

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE CONSTRUCTION DU COMPACTIFIÉ DE WALLMAN ET APPLICATIONS

FRANÇOIS LESSARD

RÉSUMÉ. Nous construisons le compactifié de Wallman à l'aide d'une nouvelle approche, tout en utilisant moins d'hypothèse que dans la construction classique. Grâce à notre construction, nous généralisons plusieurs théorèmes importants concernant ce même compactifié de Wallman et nous obtenons, par la suite, quelques applications à la topologie et à l'analyse fonctionnelle, ainsi qu'un nouveau théorème de représentation intégrale pour les fonctionnelles linéaires positives.

ABSTRACT. We construct the Wallman compactification by a new approach which requires fewer hypothesis than the classical construction. We are thus able to generalize important results about this compactification and, we develop applications to topology and functional analysis, and prove a new integral representation theorem for positive linear functionals. See the English extended abstract at the end of the paper.

1. Introduction. Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{V}$ une collection arbitraire non vide de fonctions réelles bornées définies sur X . $\forall x \in X$, désignons par h_x la fonction réelle définie sur $\mathcal{V}$ par $h_x(f) = f(x) \forall f \in \mathcal{V}$. Par la suite, dénotons par $X_{\mathcal{V}}^0$ la classe de toutes les fonctions $h: \mathcal{V} \rightarrow R$ telles qu'il existe une suite généralisée $\{x_\alpha\} \subset X$ avec $h_{x_\alpha}(f) \rightarrow h(f) \forall f \in \mathcal{V}$.

Nous munissons maintenant $X_{\mathcal{V}}^0$ d'une topologie faisant de cet ensemble un espace compact séparé, et ce de la façon suivante : $\forall f \in \mathcal{V}$, choisissons un intervalle compact I_f de R contenant l'ensemble image de f et, par la suite, identifions $X_{\mathcal{V}}^0$ avec la fermeture de l'ensemble des points de la forme $\prod_{f \in \mathcal{V}} \{f(x)\}$ (où $x \in X$) dans l'espace compact séparé $\prod_{f \in \mathcal{V}} I_f$. À noter que, de manière évidente, la fonction $j: X \rightarrow X_{\mathcal{V}}^0$ définie par $j(x) = h_x \forall x \in X$, est telle que $j(X)$ est dense dans $X_{\mathcal{V}}^0$ et donc $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ peut être considéré comme étant un compactifié de X . De plus, si pour chaque $f \in \mathcal{V}$, on définit $f^0: X_{\mathcal{V}}^0 \rightarrow R$ par $f^0(h) = h(f)$, alors $f^0 \circ j = f$ et f^0 est donc l'unique extension continue de f sur $X_{\mathcal{V}}^0$. Il est par ailleurs clair que $\mathcal{V}^0 = \{f^0: f \in \mathcal{V}\}$ sépare les points de $X_{\mathcal{V}}^0$.

Dans les pages qui vont suivre, nous allons tout d'abord obtenir quelques propriétés du compactifié $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$. Ensuite, nous allons montrer comment construire explicitement le compactifié de Wallman à l'aide de $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ (avec une classe de fonctions $\mathcal{V}$ convenablement choisie), tout en délaissant une hypothèse cruciale utilisée dans la construction classique. Pour ce faire, nous aurons cependant besoin d'un résultat important généralisant simultanément toutes les versions du lemme d'Urysohn existant dans la littérature (voir, entre autres, [1, p. 317], [10, p. 115] et [14, p. 40]).

Reçu le 4 septembre 1991 et, sous forme définitive, le 30 janvier 1992.

Recherche subventionnée par le CRSNG.

Grâce à notre construction, nous serons en mesure de généraliser plusieurs théorèmes (voir, par exemple, le théorème 4.1, le corollaire 4.2 et le théorème 4.3 dans [16, pp. 60–61]) concernant

- (1) La structure même du compactifié de Wallman, ainsi que
- (2) les compactifiés pouvant être identifiés à ce même compactifié de Wallman.

En utilisant ces généralisations, nous obtiendrons quelques applications à la topologie et à l'analyse fonctionnelle. Entre autres, nous montrerons que si $f: R \rightarrow R$ est une fonction continue bornée et si $\varepsilon > 0 = 0$ est donné, il existe deux fonctions de Lipschitz continues à variation bornée $h: R \rightarrow R$ et $g: R \rightarrow R$ telles que

- (1) $g > 0$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, et
- (3) $|f(x) - h(x)/g(x)| < \varepsilon \forall x \in R$.

Finalement, nous utiliserons les principaux résultats décrits précédemment afin d'obtenir un nouveau théorème de représentation intégrale pour les fonctionnelles linéaires positives (voir théorème 5.4). À noter que ce théorème et ces corollaires généralisent le théorème de représentation d'Alexandroff (voir [16, p. 55]), de Markov [12], de Kirk [11], de Bochner [5] ainsi que le résultat obtenu dans [2]. Mentionnons également que notre théorème ne peut être démontré à l'aide des travaux récents sur les représentations intégrales de Pollard et Topsoe [13] et Topsoe [17]. Nous verrons pourquoi un peu plus loin. Entre autres, notre théorème de représentation contient le résultat suivant :

Si

- i) $\mathcal{V}$ est un treillis vectoriel de fonctions réelles bornées sur un ensemble X contenant les fonctions constantes et
- ii) L est une fonctionnelle linéaire positive sur $\mathcal{V}$,

alors il existe une fonction d'ensembles additive u sur l'algèbre engendrée par les ensembles zéros des fonctions de $\mathcal{V}$ telle que

- (1) u est régulière de l'intérieur et de l'extérieur par rapport, respectivement, aux ensembles zéros et co-zéros des fonctions de $\mathcal{V}$ et
- (2) $Lf = \int_X f du \forall f \in \mathcal{V}$.

Mentionnons, en terminant, que tout au long de cet article, nous conviendrons des notations suivantes dans le cas où X est un ensemble quelconque :

- i) si $A \subset X$ et si le contexte n'est pas ambigu, nous désignerons par A^c l'ensemble $X \setminus A$;
- ii) si $\mathcal{L}$ est une classe quelconque de sous-ensembles de X , nous désignerons par $\mathcal{L}^c$ l'ensemble $\{A^c : A \in \mathcal{L}\}$;
- iii) si X est de plus un espace topologique et si $A \subset X$, nous désignerons par $\overline{A}$ la fermeture de A dans X et par $C_b(X, R)$ l'ensemble des fonctions réelles continues bornées définies sur X .

2. Préliminaires. Dans cette section, nous allons énoncer quelques propriétés du compactifié $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ qui nous seront utiles par la suite. Tout d'abord, le théorème suivant montre qu'il est possible de construire tous les compactifiés d'un ensemble X à l'aide de $X_{\mathcal{V}}^0$, où $\mathcal{V}$ est une classe de fonctions de X vers R convenablement choisie tout en étant aussi petite que possible. Nous omettons ici la preuve simple de ce résultat car elle utilise des techniques très standard (voir, par exemple, [4, p. 275]).

Théorème 2.1. *Soit*

- i) $\mathcal{V}$ une collection de fonctions réelles bornées définies sur un ensemble X ;
- (1) T un espace compact et
- (2) $k: X \rightarrow T$ une fonction telle que $k(X)$ est dense dans T .

De plus, supposons que chaque fonction $f \in \mathcal{V}$ admet une extension continue $f^T: T \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^T \circ k = f$. Alors la fonction $\theta: T \rightarrow X_{\mathcal{V}}^0$ définie par $\theta(t)(f) = f^T(t)$, $\forall f \in \mathcal{V}$ et $\forall t \in T$, est une surjection bien définie, continue et fermée telle que $\theta \circ k = j$.

