

RÉGULARITÉ FRONTIÈRE POUR LES ÉQUATIONS DE VON KÁRMÁN

MARIUS TUCSNAK

RÉSUMÉ. Nous étudions la régularité frontière pour les solutions faibles des équations dynamiques de von Kármán. Le résultat principal affirme qu'il existe une solution faible avec le laplacien ayant une régularité L^2 sur la frontière. Il s'agit d'un résultat de régularité cachée, car il n'est pas une conséquence de la régularité interne de la solution. Nous répondons de cette manière à une question ouverte posée par Lions dans [4].

ABSTRACT. We study the boundary regularity of the weak solutions of the dynamic von Kármán equations. The main result asserts the existence of weak solutions with the laplacian having a L^2 regularity at the boundary. This is a hidden regularity result, because it is not a consequence of the interior regularity of the solution. We answer in this way to an open problem proposed by Lions in [4]. See the English extended abstract at the end of the paper.

1. Introduction. Dans ce travail on va considérer les équations de von Kármán classiques, sous la forme présentée dans [3, chap. 1]. Plus précisément on va considérer le problème initial et aux limites

$$w'' + D\Delta^2 w - [w, G] = 0, \quad \text{dans } Q, \quad (1.1)$$

$$\Delta^2 G + [w, w] = 0. \quad (1.2)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad G = \frac{\partial G}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.3)$$

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w^1(x), \quad (1.4)$$

où

$$[f, g] = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2},$$

où Ω est un ouvert borné de R^2 , Γ est la frontière de Ω , $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Les équations de von Kármán (1.1)–(1.3) modélisent les vibrations non linéaires d'une plaque élastique et la constante positive D représente la rigidité en flexion du matériau de la plaque.

Dans [3, chap. 1] on démontre le résultat suivant:

Reçu le 17 mars 1992 et, sous forme définitive, le 20 octobre 1992.

Théorème 1.1. *Soit $w^0 \in H_0^2(\Omega)$, $w^1 \in L^2(\Omega)$. Alors le problème (1.1)–(1.4) admet une solution ayant la régularité*

$$w \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \quad (1.5)$$

$$G \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)). \quad (1.6)$$

Le problème de l'unicité d'une solution satisfaisant (1.5)–(1.6) est ouvert (cf. [3, chap. 1]).

Par ailleurs, dans [4] Lions démontre un résultat de régularité frontière pour une équation semilinéaire des ondes. Dans le même article on se pose la question de l'existence d'au moins une solution du problème (1.1)–(1.4), ayant la régularité (1.5)–(1.6), qui satisfait la condition:

$$\Delta w|_\Sigma \in L^2(\Sigma). \quad (1.7)$$

Dans ce travail on va démontrer que la réponse est affirmative si $w^1 \in H_0^1(\Omega)$, en généralisant de cette manière les résultats connus pour l'équation linéaire des plaques (cf. [5]). La méthode qu'on utilise comporte deux étapes. Dans un premier temps on établit le résultat de régularité frontière pour les équations de von Kármán modifiées. Ensuite, par un argument de perturbation, on démontre la régularité frontière pour au moins une solution des équations classiques de von Kármán.

2. Existence et régularité des solutions pour les équations de von Kármán modifiées. Dans cette section on va considérer le problème initial et aux limites suivant:

$$w'' - \gamma \Delta w'' + D \Delta^2 w - [w, G] = 0, \quad \text{dans } Q \quad (2.1)$$

$$\Delta^2 G + [w, w] = 0. \quad (2.2)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad G = \frac{\partial G}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Sigma. \quad (2.3)$$

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w^1(x), \quad (2.4)$$

où γ est une constante strictement positive.

Dans un premier temps on va démontrer un résultat d'existence et régularité pour (2.1)–(2.4). La première partie de ce résultat est démontrée dans [3, chap. 1].

