A, \theta_1, \dots, \theta_m; X, p)$ est égal à

$$\begin{vmatrix} \int_0^{\theta_1} \omega_0(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta & \int_0^{\theta_1} A \omega_1(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta & \dots & \int_0^{\theta_1} A \omega_m(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \omega_0(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta & \int_{\theta_1}^{\theta_2} A \omega_1(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta & \dots & \int_{\theta_1}^{\theta_2} A \omega_m(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\theta_m}^X \omega_0(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta & \int_{\theta_m}^X A \omega_1(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta & \dots & \int_{\theta_m}^X A \omega_m(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta \end{vmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}\omega(\theta) &:= \prod_{j=1}^m \left(\sin \frac{\theta - \theta_j}{2} \right)^{\mu_j - 1}, \\ \omega_0(\theta) &:= \prod_{j=1}^m \sin \frac{\theta - \theta_j}{2}, \\ \omega_k(\theta) &:= -\frac{\mu_k}{2} \cos \frac{\theta - \theta_k}{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \sin \frac{\theta - \theta_j}{2}, \quad k \neq 0.\end{aligned}$$

Si on avait $J(A, \theta_1, \dots, \theta_m; X, p) = 0$, les colonnes du déterminant ci-haut seraient linéairement dépendantes. Il existerait donc des nombres réels $b_0, \dots, b_m$ non tous nuls de façon à ce que $Q(\theta) := b_0 \omega_0(\theta) + \dots + b_m \omega_m(\theta)$ satisfasse

$$\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} Q(\theta) \omega(\theta) p(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, \dots, m+1.$$

La fonction $p(\theta) \omega(\theta)$ ayant signe constant dans (θ_{k-1}, θ_k) , on en déduit alors l'existence de nombres $\xi_k \in (\theta_{k-1}, \theta_k)$ avec $Q(\xi_k) = 0$, $k = 1, \dots, m+1$.

Considérons maintenant la classe V_m des fonctions u de la forme

$$u(\theta) = a_{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{m}{2}i\theta} + a_{-(\frac{m}{2}-1)} e^{-(\frac{m}{2}-1)i\theta} + \dots + a_{\frac{m}{2}} e^{\frac{m}{2}i\theta},$$

où $i^2 = -1$ et $a_\lambda \in \mathbb{C}$ satisfont $a_\lambda = \overline{a_{-\lambda}}$, $\lambda = -\frac{m}{2}, -(\frac{m}{2}-1), \dots, \frac{m}{2}$. On remarque aisément que V_m est un espace vectoriel de dimension $m+1$ sur $\mathbb{R}$. Montrons que cet espace vectoriel est engendré par $\{\omega_k(\theta)\}_{k=0}^m$. D'abord, il est facile de voir que $\omega_k \in V_m$, $k = 0, \dots, m$. Ensuite, si $u \in V_m$ est donnée, considérons

$$s(\theta) := u(\theta) - \sum_{j=1}^m \frac{u(\theta_j)}{\omega_j(\theta_j)} \omega_j(\theta).$$

C'est un élément de V_m qui possède $\theta_1, \dots, \theta_m$ comme zéros. Maintenant,

$$r(\theta) := s(\theta) - \frac{s(\theta_{m+1})}{\omega_0(\theta_{m+1})} \omega_0(\theta),$$

où $\theta_{m+1} \in (0, X)$ est distinct de $\theta_1, \dots, \theta_m$, est un élément de V_m qui possède les $m+1$ zéros distincts $\theta_1, \dots, \theta_{m+1}$ dans $[0, X) \subseteq [0, 2\pi)$. Or, une fonction $u \in V_m$ qui n'est pas identiquement nulle, possède au plus m zéros, car

$$e^{\frac{m}{2}i\theta} u(\theta) = P(e^{i\theta}),$$

où P est un polynôme de degré au plus m . Donc, $r(\theta) \equiv 0$, d'où

$$u(\theta) = \alpha_0 \omega_0(\theta) + \sum_{j=1}^m \alpha_j \omega_j(\theta),$$

où $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, m$. On en tire que $V_m = [\omega_0, \dots, \omega_m]$ et, par conséquent, que $b_0 = \dots = b_m = 0$, une contradiction, ce qui démontre le Lemme 1.