De plus, si $\{f^T: f \in \mathcal{V}\}$ sépare les points de T (d'où T est séparé), alors θ est un homéomorphisme et par conséquent (T, k) et $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ sont topologiquement équivalents.

Comme corollaire du théorème 2.1 nous obtenons de manière immédiate une généralisation d'un résultat démontré pour la première fois par Gelfand et Kolmogoroff (voir [4, p. 274]).

Corollaire 2.2. *Pour $j \in \{1, 2\}$, soit*

- i) T_j un espace compact séparé;
- ii) $k_j: X \rightarrow T_j$ une fonction telle que $k_j(X)$ est dense dans T_j et
- iii) $\mathcal{V}_j$ la classe de toutes les fonctions réelles définies sur X qui admettent une extension continue sur T_j . (En fait $\mathcal{V}_j = \{g \circ k_j: g \in C_b(T_j, \mathbb{R})\}$.)

Alors (T_1, k_1) et (T_2, k_2) sont topologiquement équivalents ssi $V_1 = V_2$.

Désignons maintenant par le symbole $R\mathcal{V}$ la plus petite algèbre fermée par rapport à la norme uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$ contenant $\mathcal{V}$ et les fonctions constantes. Alors, en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, on obtient facilement la proposition suivante:

Proposition 2.3. $R\mathcal{V} = \{g \circ j: g \in C_b(X_{\mathcal{V}}^0, \mathbb{R})\}$ i.e. $R\mathcal{V}$ est précisément la classe des fonctions réelles définies sur X qui admettent une extension continue sur $X_{\mathcal{V}}^0$.

La proposition précédente jumelée au corollaire 2.2 nous permet de déduire facilement des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(X_{\mathcal{U}}^0, j_{\mathcal{U}})$ et $(X_{\mathcal{V}}^0, j_{\mathcal{V}})$ soient topologiquement équivalents lorsque $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux classes de fonctions réelles bornées sur X .

Théorème 2.4. *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ telles que décrites ci-dessus. Alors $(X_{\mathcal{U}}^0, j_{\mathcal{U}})$ et $(X_{\mathcal{V}}^0, j_{\mathcal{V}})$ sont topologiquement équivalents ssi $R\mathcal{U} = R\mathcal{V}$ (ce qui est le cas lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \subset R\mathcal{V}$).*

Finalement, nous aurons également besoin, dans les sections à venir, du théorème suivant dont la preuve est similaire à celle du théorème 1 dans [3].

Théorème 2.5. *Si Y est un espace compact séparé et si $q: X \rightarrow Y$ est une fonction, alors il existe une (unique) fonction continue $Q: X_{\mathcal{V}}^0 \rightarrow Y$ telle que $Q \circ j = q$ ssi $g \circ q \in R\mathcal{V}$ pour toute fonction g appartenant à un sous-ensemble dense donné dans $(C_b(Y, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$.*

3. Une généralisation du lemme d'Urysohn.

Définition 3.1. Si X est un ensemble, alors une collection $\mathcal{L}$ de sous-ensembles de X est dite un

- i) $(\emptyset, U)$ -pavé de X si $\emptyset \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est fermé sous l'union finie;
- ii) pavé de X si $\mathcal{L}$ est un $(\emptyset, U)$ -pavé de X contenant X et fermé sous l'intersection finie;
- iii) δ -pavé de X si $\mathcal{L}$ est un pavé de X fermé sous l'intersection dénombrable.

Définition 3.2. Soit $\mathcal{L}$ un $(\emptyset, U)$ -pavé de X . Alors une fonction $f: X \rightarrow R$ est dite $\mathcal{L}$ -uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0 \exists \{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{L}^c$ telle que

- (1) $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$ et
- (2) $\sup_{x, y \in U_i} |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall i$

Dans le contexte de la définition précédente, nous désignerons par $C_b(\mathcal{L})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{L}$ -uniformément continues. À noter que toute fonction $f \in C_b(\mathcal{L})$ est bornée d'où l'emploi de la lettre b dans le symbole $C_b(\mathcal{L})$.

Remarques 3.3.

- a) Si $\mathcal{L}$ est un pavé de X , alors la notion de fonction $\mathcal{L}$ -uniformément continue introduite ici coïncide avec la notion de fonction $\mathcal{L}$ -uniformément continue développée par Frink dans [9. p. 605].
- b) Si $\mathcal{L}$ est un pavé de X et si $f: X \rightarrow R$ est une fonction bornée, on peut montrer que $f \in C_b(\mathcal{L})$ ssi $f^1(F) \in \mathcal{L}$ pour tout fermé F de R (et donc notre définition de fonction $\mathcal{L}$ -uniformément continue coïncide ici avec la définition de fonction $\mathcal{L}$ -continue donnée par Alexandroff dans [1]).

Preuve. En effet, si $f^1(F) \in \mathcal{L}$ pour tout fermé de R , il est facile de montrer que $f \in C_b(\mathcal{L})$ car l'ensemble image de f est un sous-ensemble borné de R .

Réciproquement, supposons que $f \in C_b(\mathcal{L})$. Puisque $\mathcal{L}^c$ est fermé sous l'intersection finie et l'union dénombrable, il suffit de montrer que si $a, b \in R$, alors $f([a, b]) \in \mathcal{L}^c$. Soit $r \in Q \cap]a, b[$ et posons $\varepsilon_r = \min(r - a, b - r)/2$. De plus, puisque $f \in C_b(\mathcal{L})$, choisissons $\{U_i\} \subset \mathcal{L}^c$ telle que $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$ et $\sup_{x, y \in U_i} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon_r \quad \forall i$. Alors, si on pose $U_r = \bigcup \{U_i : 1 \leq i \leq n \text{ et } f^{-1}(]r - \varepsilon_r, r + \varepsilon_r[) \neq \emptyset\}$, on a $U_r \in \mathcal{L}^c$ et $f([a, b]) = \bigcup \{U_r : r \in Q \cap]a, b[\}$. Comme $\mathcal{L}^c$ est fermé sous l'union dénombrable, cela montre que $f^1([a, b]) \in \mathcal{L}^c$ et la preuve est complète $\square$.

Exemples 3.4.

- a) Si $\mathcal{L}$ est l'ensemble des fermés d'un espace topologique X alors $\mathcal{L}$ est un δ -pavé et donc la remarque 3.3 b) nous permet de conclure que $C_b(\mathcal{L}) = C_b(X, R)$.
- b) Soit X un espace localement compact séparé et posons $\mathcal{L} = \{K : K \text{ est un compact de } X\} \cup \{F : F \text{ est fermé et } \overline{F^c} \text{ est un compact dans } X\}$. Alors $\mathcal{L}$ est un pavé de X mais n'est pas nécessairement un δ -pavé de X . De plus, on peut facilement montrer que $C_b(\mathcal{L}) = \{f: X \rightarrow R : f \text{ est continue et } \forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ un compact dans } X \text{ tel que } \sup_{x, y \in K^c} |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$.
- c) Posons $\mathcal{L} = \{\bigcap_{n=1}^\infty (]-\infty, a_n] \cup [b_n, \infty[) : a_n, b_n \in R \text{ et } \inf_n (b_n - a_n) > 0\}$. Alors $\mathcal{L}$ est un pavé de R et on montre que $C_b(\mathcal{L})$ est l'ensemble des fonctions bornées $f: R \rightarrow R$ qui sont uniformément continues sur R .