Proposition 2.1. *Soit $w^0 \in H_0^2(\Omega)$, $w^1 \in H_0^1(\Omega)$. Alors le problème (2.1)–(2.4) admet une solution unique ayant la régularité:*

$$w \in C(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.5)$$

$$G \in C(0, T; H_0^2(\Omega)). \quad (2.6)$$

De plus cette solution dépend continuellement des données initiales et elle satisfait l'estimation:

$$\begin{aligned} E(t) &= \|w'(t)\|^2 + \gamma \|\nabla w'(t)\|^2 + D \|\Delta w(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta G(t)\|^2 \\ &= E(0) = \|w^1\|^2 + \gamma \|\nabla w^1\|^2 + D \|\Delta w^0\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta G(0)\|^2, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.7)$$

où par $\|\cdot\|$ on a noté la norme dans $L^2(\Omega)$.

Si

$$w^0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), \quad w^1 \in H_0^2(\Omega), \quad (2.8)$$

la solution du problème (2.1)–(2.4) a la propriété

$$w \in C(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H_0^2(\Omega)). \quad (2.9)$$

Démonstration. On va réduire (2.1)–(2.4) à un problème d'évolution dans un espace de Hilbert et ensuite on va appliquer la théorie standard sur les équations d'évolution semi-linéaires (cf. [2]). On considère les isomorphismes linéaires et continus

$$A: H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), \quad Aw = D\Delta^2 w,$$

$$B: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), \quad Bu = u - \gamma \Delta u,$$

Soit X l'espace de Hilbert $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_X = (A^{1/2}w_1, A^{1/2}w_2) + (B^{1/2}v_1, B^{1/2}v_2),$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. On définit l'opérateur linéaire

$$\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow X, \quad \mathcal{A} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -B^{-1}Aw \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

où $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$. On peut vérifier (cf. [1]) que $\mathcal{A}$ est un opérateur antiautoadjoint, donc il est le générateur d'un semigroupe de classe C^0 dans X . On introduit aussi l'application

$$\tilde{H} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = [w_1, \tilde{G}([w_2, w_3])],$$

où $y = \tilde{G}(u)$ est la solution du problème:

$$\Delta^2 y = u, \quad y|_{\Sigma} = \frac{\partial y}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0.$$

Compte tenu du fait que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on a (cf. [3, chap. 1]) que $\tilde{H}$ est une application trilinéaire continue de $[H_0^2(\Omega)]^3$ dans $H^{-\epsilon}(\Omega)$, pour tout $\epsilon > 0$. On peut donc définir l'opérateur nonlinéaire et continu

$$F: X \rightarrow X, \quad F \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B^{-1}\tilde{F}(w) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

où $\tilde{F}(w) = H(w, w, w)$. Un calcul simple montre que $\tilde{F}$ est différentiable au sens de Fréchet et sa différentielle est donnée par la formule:

$$D\tilde{F}(w)(\delta w) = [\delta w, \tilde{G}[w, w]] + 2[w, \tilde{G}[\delta w, w]], \quad \forall w, \delta w \in H_0^2(\Omega),$$

donc $\tilde{F} \in C^1([H_0^2(\Omega)]^3, H^{-\epsilon}(\Omega))$, $\forall \epsilon > 0$. Compte tenu de (2.11) on obtient que $F \in C^1(X, X)$. Soit

$$U = \begin{pmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Il est évident que w est une solution de (2.1)–(2.4), ayant la régularité (2.9) si et seulement si U satisfait la condition:

$$U' = AU + F(U), \quad (2.12)$$

$$U(0) = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (2.13)$$

Comme $\mathcal{A}$ est le générateur d'un semigroupe et $F \in C^1(X, X)$, en appliquant la proposition 4.3.7 de [2] on obtient l'existence d'une unique solution maximale $U \in C^1([0, \tau), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, du problème (2.12)–(2.13). On remarque que cette solution satisfait la forme variationnelle du problème (2.1)–(2.4), i.e.