Le lemme suivant impliquant des dérivées implicites simplifiera certains calculs :

Lemme 2. Soient $y_1(x), \dots, y_q(x)$ des fonctions définies implicitement par le système

$$\begin{cases} F_1(y_1, \dots, y_q, x) = c_1 \\ \vdots \\ F_q(y_1, \dots, y_q, x) = c_q, \end{cases}$$

où $c_j \in \mathbb{R}$ et $F_j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{q+1})$, $j = 1, \dots, q$, et $\frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)} \neq 0$.

Soit $G : \mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{q+1})$, alors

$$\begin{aligned} G'(x) &:= \frac{d}{dx} G(y_1(x), \dots, y_q(x), x) \\ &= \frac{\partial(F_1, \dots, F_q, G)}{\partial(y_1, \dots, y_q, x)} \cdot \frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)}. \end{aligned}$$

En effet, en vertu du «Théorème des fonctions implicites» (voir, par exemple, [5], Chap. 17, Th. 17.3.1), on a que $y_1, \dots, y_q$ sont des fonctions continûment différentiables de x . De plus, leur dérivée est donnée par

$$\frac{\partial y_k}{\partial x} = -\frac{\det J_k}{\det J}, \quad k = 1, \dots, q,$$

où J est la matrice jacobienne de $F_1, \dots, F_q$ par rapport aux variables $y_1, \dots, y_q$ et J_k , la matrice obtenue de J en remplaçant sa k -ième colonne par les dérivées des F_j par rapport à x .

Effectuant une dérivée en chaîne, on obtient

$$J \cdot G'(x) = -\sum_{k=1}^q \frac{\partial G}{\partial y_k} \det J_k + J \cdot \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Or, il se trouve que, si on développe le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_q} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_q}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_q}{\partial y_q} & \frac{\partial F_q}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial y_q} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}$$

selon sa dernière rangée, on obtient

$$\Delta = \sum_{k=1}^q (-1)^{q+1+k} M_k \frac{\partial G}{\partial y_k} + J \cdot \frac{\partial G}{\partial x},$$

où M_k est le déterminant d'une matrice obtenue de J_k par $q - k$ transpositions de colonnes, d'où $M_k = (-1)^{q-k} \det J_k$. On a donc $J \cdot G'(x) = \Delta$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Démonstration du Théorème 2. On procèdera par induction sur m . Commençons par le cas $m = 1$. Pour X et p comme précédemment et $\mu \in \mathbb{N}$, considérons

$$f(\xi) := \frac{\int_0^\xi \left(\sin \frac{\theta - \xi}{2} \right)^\mu p(\theta) d\theta}{\int_\xi^X \left(\sin \frac{\theta - \xi}{2} \right)^\mu p(\theta) d\theta}.$$

Il est clair que f est continue sur $(0, X)$. De plus,

$$\lim_{\xi \downarrow 0} f(\xi) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\xi \uparrow X} |f(\xi)| = \infty.$$

Il existe donc $\theta_1 \in (0, X)$ pour lequel $|f(\theta_1)| = e_1/e_2$. Il suffit ensuite de choisir $A > 0$ de façon à ce que

$$A \int_0^{\theta_1} \left(\sin \frac{\theta - \theta_1}{2} \right)^\mu p(\theta) d\theta = (-1)^\mu e_1,$$

pour avoir automatiquement aussi

$$A \int_{\theta_1}^X \left(\sin \frac{\theta - \theta_1}{2} \right)^\mu p(\theta) d\theta = e_2.$$

Également,

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_\xi^X \left(\sin \frac{\theta - \xi}{2} \right)^\mu p(\theta) d\theta \right\}^2 f'(\xi) \\ &= \int_\xi^X \left(\sin \frac{\theta - \xi}{2} \right)^\mu p(\theta) d\theta \cdot \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \left(\sin \frac{\theta - \xi}{2} \right)^\mu p(\theta) d\theta \\ &\quad - \int_0^\xi \left(\sin \frac{\theta - \xi}{2} \right)^\mu p(\theta) d\theta \cdot \frac{d}{d\xi} \int_\xi^X \left(\sin \frac{\theta - \xi}{2} \right)^\mu p(\theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{A} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial A} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial A} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} \end{array} \right|_{\theta_1=\xi} \end{aligned}$$

est non-nul en vertu du Lemme 1. La fonction f est donc monotone, d'où l'unicité de θ_1 , de laquelle l'unicité de A découle facilement. Le cas $m = 1$ est donc vérifié.