Dans tout le reste de cette section, il sera supposé, dans l'énoncé des différentes définitions, propositions, théorèmes ou corollaires, que $\mathcal{L}$ est un $(\emptyset, U)$ -pavé d'un ensemble X .

Proposition 3.5.

- a) $C_b(\mathcal{L})$ est une algèbre de Banach¹ par rapport à la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

¹Dans le présent article, il est sous-entendu que toutes les algèbres de Banach qui y sont étudiées, possèdent un élément unité.

- b) Si $f \in C_b(\mathcal{L})$ et si A et B sont des sous-ensembles de X tels que $\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = \emptyset$, $\exists U, V \in \mathcal{L}^c$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $f(U) \cap f(V) = \emptyset$. (En particulier, on a que $U \cap V = \emptyset$.)

Preuve. a) Ce fait est une conséquence du théorème 4.4 mais on peut également le montrer directement en utilisant seulement la définition de fonction $\mathcal{L}$ -uniformément continue.

b) Comme $\overline{f(A)}$ et $\overline{f(B)}$ sont des sous-ensembles compacts et disjoints de R , alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| > \varepsilon \forall x \in A$ et $\forall y \in B$. Puisque $f \in C_b(\mathcal{L})$, $\exists \{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{L}^c$ telle que $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$ et $\sup_{x, y \in U_i} |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 \forall i$.

Posons $U = \bigcup \{U_i : 1 \leq i \leq n \text{ et } U_i \cap A \neq \emptyset\}$ et $V = \bigcup \{U_i : 1 \leq i \leq n \text{ et } U_i \cap B \neq \emptyset\}$. Alors $A \subset U$ et $B \subset V$ et, de plus, $|f(x) - f(y)| > \varepsilon/3 > 0 \forall x \in U$ et $\forall y \in V$ (i.e. $f(U) \cap f(V) = \emptyset$). $\square$

Nous en venons maintenant à une généralisation du lemme d'Urysohn dont l'énoncé utilise la définition suivante :

Définition 3.6. On dit que $\mathcal{L}$ est *normal* si $\forall A, B \in \mathcal{L}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $\exists U, V \in \mathcal{L}^c$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Théorème 3.7. Si $\mathcal{L}$ est normal et si $A, B \in \mathcal{L}$ sont tels que $A \cap B = \emptyset$, $\exists f \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f(A) = \{0\}$ et $f(B) = \{1\}$.

Preuve. Grâce au fait que $\mathcal{L}$ est normal, on peut construire, pour chaque rationnel dyadique r (i.e. pour chaque rationnel r de la forme $k/2^n$ où $n \geq 1$ et $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$), des ensembles $U_r \in \mathcal{L}^c$ et $B_r \in \mathcal{L}$ tels que

- (1) $A \subset U_r \subset B_r \subset B^c$ et
- (2) $B_r \subset U_s$ si $r < s$.

Comme à l'habitude, on définit $f: X \rightarrow [0, 1]$ comme suit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ n'appartient à aucun } U_r; \\ \inf\{r : x \in U_r\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors il est clair que $f(A) = \{0\}$ et $f(B) = \{1\}$ et, de plus, on a

- a) $f(x) \geq r$ si $x \notin B_r$;
- b) $f(x) \leq r$ si $x \in U_r$;
- c) $r \leq f(x) \leq s$ si $x \in U_s \setminus B_r$.

À l'aide des propriétés précédentes, nous allons montrer que $f \in C_b(\mathcal{L})$, ce qui terminera la preuve. Pour ce faire, prenons $\varepsilon > 0$. Par la suite, choisissons un entier $n \geq 1$ tel que $1/2^{n-1} < \varepsilon$ et posons $V_1 = U_{1/2^n}$, $V_i = U_{i/2^n} \setminus B_{(2i-3)/2^{n+1}}$ ($i = 2, \dots, 2^n - 1$) et $V_{2^n} = B_{(2^{n+1}-3)/2^{n+1}}^c$. Alors on a que $V_i \in \mathcal{L}^c \forall i$ et $\bigcup V_i = X$. Finalement, on vérifie facilement que $\sup_{x, y \in V_i} |f(x) - f(y)| \leq 3/2^{n+1} < 1/2^{n-1} < \varepsilon \forall i$, d'où $f \in C_b(\mathcal{L})$. Cela complète la preuve. $\square$

Remarque 3.8. Ce résultat a été montré par Alexandroff dans [1, p. 317] mais seulement dans le cas où $\mathcal{L}$ est un δ -pavé de X . Il est à noter que dans son résultat, Alexandroff utilisait la notion de fonction $\mathcal{L}$ -continue qui, dans ce cas, est équivalente à notre notion de fonction $\mathcal{L}$ -uniformément continue. (Voir remarque 3.3 b).)

Comme corollaires de notre théorème, nous obtenons les deux formes du lemme d'Urysohn les plus connues dans les livres de topologie et d'analyse.

Corollaire 3.9. Soit X un espace topologique normal et soit A et B deux fermés disjoints de X . Alors $\exists f \in C_b(X, R)$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f(A) = \{0\}$ et $f(B) = \{1\}$.

Preuve. On a qu'à poser $\mathcal{L} = \{\text{fermés de } X\}$ et on sait que $C_b(\mathcal{L}) = C_b(X, R)$. Puisque $\mathcal{L}$ est normal, on utilise le théorème 3.7 pour obtenir le résultat. $\square$

Corollaire 3.10. Soit X un espace topologique localement compact séparé et soit $K \subset X$ un compact et $U \subset X$ un ouvert tels que $K \subset U$. Alors il existe une fonction continue à support compact $f: X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(K) = \{1\}$ et $f(U^c) = \{0\}$.

Preuve. Soit $\mathcal{L}$ tel que défini dans l'exemple 3.4 b). Alors il est connu que $\mathcal{L}$ est normal et, de plus, on sait que $C_b(\mathcal{L}) = \{f: X \rightarrow R: f \text{ est continue et } \forall \varepsilon > 0, \exists T, \text{ un compact dans } X, \text{ tel que } \sup_{x, y \in T^c} |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$. Prenons maintenant V , un ouvert de X , tel que $\bar{V}$ est compact et $K \subset \bar{V} \subset U$. Alors $K, V^c \in \mathcal{L}$ et $K \cap V^c = \emptyset$. Par le théorème 3.7, $\exists f \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f(K) = \{1\}$ et $f(V^c) = \{0\}$. Puisque $\bar{V}$ est compact, on a que f est à support compact et, comme $V \subset U$, on a $f(U^c) = \{0\}$, ce qui termine la preuve. $\square$

Définition 3.11. Une classe $\mathcal{V}$ de fonctions réelles bornées définies sur X est dite $\mathcal{L}$ -séparante si $\forall A, B \in \mathcal{L}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $\exists f \in \mathcal{V}$ telle que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Proposition 3.12.

- a) Si $\mathcal{V}$ est fermée sous l'opération $f + a$ (où $f \in \mathcal{V}$, $a \geq 0$), alors $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante ssi $\mathcal{V}^+ = \{f \in \mathcal{V}: f \geq 0\}$ est $\mathcal{L}$ -séparante.
- b) Si $\mathcal{V}$ est soit une algèbre ou soit un treillis fermé sous les opérations af et $f + a$ (où $f \in \mathcal{V}$, $a \in R$), alors $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante ssi $R\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante.
- c) $C_b(\mathcal{L})$ est $\mathcal{L}$ -séparante ssi $\mathcal{L}$ est normal.