$$(w'', \phi) + \gamma(\nabla w', \nabla \phi) + D(\Delta w, \Delta \phi) - ([w, G], \phi) = 0, \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega), t \in [0, \tau). \quad (2.14)$$

En choisissant $\phi = \frac{\partial w}{\partial t}$ dans (2.14) on obtient que (2.7) a lieu pour tout $t \in [0, \tau)$. Par ailleurs, compte tenu du fait que $F \in C^1(X, X)$ il vient que (2.12)–(2.13) admet une solution unique, $u \in C([0, \tau), X)$, pour tout $U \in X$. Par densité on déduit que cette solution satisfait aussi (2.7), d'où il vient que $\tau = \infty$ (cf. théorème 1.4 de [6, chap. 6]). On a donc obtenu l'existence et l'unicité d'une solution satisfaisant (2.5)–(2.6). En utilisant de nouveau le fait que $F \in C^1(X, X)$ on peut appliquer le théorème 1.5 de [6, chap. 6] pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution satisfaisant (2.9). $\square$

3. Le résultat de régularité. Dans cette section on va démontrer le résultat principal de ce chapitre. Dans un premier temps on énonce un lemme qui va permettre l'application de la méthode des multiplicateurs.

Lemme 3.1. *Soit w une solution de (2.1)–(2.4), ayant la régularité (2.9). Alors w satisfait la relation:*

$$(w'', \phi) + \gamma(\nabla w', \nabla \phi) + D(\Delta w, \Delta \phi) - D \int_{\Gamma} \Delta w \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Gamma - ([w, G], \phi) = 0, \quad (3.1)$$

pour tout $\phi \in H^2(\Omega)$, $\phi|_{\Gamma} = 0$.

Démonstration. Compte tenu du fait que $w \in C([0, T], H^3(\Omega))$ il vient

$$\int_{\Omega} \Delta w \Delta \phi dx = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta w) \nabla \phi dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Delta w d\Gamma, \quad \forall \phi \in H^2(\Omega). \quad (3.2)$$

En particulier on a:

$$\int_{\Omega} \Delta w \Delta \phi dx = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta w) \nabla \phi dx, \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega) \quad (3.3)$$

Comme conséquence de (2.14) et (3.3) on obtient

$$(w'', \phi) + \gamma(\nabla w', \nabla \phi) - D(\nabla(\Delta w), \nabla \phi) - ([w, G], \phi) = 0, \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega) \quad (3.4)$$

En utilisant (2.8) et le fait que $[w, G] \in H^{-1}(\Omega)$ on peut conclure que (3.4) est vraie pour toute $\phi \in H_0^1(\Omega)$. En particulier, si $\phi \in H^2(\Omega)$, $\phi|_{\Gamma} = 0$, les relations (3.2) et (3.4) impliquent (3.1). $\square$

Le résultat suivant montre que (1.7) est vérifiée pour les solutions faibles des équations de von Kármán modifiées.

Proposition 3.1. *Soit w une solution de (2.1)–(2.4) ayant la régularité (2.9). Alors w satisfait (1.7). De plus, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que, pour tout $\gamma \in (0, \gamma_0]$ et w^0, w^1 telles que $E(0) < M$, on a*

$$\|\Delta w\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq C_0 (\|w^0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2), \quad (3.5)$$

où $C_0 > 0$ est une constante indépendante de γ .