Supposons maintenant que le Théorème 2 soit vérifié pour $m = q - 1$, pour toute valeur de $X \in (0, 2\pi]$ et des paramètres $\mu_1, \dots, \mu_{q-1} \in \mathbb{N}$, de même que pour toute fonction p positive, continue, de période 2π sur $\mathbb{R}$ n'étant identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de $[0, 2\pi]$.

Soient $Y \in (0, 2\pi]$ et $\xi \in (0, Y)$ fixés. Utilisant alors l'hypothèse d'induction avec $X := \xi$ et la fonction de poids $p_\xi(\theta) := p(\theta) \left| \sin \frac{\theta - \xi}{2} \right|^{\mu_q}$, on en tire l'existence et

l'unicité de nombres $A(\xi) > 0$ et $0 < \theta_1(\xi) < \dots < \theta_{q-1}(\xi) < \xi$ satisfaisant

$$A(\xi) \int_{\theta_{k-1}(\xi)}^{\theta_k(\xi)} p_\xi(\theta) \prod_{j=1}^{q-1} \left(\sin \frac{\theta - \theta_j(\xi)}{2} \right)^{\mu_j} d\theta = (-1)^{\tau_{q-1,k}} e_k, \quad k = 1, \dots, q, \quad (2)$$

avec $\theta_0(\xi) = 0$ et $\theta_q(\xi) = \xi$. À partir de ce dernier système d'équations et du Lemme 1, nous obtenons du «Théorème des fonctions implicites» que les fonctions $A(\xi), \theta_1(\xi), \dots, \theta_{q-1}(\xi)$ sont continûment différentiables dans $(0, Y)$. Récrivons les équations (2) sous la forme

$$\begin{aligned} F_k(\xi) &:= F_k(A(\xi), \theta_1(\xi), \dots, \theta_{q-1}(\xi), \xi) \\ &:= A(\xi) \int_{\theta_{k-1}(\xi)}^{\theta_k(\xi)} p(\theta) \left(\sin \frac{\theta - \xi}{2} \right)^{\mu_q} \prod_{j=1}^{q-1} \left(\sin \frac{\theta - \theta_j(\xi)}{2} \right)^{\mu_j} d\theta \\ &= (-1)^{\tau_{q,k}} e_k, \quad k = 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (3)$$

et considérons

$$g(\xi) := \frac{F_q(\xi)}{F_{q+1}(\xi)},$$

où

$$F_{q+1}(\xi) := \int_{\xi}^Y p(\theta) \left(\sin \frac{\theta - \xi}{2} \right)^{\mu_q} \prod_{j=1}^{q-1} \left(\sin \frac{\theta - \theta_j(\xi)}{2} \right)^{\mu_j} d\theta.$$

La fonction g est continue et de signe constant pour $\xi \in (0, Y)$. De plus,

$$\lim_{\xi \downarrow 0} |g(\xi)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\xi \uparrow Y} |g(\xi)| = \infty.$$

Il existe donc $\xi_0 \in (0, Y)$ satisfaisant $g(\xi_0) = (-1)^{\mu_q} e_q / e_{q+1}$, d'où

$$A(\xi_0) \int_{\xi_0}^Y p(\theta) \left(\sin \frac{\theta - \xi_0}{2} \right)^{\mu_q} \prod_{j=1}^{q-1} \left(\sin \frac{\theta - \theta_j(\xi_0)}{2} \right)^{\mu_j} d\theta = e_{q+1},$$

en plus des q autres équations (3) déjà obtenues, pour $\xi = \xi_0$. Il suffit donc de poser $A = A(\xi_0)$, $\theta_j = \theta_j(\xi_0)$, $j = 1, \dots, q-1$ et $\theta_q = \xi_0$ pour vérifier la partie de l'existence du Théorème 2 pour $m = q$.