Preuve. a) Or, il est clair que si $\mathcal{V}^+$ est $\mathcal{L}$ -séparante, il en est de même pour $\mathcal{V}$. Afin de montrer la réciproque, prenons $A, B \in \mathcal{L}$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Puisque $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante, $\exists f \in \mathcal{V}$ telle que $\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = \emptyset$. Choisissons maintenant $a \geq 0$ tel que $f + a \geq 0$. Alors $f + a \in \mathcal{V}^+$ et $(f + a)(A) \cap (f + a)(B) = \emptyset$. Cela montre que $\mathcal{V}^+$ est $\mathcal{L}$ -séparante.

b) La condition suffisante étant évidente, il nous reste seulement à montrer la réciproque. Pour ce faire, supposons premièrement que $\mathcal{V}$ est une algèbre et posons $W = \{f + a: f \in \mathcal{V}; a \in R\}$. Alors W est dense dans $R\mathcal{V}$ et puisque $R\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante et que la distance entre deux sous-espaces compacts disjoint de R est strictement positive, on déduit que W est $\mathcal{L}$ -séparante. Par la suite, on conclut que $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante car les translations respectives de deux ensembles compacts disjoints de R sont encore disjointes.

Supposons maintenant que $\mathcal{V}$ est un treillis fermé sous les opérations af et $f + a$ (où $f \in \mathcal{V}$, $a \in R$). Alors $\mathcal{V}^0 = \{f^0: f \in \mathcal{V}\}$ est un treillis possédant la propriété d'interpolation sur X_0^0 et donc, par le théorème de Stone-Weierstrass, $\mathcal{V}^0$ est dense dans $(C_b(X_0^0, R), \|\cdot\|_\infty)$. Puisque $R\mathcal{V}$ est la classe des fonctions réelles sur X qui admettent une extension continue sur X_0^0 (voir proposition 2.3), on en déduit que $\mathcal{V}$ est dense dans $(R\mathcal{V}, \|\cdot\|_\infty)$. Ainsi, le fait que $R\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante entraîne que $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante.

c) Si $\mathcal{L}$ est normal, alors par le théorème 3.7, $C_b(\mathcal{L})$ est $\mathcal{L}$ -séparante. Réciproquement, supposons que $C_b(\mathcal{L})$ est $\mathcal{L}$ -séparante. Alors, si $A, B \in \mathcal{L}$ sont tels que $A \cap B = \emptyset$, $\exists f \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = \emptyset$. En vertu de la proposition 3.5b), $\exists U, V \in \mathcal{L}^c$ tels que $A \subset U, B \subset V$ et $\overline{f(U)} \cap \overline{f(V)} = \emptyset$. Ainsi $U \cap V = \emptyset$ et donc $\mathcal{L}$ est normal, ce qui complète la preuve de c). $\square$

4. Une nouvelle méthode de construction du compactifié de Wallman et applications. Durant le développement de cette section, il sera supposé que $\mathcal{L}$ est un pavé d'un ensemble X . Rappelons maintenant qu'un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ est dit un $\mathcal{L}$ -filtre si

- i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- ii) $\mathcal{F}$ est fermé sous l'intersection finie et
- iii) $\forall A \in \mathcal{F}$ et $\forall B \in \mathcal{L}$ tels que $A \subset B$, on a $B \in \mathcal{F}$.

Lorsque $\mathcal{L}$ est normal, désignons par $W(\mathcal{L})$ la classe de tous les $\mathcal{L}$ -filtres maximaux et munissons $W(\mathcal{L})$ de la topologie T_W ayant comme base pour les fermés les ensembles de la forme $W(A) = \{\mathcal{F} \in W(\mathcal{L}) : A \in \mathcal{F}\}$ (où $A \in \mathcal{L}$). Alors, il est connu que $\langle W(\mathcal{L}), T_W \rangle$ est un espace compact séparé. (Ce fait peut également être déduit du théorème 4.1.) Il est également connu que si $\mathcal{L}$ est *disjonctif* (i.e. $\forall x \in X$ et $\forall A \in \mathcal{L}$ tels que $x \in A^c$, $\exists B \in \mathcal{L}$ tel que $x \in B$ et $A \cap B = \emptyset$), la fonction $\phi: X \rightarrow W(\mathcal{L})$ donnée par $\phi(x) = \{A \in \mathcal{L} : x \in A\}$ $\forall x \in X$, est telle que $\phi(X)$ est dense dans $W(\mathcal{L})$ (voir, par exemple [5, p. 138]) et $C_b(\mathcal{L})$ est précisément la classe de toutes les fonctions réelles bornées sur X qui admettent une (unique) extension continue sur $W(\mathcal{L})$ (voir [9, p. 605]). Il est à noter que l'hypothèse « $\mathcal{L}$ est normal» n'intervient, dans ce qui précède, que pour nous assurer que $W(\mathcal{L})$ est un espace séparé, ce qui est une qualité fort naturelle à exiger sur presque tous les espaces topologiques. Cette hypothèse sera également utilisée dans l'étape V de la preuve du théorème 4.1.

Dans les prochaines pages, nous allons montrer et ce, en utilisant notre compactifié X_V^0 , que les conclusions tirées dans le paragraphe précédent demeurent valides même si $\mathcal{L}$ n'est pas disjonctif. Nous allons ensuite utiliser nos techniques pour en déduire de nouveaux résultats sur le compactifié de Wallman. Auparavant, voici un théorème qui montre comment il est possible de construire explicitement $W(\mathcal{L})$ à l'aide de X_V^0 , où $\mathcal{V}$ est une classe de fonctions bien choisie.

Théorème 4.1. *Supposons que $\mathcal{L}$ est normal et $\forall A, B \in \mathcal{L}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, choisissons une fonction $f_{A,B} \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $0 \leq f_{A,B} \leq 1$, $f_{A,B}(A) = 1$ et $f_{A,B}(B) = 0$. (Le choix de ces fonctions est possible en vertu du théorème 3.7.) De plus, désignons par $\mathcal{V}$ la classe de toutes ces fonctions choisies et $\forall h \in X_V^0$, désignons par $\mathcal{F}_h$ l'ensemble de tous les $A \in \mathcal{L}$ tels que $h(f_{A,B}) = 1 \forall B \in \mathcal{L}$ avec $A \cap B = \emptyset$. Alors*

- a) $\{f_h : h \in X_V^0\}$ est précisément l'ensemble des $\mathcal{L}$ -filtres maximaux i.e. $\{\mathcal{F}_h : h \in X_V^0\} = W(\mathcal{L})$ et
- b) La fonction $\psi: X_V^0 \rightarrow W(\mathcal{L})$ définie par $\psi(h) = \mathcal{F}_h \forall h \in X_V^0$ est un homéomorphisme.

Preuve. Nous allons montrer notre résultat en cinq étapes.