Démonstration. Dans un premier temps on suppose que $w^0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $w^1 \in H_0^2(\Omega)$. Dans (3.1) on prend $\phi = q \cdot \nabla w$, où $q \in C^2(R^2)$ est un champ de vecteurs ayant la propriété

$$q(x) \cdot \nu(x) \geq \delta > 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma.$$

Un tel champ de vecteurs existe (cf. [5, p. 31]) si Γ est lipschitzienne. En utilisant des intégrations par parties qui sont décrites en détail dans [5, p. 243–247] on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (q \cdot \nu) |\Delta w|^2 d\Sigma &= (w'(t), q \cdot \nabla w(t)) \Big|_0^T \\ &+ \gamma \left(\nabla w'(t), \nabla (q \cdot \nabla w(t)) \right) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \operatorname{div} q [(w')^2 + \gamma |\nabla w'|^2 - (\Delta w)^2] dx dt \\ &+ \int_Q (\Delta q \cdot \nabla w) \Delta w dx dt + 2 \sum_{j,k=1}^3 \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \Delta w \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k \partial x_j} dx dt \\ &- \gamma \sum_{i,k=1}^3 \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial w'}{\partial x_i} \frac{\partial w'}{\partial x_k} dx dt + \int_Q ([w, G], q \cdot \nabla w) dx dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Par conséquent on a l'inégalité:

$$\begin{aligned} \|\Delta w\|_{L^2(\Sigma)}^2 &\leq C_1 (\|w^0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|\nabla w^1\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &+ \left| \int_Q ([w, G], q \cdot \nabla w) dx dt \right|, \quad \forall \gamma \in (0, \gamma_0]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Il nous reste encore à estimer le dernier terme de (3.7). Un calcul simple montre que (cf. [3, ch.1])

$$\int_{\Omega} (q \cdot \nabla w) [w, G] dx = \int_{\Omega} [(q \cdot \nabla w), w] G dx. \quad (3.8)$$

En explicitant $[(q \cdot \nabla w), w]$ dans (3.8) on trouve

$$\int_{\Omega} [(q \cdot \nabla w), w] G dx = \sum_{j \neq k} \int_{\Omega} G \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (q \cdot \nabla w) \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} dx - 2 \int_{\Omega} G \frac{\partial^2 (q \cdot \nabla w)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} dx. \quad (3.9)$$

Le premier groupe de termes dans (3.9) a la forme

$$\int_0^T \int_{\Omega} G \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} dx dt,$$

et l'on a l'estimation:

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} G \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} dx dt \right| \leq \left\| G \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2} \right\|_{L^\infty(Q)} \|w\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2,$$

d'où, en utilisant (2.2), il vient que

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} G \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} dx dt \right| \leq C_1 E(0) \|w\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2. \quad (3.10)$$

De la même manière, pour le second groupe de termes on obtient l'estimation

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} G \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} dx dt \right| \leq C_2 E(0) \|w\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2. \quad (3.11)$$

Il reste les termes contenant $\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j^2}$. On remarque que la somme de ces termes donne

$$\begin{aligned} \int_Q G \left(q_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + q_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + q_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right. \\ \left. + q_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2q_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - 2q_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2 \partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx dt \\ = \sum_{i=1}^2 \int_Q G q_i \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_i}, w \right] dx dt. \quad (3.12) \end{aligned}$$

En utilisant (3.7)–(3.12) ainsi que (2.7) on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} [(q \cdot \nabla w), w] G dx \right| \leq C_3 (\|w^0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \\ + \left| \sum_{i=1}^2 \int_Q G q_i \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_i}, w \right] dx dt \right|. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\sum_{i=1}^2 \int_Q Gq_i \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_i}, w \right] dx dt = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i} (Gq_i) [w, w] dx dt. \quad (3.14)$$

Les relations (3.7), (3.9) et (3.14) impliquent

$$\|w\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq C_1 (\|w^0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2) + \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^2 \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i} (Gq_i) [w, w] dx dt \right|. \quad (3.15)$$

Compte tenu du fait que $L^1(\Omega) \subset H^{-1-\epsilon}$, $\forall \epsilon > 0$, il vient que $G \in H^{3-\epsilon}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega)$, d'où on obtient

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (Gq_i) [w, w] \right\|_{L^\infty(Q)} \leq K_0 \|G\|_{L^\infty(0,T,H^{3-\epsilon}(\Omega))},$$

où K_0 est une constante positive. En utilisant (3.15) on obtient (3.5) si $w^0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $w^1 \in H_0^1(\Omega)$.