Pour avoir l'unicité, il suffit de voir que g est monotone dans $(0, Y)$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $F_{q+1}(\xi)$ est monotone, puisque $F_q(\xi)$ est constante comme le montre l'équation correspondant à $k = q$ dans le système (3). Or, d'après le Lemme 2,

$$\begin{aligned} F'_{q+1}(\xi) &:= \frac{d}{d\xi} F_{q+1}(A(\xi), \theta_1(\xi), \dots, \theta_{q-1}(\xi), \xi) \\ &= \frac{\partial(F_1, \dots, F_q, F_{q+1})}{\partial(A, \theta_1, \dots, \theta_{q-1}, \xi)} \div \frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(A, \theta_1, \dots, \theta_{q-1})} \end{aligned}$$

qui, en vertu du Lemme 1, est le quotient de deux quantités non-nulles.

L'étude de ce problème m'a été suggérée par le Professeur Q. I. Rahman.

English extended abstract. The following result was proved by C. Davis [3].

Theorem A. *Let $y_0, \dots, y_n$ be real numbers satisfying*

$$(-1)^k (y_k - y_{k-1}) < 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Then there exist a unique polynomial p of degree n and an associated system of points $-1 =: x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n := 1$ such that

$$\begin{aligned} p(x_k) &= y_k, & k &= 0, 1, \dots, n, \\ p'(x_k) &= 0, & k &= 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

An analogous result for trigonometric polynomials (see Theorem B) was found by C. H. Fitzgerald and L. L. Schumaker [4].

An important extension of Theorem A was discovered by B. D. Bojanov who proved the following.

Theorem C [2, Cor. 1]. *Given $N \in \mathbb{N}$ and a vector $\vec{\nu}$ whose components $\nu_1, \dots, \nu_n$ are positive integers satisfying $N = \sum_{k=1}^n \nu_k$, we set $\sigma_{n+1} := 0$ and $\sigma_k := \sum_{j=k}^n \nu_j$, $k = 1, \dots, n$. Let $y_0, \dots, y_{n+1}$ be real numbers satisfying*

$$(-1)^{\sigma_k} (y_k - y_{k-1}) > 0, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Then, for a given interval $[a, b]$, there exist a unique polynomial p of degree $N+1$ and an associated system of points $a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} := b$ such that

$$\begin{aligned} p(x_k) &= y_k, & k &= 0, 1, \dots, n+1, \\ p^{(j)}(x_k) &= 0, & j &= 1, \dots, \nu_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Here we prove an analogous result for trigonometric polynomials. It reads as follows.

Theorem 1. *Given $N \in \mathbb{N}$ and a vector $\vec{\nu}$ whose components $\nu_1, \dots, \nu_n$ are positive integers such that $2N = \sum_{k=1}^n \nu_k$, we set $\sigma_{n+1} := 0$ and $\sigma_k := \sum_{j=k}^n \nu_j$, $k = 1, \dots, n$. Let $y_0, \dots, y_n$ be real numbers satisfying the conditions*

$$(-1)^{\sigma_k} (y_k - y_{k-1}) > 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{and} \quad y_n < y_0.$$

Then, there exist a unique trigonometric polynomial t of order N and an associated system of points $0 =: \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi$ such that

$$\begin{aligned} t(\varphi_k) &= y_k, & k &= 0, 1, \dots, n, \\ t^{(j)}(\varphi_k) &= 0, & j &= 1, \dots, \nu_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. R. B. Barrar et H. L. Loeb, *Oscillating Tchebycheff Systems*, J. Approx. Theory **31** (1981), 188–197.
2. B. D. Bojanov, *A Generalisation of Chebyshev Polynomials*, J. Approx. Theory **26** (1979), 293–300.
3. C. Davis, *Extrema of a Polynomial*, Advanced problem 4714, Amer. Math. Monthly **64** (1957), 679–680.
4. C. H. Fitzgerald et L. L. Schumaker, *A differential equation approach to interpolation at extremal points*, J. Analyse Math. **22** (1969), 117–134.
5. E. Hille, *Analysis* Vol. 2, Blaisdell Publishing Company, London, 1966.

M. ARSENAULT

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE CENTRE-VILLE

MONTRÉAL (QUÉBEC) CANADA H3C 3J7