Étape I. *Étant donné $h \in X_V^0$, on a que $\mathcal{F}_h$ est un filtre.*

Preuve. $\emptyset \notin \mathcal{F}_h$ puisque sinon, on aurait $h(f_{\emptyset, X}) = 1$ i.e. $h(0) = 1$ ce qui est absurde.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}_h$ est fermé sous l'intersection finie. Si on suppose le contraire, $\exists A, B \in \mathcal{F}_h$ tels que $A \cap B \notin \mathcal{F}_h$ et par la suite, $\exists D \in \mathcal{L}$ tel que $(A \cap B) \cap D = \emptyset$ et $h(f_{A \cap B, D}) < 1$. Choisissons une suite $\{x_\alpha\} \subset X$ de telle sorte que $h_{x_\alpha}(f) \rightarrow h(f) \forall f \in \mathcal{V}$. Puisque $h(f_{A \cap B, D}) < 1$, on peut choisir $\delta \in]0, 1[$ et un index α_1 tel que

$$x_\alpha \in Y = \{x \in X : f_{A \cap B, D}(x) < \delta\} \quad \forall \alpha \geq \alpha_1.$$

Mais $\overline{f_{A \cap B, D}(Y)} \cap \overline{f_{A \cap B, D}(A \cap B)} = \emptyset$. Ainsi, par la proposition 3.5b), $\exists E \in \mathcal{L}$ avec $Y \subset E$ et $E \cap (A \cap B) = \emptyset$ et de plus $x_\alpha \in E \forall \alpha \geq \alpha_1$. Maintenant, puisque $A \cap (E \cap B) = \emptyset$ et $A \in \mathcal{F}_h$, alors $H(f_{A, E \cap B}) = 1$ et donc $\exists \alpha_2$ tel que

$$x_\alpha \in Z = \{x \in X : f_{A, E \cap B}(x) > \delta\} \quad \forall \alpha \geq \alpha_2.$$

Puisque $\overline{f_{A, E \cap B}(Z)} \cap \overline{f_{A, E \cap B}(E \cap B)} = \emptyset$ alors, toujours par la proposition 3.5b), $\exists F \in \mathcal{L}$ tel que $Z \subset F$ et $F \cap (E \cap B) = \emptyset$. De plus, on a $x_\alpha \in F \forall \alpha \geq \alpha_2$. Choisissons α_0 tel que $\alpha_0 \geq \alpha_1$ et $\alpha_0 \geq \alpha_2$. Alors $x_\alpha \in F \cap E \forall \alpha \geq \alpha_0$ et comme $(F \cap E) \cap B = \emptyset$, on a $h(f_{B, F \cap E}) = 0$, ce qui contredit le fait que $B \in \mathcal{F}_h$. Ainsi, $\mathcal{F}_h$ est fermé sous l'intersection finie.

Finalement, prenons $A \in \mathcal{F}_h$ et $B \in \mathcal{L}$ tels que $A \subset B$. Si on suppose que $B \notin \mathcal{F}_h$, alors il existe $D \in \mathcal{L}$ tel que $B \cap D = \emptyset$ et $h(f_{B, D}) < 1$. Choisissons $\delta \in]0, 1[$ et un index α_0 de telle sorte que

$$x_\alpha \in Y = \{x \in X : f_{B, D}(x) < \delta\} \quad \forall \alpha \geq \alpha_0.$$

Puisque $\overline{f_{B, D}(Y)} \cap \overline{f_{B, D}(B)} = \emptyset$ alors, $\exists E \in \mathcal{L}$ avec $Y \subset E$ et $E \cap B = \emptyset$. Ainsi, $x_\alpha \in E \forall \alpha \geq \alpha_0$ et comme $E \cap A = \emptyset$, nous en déduisons que $h(f_{A, E}) = 0$. Cela contredit le fait que $A \in \mathcal{F}_h$ et donc il faut que $B \in \mathcal{F}_h$.

La preuve de l'étape I est complète. $\square$

Étape II. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{L}$ -filtre, $\exists h \in X_V^0$ avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_h$.

Preuve. Si $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$, alors $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$, d'où $\exists x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Ainsi, $A_i \in \mathcal{F}_h \forall i$, d'où la famille d'ensemble de la forme

$$S_A = \{h \in X_V^0 : A \in \mathcal{F}_h\} = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{L}, \\ A \cap B = \emptyset}} \{h \in X_V^0 : h(f_{A, B}) = 1\} \quad (\text{où } A \in \mathcal{F})$$

est une famille de fermés de X_V^0 qui possède la propriété d'intersection finie. Puisque X_V^0 est compact, alors

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} S_A \neq \emptyset,$$

d'où $\exists h \in X_V^0$ telle que $h \in S_A \forall A \in \mathcal{F}$ i.e. $A \in \mathcal{F}_h \forall A \in \mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_h$, ce qui termine la preuve de l'étape II. $\square$

Étape III. Si $h, h' \in X_V^0$ sont telles que $\mathcal{F}_h \subset \mathcal{F}_{h'}$, alors $h = h'$ (et donc $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_{h'}$).

Preuve. Choisissons deux suites $\{x_\alpha\}$ et $\{y_\beta\}$ dans X telles que $h_{x_\alpha}(f) \rightarrow h(f)$ et $h_{y_\beta}(f) \rightarrow h'(f) \forall f \in \mathcal{V}$. Si on suppose que $h \neq h'$, $\exists A, B \in \mathcal{L}$ tels que $A \cap B = \emptyset$ et $h(f_{A, B}) \neq h'(f_{A, B})$. Admettons sans perte de généralité que $h(f_{A, B}) < h'(f_{A, B})$ et choisissons $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in R$ avec $h(f_{A, B}) < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < h'(f_{A, B})$. Posons maintenant $Y = f_{A, B}^{-1}([0, \delta_1])$, $Z = f_{A, B}^{-1}([\delta_2, 1])$ et $W = f_{A, B}^{-1}([\delta_3, 1])$. Alors $\exists \alpha_0, \beta_0$, tel que $x_\alpha \in Y \forall \alpha \geq \alpha_0$ et $y_\beta \in W \forall \beta \geq \beta_0$. Puisque $\overline{f_{A, B}(Y)} \cap \overline{f_{A, B}(Z)} = \emptyset$ $\exists D \in \mathcal{L}$ de telle sorte que $Y \subset D$ et $D \cap Z = \emptyset$. Ainsi, $x_\alpha \in D \forall \alpha \geq \alpha_0$, d'où $h(f_{D, E}) = 1 \forall E \in \mathcal{L}$ avec $E \cap D = \emptyset$, ce qui montre que $D \in \mathcal{F}_h$. D'autre part, $\overline{f_{A, B}(D)} \cap \overline{f_{A, B}(W)} = \emptyset$ et donc $\exists F \in \mathcal{L}$ tel que $W \subset F$ et $F \cap D = \emptyset$. De plus, $y_\beta \in F \forall \beta \geq \beta_0$, d'où $h'(f_{D, F}) = 0$, ce qui montre que $D \notin \mathcal{F}_{h'}$. Par conséquent, le fait que $D \in \mathcal{F}_h$ et $D \notin \mathcal{F}_{h'}$ entre en contradiction avec l'inclusion $\mathcal{F}_h \subset \mathcal{F}_{h'}$. On doit donc avoir $h = h'$ et la preuve de l'étape III est maintenant complète. $\square$

En vertu des étapes I, II, III, on déduit que $\{\mathcal{F}_h : h \in X_V^0\} = W(\mathcal{L})$.

Étape IV. La fonction $\psi: X_Y^0 \rightarrow W(\mathcal{L})$ définie par $\psi(h) = \mathcal{F}_h \forall h \in X_Y^0$ est un homéomorphisme.

Preuve. Or nous savons déjà que ψ est une bijection. Il nous reste donc seulement à montrer que ψ est continue car la continuité de ψ^{-1} est une conséquence directe du fait que X_Y^0 est compact et $W(\mathcal{L})$ est séparé.