Pour des données initiales dans $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ il suffit d'approcher ces données par des données plus régulières et d'appliquer la proposition 2.1. $\square$

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre:

Théorème 3.1. *Soit $w^0 \in H_0^2(\Omega)$, $w^1 \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe au moins une solution du problème (1.1)–(1.4) satisfaisant (1.7).*

Démonstration. Soit $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset (0, \gamma_0]$ une suite convergente vers 0. On considère les problèmes:

$$w_n'' - \gamma_n \Delta w_n'' + D \Delta^2 w_n - [w_n, G_n] = 0, \quad \text{dans } Q, \quad (3.18)$$

$$\Delta^2 G_n + [w_n, w_n] = 0. \quad (3.19)$$

$$w_n = \frac{\partial w_n}{\partial \nu} = 0, \quad G_n = \frac{\partial G_n}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Sigma. \quad (3.20)$$

$$w_n(x, 0) = w^0(x), \quad \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, 0) = w^1(x). \quad (3.21)$$

En appliquant la proposition 2.1 on obtient

$$\begin{aligned} & \|w_n'(t)\|^2 + \gamma_n \|\nabla w_n'(t)\|^2 + D \|\Delta w_n(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta G_n(t)\|^2 \\ &= \|w^1\|^2 + \gamma_n \|\nabla w^1\|^2 + D \|\Delta w^0\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta G(0)\|^2, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'égalité (3.22) implique, à l'extraction d'une sous-suite près, que

$$w_n \rightarrow w, \quad \text{dans } L^\infty([0, T], H_0^2(\Omega)), \text{ faible } *, \quad (3.23)$$

$$w_n' \rightarrow w', \quad \text{dans } L^\infty([0, T], L^2(\Omega)), \text{ faible } *, \quad (3.24)$$

$$G_n \rightarrow G, \quad \text{dans } L^\infty([0, T], H_0^2(\Omega)), \text{ faible } *, \quad (3.25)$$

En utilisant les résultats de compacité de [7, 1987], par exemple, on obtient

$$w_n \rightarrow w, \quad \text{dans } L^\infty([0, T], H_0^{2-\epsilon}(\Omega)), \text{ fort.} \quad (3.26)$$

De plus w_n, G_n satisfont l'égalité

$$(w_n'', \phi) + \gamma_n(\nabla w_n', \nabla \phi) + D(\Delta w_n, \Delta \phi) - ([w_n, G_n], \phi) = 0, \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega). \quad (3.27)$$

La relation (3.22) implique que $\gamma_n \nabla w_n' \rightarrow 0$ dans $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$ et les autres termes linéaires dans (3.27) passent évidemment à la limite. Soit (z_j) une base de $H_0^2(\Omega)$, $g_j, 1 \leq j \leq j_0$, des fonctions $\in C^1([0, T])$ et

$$\psi = \sum_{j=1}^{j_0} g_j \otimes z_j.$$

En utilisant (3.25) et (3.26) on trouve

$$\int_0^T ([w_n, G_n], \psi) \rightarrow \int_0^T ([\psi, G], w), \quad (3.28)$$

Par densité on obtient que (3.28) a lieu pour toute fonction ψ

$$\psi \in L^2([0, T], H_0^2(\Omega)) \cap H^1([0, T], L^2(\Omega)).$$

On a donc obtenu une solution $\{w, G\}$ du problème (1.1)-(1.4) satisfaisant (1.5), (1.6).