Pour vérifier que ψ est continue, il suffit de vérifier que $\psi^{-1}(W(A))$ est fermé dans X_Y^0 lorsque $A \in \mathcal{L}$. Or

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(W(A)) &= \{h \in X_Y^0 : \psi(h) \in W(A)\} \\ &= \{h \in X_Y^0 : \mathcal{F}_h \in W(A)\} \\ &= \{h \in X_Y^0 : A \in \mathcal{F}_h\} \\ &= \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{L} \\ A \cap B = \emptyset}} \{h \in X_Y^0 : h(f_{A,B}) = 1\} \end{aligned}$$

qui, on le sait, est fermé dans X_Y^0 .

Cela complète la preuve de l'étape IV et du présent théorème. $\square$

Corollaire 4.2. Si $\mathcal{L}$ est normal alors $\forall x \in X$, désignons par $\phi(x)$ la classe des ensembles $A \in \mathcal{L}$ tels que $x \in U \forall U \in \mathcal{L}^c$ avec $A \subset U$.

Alors la fonction $\phi: X \rightarrow W(\mathcal{L})$ ainsi définie, est telle que $\phi(X)$ est dense dans $W(\mathcal{L})$

Preuve. On sait que $\{h_x : x \in X\}$ est dense dans X_Y^0 et donc, en vertu du théorème 4.1, $\{\mathcal{F}_{h_x} : x \in X\}$ est dense dans $W(\mathcal{L})$. Ainsi, nous aurons notre résultat si nous réunissons à montrer que $\phi(x) = \mathcal{F}_{h_x} \forall x \in X$.

Soit $x \in X$. Alors, nous savons que $\mathcal{F}_{h_x}$ est l'ensemble de tous les $A \in \mathcal{L}$ tels que $f_{A,B}(x) = 1 \forall B \in \mathcal{L}$ avec $A \cap B = \emptyset$. Maintenant, si on prend $A \in \mathcal{F}_{h_x}$ et $U \in \mathcal{L}^c$ tels que $A \subset U$, alors on a que $f_{A,U^c}(x) = 1$, d'où $x \notin U^c$ i.e. $x \in U$. Ainsi $\mathcal{F}_{h_x} \subset \phi(x)$. Réciproquement, prenons $A \in \phi(x)$ et choisissons $B \in \mathcal{L}$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Par la proposition 3.5 b), on peut choisir, et ce pour chaque $\delta \in]0, 1[$, un ensemble $U \in \mathcal{L}^c$ de telle sorte que $A \subset U \subset f_{A,B}^{-1}(]0, 1[)$. Ainsi, $x \in U$, d'où $f_{A,B}(x) > \delta$. Comme $\delta \in]0, 1[$ est arbitraire, on doit donc avoir $f_{A,B}(x) = 1$, ce qui montre que $A \in \mathcal{F}_{h_x}$. Par conséquent, $\phi(x) = \mathcal{F}_{h_x}$, ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque 4.3. Si $\mathcal{L}$ est normal et en plus disjonctif, on montre facilement que $\forall A \in \mathcal{L}$, on a $x \in A$ ssi $x \in U \forall U \in \mathcal{L}^c$ avec $A \subset U$.

En effet, soit $A \in \mathcal{L}$. Alors, si $x \in A$, il est clair que $x \in U \forall U \in \mathcal{L}^c$ avec $A \subset U$. Réciproquement, supposons que $x \notin A$. Alors grâce au fait que $\mathcal{L}$ est disjonctif, $\exists B \in \mathcal{L}$ tel que $x \in B$ et $A \cap B = \emptyset$. Ainsi, $A \subset B^c \in \mathcal{L}^c$ et $x \notin B^c$, ce qui montre qu'il est faux de dire que $x \in U \forall U \in \mathcal{L}^c$ avec $A \subset U$. $\square$

Par conséquent, dans ce cas, la fonction ϕ du corollaire 4.2 devient $\phi(x) = \{A \in \mathcal{L} : x \in A\} \forall x \in X$, et on retrouve ainsi la fonction bien connue de X dans $W(\mathcal{L})$ dont il a été question au début de cette section.

Théorème 4.4. Si $\mathcal{L}$ est normal, soit $\phi: X \rightarrow W(\mathcal{L})$ la fonction telle que définie dans le corollaire 4.2 i.e. $\phi(x) = \{A \in \mathcal{L} : x \in U \quad \forall U \in \mathcal{L}^c \text{ avec } A \subset U\} \quad \forall x \in X$.

Alors une fonction $f: X \rightarrow R$ appartient à $C_b(\mathcal{L})$ ssi $\exists \tilde{f} \in C_b(W(\mathcal{L}), R)$ telle que $f = \tilde{f} \circ \phi$. (Autrement dit $C_b(\mathcal{L})$ est précisément l'ensemble des fonctions réelles bornée sur X qui admettent une extension continue sur $W(\mathcal{L})$.)

Preuve. Désignons par $\mathcal{V}$ la classe de fonctions telle définie dans l'énoncé du théorème 4.1. Alors, en vertu de ce théorème et du corollaire 4.2, on a que $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ et $(W(\mathcal{L}), \phi)$ sont topologiquement équivalents. Ainsi, la proposition 2.3 nous permet de dire que $R\mathcal{V}$ est précisément l'ensemble de toutes les fonctions bornées $f: X \rightarrow R$ qui admettent une extension continue sur $W(\mathcal{L})$. Pour obtenir notre résultat, il suffit donc de montrer que $R\mathcal{V} = C_b(\mathcal{L})$, ce que nous ferons maintenant.

Puisque $\mathcal{V} \subset C_b(\mathcal{L})$ et que $\langle C_b(\mathcal{L}), \|\cdot\|_{\infty} \rangle$ est une algèbre de Banach, il est clair que $R\mathcal{V} \subset C_b(\mathcal{L})$. Réciproquement, choisissons $f \in C_b(\mathcal{L})$ et montrons que $f \in R\mathcal{V}$ i.e. vérifions que f admet une extension continue sur $W(\mathcal{L})$. Pour ce faire, soit $\mathcal{F} \in W(\mathcal{L})$. Alors $\forall A \in \mathcal{F}$, on a que $A \neq \emptyset$ et donc on peut prendre un point $x_A \in A$. Or, $\mathcal{F}$ peut être considérée comme étant une suite de sous-ensembles de X , en ce sens que deux éléments $A, B \in \mathcal{F}$ sont tels que $A \geq B$ lorsque $A \subset B$. Ainsi $\{f(x_A) : A \in \mathcal{F}\}$ est une suite dans R . Nous effectuons la suite de la preuve en trois étapes.

Étape I. La suite $\{f(x_A) : A \in \mathcal{F}\}$ converge vers un réel que nous noterons $\tilde{f}(\mathcal{F})$, et donc nous avons en main une fonction $\tilde{f}: W(\mathcal{L}) \rightarrow R$. (À noter que dans la preuve de cette étape, il est également montré que la définition même de $\tilde{f}(\mathcal{F})$ est indépendante du choix des points $x_A \in A$, et ce $\forall A \in \mathcal{F}$.)

Preuve. Puisque $f \in C_b(\mathcal{L})$, alors étant donné $\varepsilon > 0$, $\exists \{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{L}^c$ telle que $\bigcap_{i=1}^n U_i = X$ et $\sup_{x,y \in U_i} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Montrons maintenant que $\exists A \in \mathcal{F}$ et $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $A \subset U_i$. Or, si on suppose le contraire, cela entraîne que $A \cap U_i^c \neq \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{F}$ et $\forall i$ et donc $U_i^c \in \mathcal{F} \quad \forall i$, d'où $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n U_i^c \in \mathcal{F}$, ce qui est absurde. Ainsi, $\exists A \in \mathcal{F}$ et $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ avec $A \subset U_i$ et donc $\forall B \in \mathcal{F}$ tel que $B \geq A$ (i.e. $B \subset A$), on a $B \subset U_i$, d'où $\sup_{x,y \in B} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $\{f(x_A) : A \in \mathcal{F}\}$ converge dans R , ce qui termine la preuve de l'étape I.

Étape II. $\tilde{f}$ est continue sur $W(\mathcal{L})$.

Preuve. Soit $\mathcal{F} \in W(\mathcal{L})$ et montrons que $\tilde{f}$ est continue au point $\mathcal{F}$. En vertu de la proposition 3.5 b) et de la définition de $\tilde{f}$, on a que si $\varepsilon > 0$ est donné, $\exists A \in \mathcal{F}$ et $\exists U \in \mathcal{L}^c$ tels que

$$A \subset \{x \in X : |f(x) - \tilde{f}(\mathcal{F})| < \varepsilon/2\} \subset U \subset \{x \in X : |f(x) - \tilde{f}(\mathcal{F})| < \varepsilon\}.$$

Puisque $A \cap U^c = \emptyset$ et $A \in \mathcal{F}$, alors $U^c \notin \mathcal{F}$. Maintenant, l'ensemble $(W(U^c))^c = W(\mathcal{L}) \setminus W(U^c)$ qui est donné par

$$(W(U^c))^c = \{\mathcal{F}' \in W(\mathcal{L}) : U^c \notin \mathcal{F}'^c\}$$

est un voisinage ouvert de $\mathcal{F}$ dans $W(\mathcal{L})$. De plus, si $\mathcal{F}' \in (W(U^c))^c$, $\exists B \in \mathcal{F}'$ tel que $B \cap U^c = \emptyset$ et donc, $\forall D \in \mathcal{F}'$ avec $D \geq B$ (i.e. $D \subset B$), nous avons

$$D \subset B \subset \{x \in X : |f(x) - \tilde{f}(\mathcal{F})| < \varepsilon\}.$$

Ainsi, si $D \in \mathcal{F}'$ est tel que $D \geq B$, on a $|f(x) - \tilde{f}(\mathcal{F})| < \varepsilon \quad \forall x \in D$. De cela, on déduit que $|\tilde{f}(\mathcal{F}') - \tilde{f}(\mathcal{F})| \leq \varepsilon \quad \forall \mathcal{F}' \in (W(U^c))^c$, ce qui complète l'étape II.

Étape III. $\tilde{f} \circ \phi = f$.

Preuve. Soit $x \in X$ et montrons que si $\varepsilon > 0$, alors $|f(\phi(x)) - f(y)| < \varepsilon$. Or, grâce à la proposition 3.5 b) et à la définition de $\tilde{f} \exists A \in \phi(x)$ et $\exists U \in \mathcal{L}^c$ tels que

$$A \subset \{y \in X : |\tilde{f}(\phi(x)) - f(y)| < \varepsilon/2\} \subset U \subset \{y \in X : |\tilde{f}(\phi(x)) - f(y)| < \varepsilon\}.$$

Puisque $A \in \phi(x)$ et $A \subset U$, alors $x \in U$. Ainsi, $|\tilde{f}(\phi(x)) - f(x)| < \varepsilon$ et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a que $\tilde{f}(\phi(x)) = f(x)$, et la preuve de l'étape III est complète.

En vertu des étapes I, II et III, on a que f admet une (unique) extension continue sur $W(\mathcal{L})$ (i.e. $f \in RV$), ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Corollaire 4.5. *Sous les hypothèses du théorème 4.4, soit Y un espace compact séparé et $q: X \rightarrow Y$ une fonction. Alors il existe une unique fonction continue $Q: W(\mathcal{L}) \rightarrow Y$ telle que $Q \circ \phi = q$ ssi $\forall \{V_i\}_{i=1}^m$, un recouvrement ouvert de Y , $\exists \{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{L}^c$ telle que*

- (1) $\bigcap_{i=1}^n U_i = X$ et
- (2) chaque ensemble de la forme $q(U_i)$ est inclus dans au moins un V_j .

Preuve. En vertu du théorème 2.5 et de la preuve du théorème 4.4, nous avons qu'il existe une fonction continue $Q: W(\mathcal{L}) \rightarrow Y$ telle que $Q \circ \phi = q$ ssi $g \circ q \in C_b(\mathcal{L}) \forall g \in C_b(Y, R)$.

Afin de prouver la condition nécessaire, soit $\{V_i\}_{i=1}^m$ un recouvrement ouvert de Y . Or, il est clair que $\{(W(A))^c : A \in \mathcal{L}\}$ est une base pour les ouverts de $W(\mathcal{L})$. Puisque $W(\mathcal{L})$ est un espace compact séparé (et donc normal) et que Q est continue sur $W(\mathcal{L})$, $\exists \{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{L}$ telle que

$$i) \quad W(\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^n (W(A_i))^c \text{ et}$$

$$ii) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists j_i \in \{1, \dots, m\} \text{ avec } Q(\overline{(W(A_i))^c}) \subset V_{j_i}.$$

Si nous posons $B_i = \{x \in X : \phi(x) \in \overline{(W(A_i))^c}\}$ ($i = 1, \dots, n$), on a $D_i = Q(\overline{\phi(B_i)}) \subset V_{j_i} \forall i$. Grâce au lemme d'Uryshon, $\exists g_i \in C_b(Y, R)$ telle que $g_i(D_i) = \{1\}$ et $g_i(V_{j_i}^c) = \{0\}$. Donc, si $E_i = \{x \in X : q(x) \in V_{j_i}^c\}$, alors $(g_i \circ q)(B_i) = \{1\}$ et $(g_i \circ q)(E_i) = \{0\}$. Puisque $g_i \circ q \in C_b(\mathcal{L})$, alors par la proposition 3.5 b), $\exists U_i \in \mathcal{L}^c$ telle que $B_i \subset U_i$ et $U_i \cap E_i = \emptyset$. De plus, $X = \bigcap_{i=1}^n U_i$ (car $W(\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^n ((W(A_i))^c)$ et comme $g_i(V_{j_i}^c) = \{0\}$ on a que $q(U_i) \subset V_{j_i}$).

Pour montrer la réciproque, il suffit de vérifier que $g \circ q \in C_b(\mathcal{L}) \forall g \in C_b(Y, R)$. Étant donné $g \in C_b(Y, R)$ et $\varepsilon > 0$, soit $\{W_j\}_{j=1}^m$ un recouvrement ouvert de $g(Y)$ tel que $\sup_{x, y \in W_j} |x - y| < \varepsilon \forall j$. Si nous posons $V_j = g^{-1}(W_j)$, alors $\{V_j\}_{j=1}^m$ est un recouvrement ouvert de Y . Par hypothèse, $\exists \{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{L}^c$ telle que

$$(1) \quad X = \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ et}$$

$$(2) \quad \text{chaque ensemble de la forme } q(U_i) \text{ est contenu dans au moins un } V_j.$$

Par conséquent, $\sup_{x, y \in W_j} |(g \circ q)(x) - (g \circ q)(y)| < \varepsilon \forall i$, d'où $g \circ q \in C_b(\mathcal{L})$.