En utilisant le fait que

$$w_n \in L^\infty((0, T), H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T, H_0^1(\Omega))$$

on obtient

$$w_n'' - \gamma \Delta w_n'' \in H^{-1}((0, T), H^{-1}(\Omega)).$$

Comme

$$[w_n, G_n] \in L^\infty((0, T), H^{-1}(\Omega)),$$

en utilisant le fait que les w_n, G_n vérifient (3.18)-(3.20) on obtient

$$\Delta^2 w_n \in H^{-1}((0, T), H^{-1}(\Omega)). \quad (3.29)$$

Compte tenu de (3.23)-(3.25) il vient que

$$\Delta^2 w_n \rightarrow \Delta^2 w, \quad \text{dans } H^{-1}((0, T), H^{-1}(\Omega)), \text{ faible.} \quad (3.30)$$

En utilisant (3.29) et (3.30) on obtient:

$$\begin{aligned} w_n &\in H^{-1}((0, T), H^3(\Omega)), \\ w_n &\rightarrow w, \quad \text{dans } H^{-1}((0, T), H^3(\Omega)), \text{ faible,} \end{aligned}$$

d'où l'on peut conclure

$$\Delta w_n|_\Sigma \rightarrow \Delta^2 w, \quad \text{dans } H^{-1}((0, T), H^{1/2}(\Gamma)), \text{ faible.} \quad (3.31)$$

Par ailleurs la proposition 3.1 implique que la suite $\Delta w_n|_\Sigma$ est bornée dans $L^2(\Sigma)$, donc il existe $\chi \in L^2(\Sigma)$ telle que, à l'extraction d'une sous-suite prés,

$$\Delta w_n \rightarrow \chi, \quad \text{dans } L^2(\Sigma), \text{ faible,} \quad (3.32)$$

Les relations (3.31) et (3.32) montrent que $\Delta w = \chi$, sur Σ , donc $\Delta w \in L^2(\Sigma)$. De plus on a l'estimation

$$\|\Delta w\|_{L^2(\Sigma)} \leq C(\|w_0\|_{H^2(\Omega)} + \|w_1\|_{H^1(\Omega)}),$$

où C est une constante positive. $\square$

English extended abstract. In this paper we consider the initial and boundary value problem (1.1)–(1.4) modelling the nonlinear vibrations of an elastic plate. We use the classical von Kármán equations with Dirichlet type boundary conditions.

It is by now well known that the problem (1.1)–(1.4) admits at least one finite energy solution (cf. [3, chap. 1]). As far as we know no uniqueness result, in this class of solutions, was published in the literature.

The aim of this paper is to answer to a question of Lions concerning the boundary regularity of at least one finite energy solution of (1.1)–(1.4). This question was raised in [4] where the author proves a similar result for the wave equation with cubic nonlinearity.

More precisely our main result (Theorem 3.1) asserts the existence of at least one finite energy solution w with $(\Delta w)^2$ integrable on the boundary. Let us notice that this property doesn't follow from the interior regularity of the solution. This is why we can use the term of hidden regularity at the boundary. Such results, known for linear wave and plate equations, can be applied in controllability problems (cf. [5]).

Our method is based on a regularization process. More precisely we consider the initial and boundary value problem (2.1)–(2.4) for the so called modified von Kármán equations. For this problem the semigroup theory works to obtain existence and uniqueness results. By a multiplier technique we obtain that the finite energy solutions of (2.1)–(2.4) have a square integrable laplacian at the boundary. This result and some compactness arguments allow the application of a singular perturbation technique which gives the hidden regularity result for at least one solution of (1.1)–(1.4).

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Bradley et I. Lasiecka, *Local exponential stabilization of a nonlinearly perturbed plate* (à paraître dans Nonlinear Anal.).
2. T. Cazenave et A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, SMAI, Paris, 1991.
3. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
4. ———, *Hidden regularity in some nonlinear hyperbolic equations*, Mat. Apl. Comput. **6** (1987), 7–17.
5. ———, *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, Masson, Paris, 1988.
6. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, 1983.
7. J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Mat. Pura Appl. (4) **146** (1987), 65–96.

M. TUCSNAK

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

45067 ORLÉANS CEDEX 2 FRANCE