La preuve est maintenant complète. $\square$

Remarque 4.6. Le théorème 4.4 et le corollaire 4.5 généralisent les principaux résultats démontrés par Frink dans [9, pp. 605–606], au cas où $\mathcal{L}$ n'est pas nécessairement disjointif. De plus, dans un contexte où L est un δ -pavé normal de X , le théorème 4.4 est

également une généralisation du théorème principal dans [15], lequel a été démontré par Alan Sultan.

Dans les prochaines pages, nous obtiendrons un théorème dont deux corollaires généralisent deux résultats démontrés par Alan Sultan, le premier ayant été publié dans [15, p. 364] et le deuxième dans [16, p.62]. Mais auparavant, nous avons besoin de la proposition suivante:

Proposition 4.7. *Si $\mathcal{V} \subset C_b(\mathcal{L})$ est $\mathcal{L}$ -séparante, alors $\mathcal{L}$ est normal et de plus $\forall f \in \mathcal{L}$, si nous dénotons par $\bar{f}$ l'unique extension continue de f à $W(\mathcal{L})$, nous avons que la classe de fonctions $\bar{\mathcal{V}} = \{\bar{f} : f \in \mathcal{V}\}$ sépare les points de $W(\mathcal{L})$.*

Preuve. Puisque $\mathcal{V} \subset C_b(\mathcal{L})$ est $\mathcal{L}$ -séparante, alors il en est de même pour $C_b(\mathcal{L})$. Ainsi, par la proposition 3.13, on a que $\mathcal{L}$ est normal. Choisissons maintenant deux éléments distincts $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in W(\mathcal{L})$. Alors $\exists A_i \in \mathcal{F}_i$ ($i = 1, 2$) avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Or le fait que $\mathcal{V}$ soit $\mathcal{L}$ -séparante entraîne que $\exists f \in \mathcal{V}$ telle que $\bar{f}(A_1) \cap \bar{f}(A_2) = \emptyset$. Comme dans la preuve du théorème 4.4, $\forall A \in \mathcal{F}_1$ et $\forall B \in \mathcal{F}_2$, choisissons des points $x_A \in A$ et $y_B \in B$. Alors $\bar{f}(\mathcal{F}_1) = \lim_A \bar{f}(x_A)$ et $\bar{f}(\mathcal{F}_2) = \lim_B \bar{f}(y_B)$. Mais $\bar{f}(x_A) \in \bar{f}(A_1)$ $\forall A \in \mathcal{F}_1$ avec $A \subset A_1$ et $\bar{f}(y_B) \in \bar{f}(A_2)$ $\forall B \in \mathcal{F}_2$ avec $B \subset A_2$. Ainsi $\bar{f}(\mathcal{F}_i) \in \bar{f}(A_i)$ ($i = 1, 2$) et donc, $\bar{f}(\mathcal{F}_1) \neq \bar{f}(\mathcal{F}_2)$. La preuve est complète. $\square$

Théorème 4.8. *Soit*

- i) T un espace compact séparé,
- ii) $k: X \rightarrow T$ une fonction continue telle que $k(X)$ est dense dans T , et
- iii) $\mathcal{V}$ une classe de fonctions dans $C_b(\mathcal{L})$ telle que chaque fonction $f \in \mathcal{V}$ admet une extension continue f^T à T , avec $f^T \circ k = f$

Si $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante et $\mathcal{V}^T = \{f^T : f \in \mathcal{V}\}$ sépare les points de T , alors (T, k) et $(W(\mathcal{L}), \phi)$ sont topologiquement équivalents.

Preuve. En vertu du théorème 2.1, on a que (T, k) et $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ sont topologiquement équivalents. De plus, comme $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante, la proposition 4.7 nous assure que $\bar{\mathcal{V}} = \{\bar{f} : f \in \mathcal{V}\}$ sépare les points de $W(\mathcal{L})$ ($\bar{f}$ étant l'extension continue de $f \in \mathcal{V}$ à $W(\mathcal{L})$). Ainsi, toujours grâce au théorème 2.1, on peut également affirmer que $(W(\mathcal{L}), \phi)$ et $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ sont topologiquement équivalents. Par conséquent, il en est de même pour (T, k) et $(W(\mathcal{L}), \phi)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Corollaire 4.9. *Si $\mathcal{V} \subset C_b(\mathcal{L})$ est $\mathcal{L}$ -séparante, alors $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ et $(W(\mathcal{L}), \phi)$ sont topologiquement équivalents et $R\mathcal{V} = C_b(\mathcal{L})$.*

Preuve. Chaque fonction $f \in \mathcal{V}$ admet une unique extension $f^0: X_{\mathcal{V}}^0 \rightarrow R$ telle que $f^0 \circ j = f$. De plus, $\mathcal{V}^0 = \{f^0 : f \in \mathcal{V}\}$ sépare les points de $X_{\mathcal{V}}^0$. Ainsi, $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ et $(W(\mathcal{L}), \phi)$ sont topologiquement équivalents en vertu du théorème précédent. Par conséquent, grâce au théorème 4.4 et à la proposition 2.3, nous avons que

$$C_b(\mathcal{L}) = \{g \circ \phi : g \in C_b(W(\mathcal{L}), R)\} = \{h \circ j : h \in C_b(X_{\mathcal{V}}^0, R)\} = R\mathcal{V},$$

ce qui complète la preuve. $\square$

Remarque 4.10. Si $\mathcal{L}$ est normal et si $A, B \in \mathcal{L}$ sont tels que $A \cap B = \emptyset$, alors, par le théorème 3.7, nous pouvons choisir une fonction $f_{A,B}: X \rightarrow [0, 1]$ dans $C_b(\mathcal{L})$ telle que $f_{A,B}(A) = \{1\}$ et $f_{A,B}(B) = \{0\}$. Ainsi, en désignant par $\mathcal{V}$ la classe de toutes

ces fonctions choisies, nous avons que $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante et donc le corollaire 4.9 nous redonne la partie b) du théorème 4.1. Par conséquent, dans le contexte de ce théorème, on déduit que $R\mathcal{V} = C_b(\mathcal{L})$.

Comme prochain corollaire du théorème 4.8, nous énonçons et démontrons un résultat permettant de comparer deux espaces dy type $W(\mathcal{L}_1)$ et $W(\mathcal{L}_2)$ lorsque $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des pavés de X tels que $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$.

Corollaire 4.11. *Soit $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux pavés de X tels que $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$, et supposons que $\mathcal{L}_1$ est normal. Alors $\mathcal{L}_2$ est normal et de plus, $(W(\mathcal{L}_1), \phi)$ et $(W(\mathcal{L}_2), \phi)$ sont topologiquement équivalents ssi $\forall A, B \in \mathcal{L}_2$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $\exists E, D \in \mathcal{L}_1$ tels que $A \subset E$, $B \subset D$ et $E \cap D = \emptyset$.*

Preuve. Premièrement, il est clair que $\mathcal{L}_2$ est normal. Supposons que $(W(\mathcal{L}_1), \phi)$ et $(W(\mathcal{L}_2), \phi)$ soient topologiquement équivalents. Alors, en vertu du théorème 4.4, on a

$$C_b(\mathcal{L}_1) = \{g \circ \phi : g \in C_b(W(\mathcal{L}_1), R)\} = \{h \circ \phi : h \in C_b(W(\mathcal{L}_2), R)\} = C_b(\mathcal{L}_2).$$

Prenons $A, B \in \mathcal{L}_2$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors, par le théorème 3.7, $\exists f \in C_b(\mathcal{L}_2) (= C_b(\mathcal{L}_1))$ telle que $f(A) = \{1\}$ et $f(B) = \{0\}$. En appliquant ensuite la proposition 3.5 b), on déduit que $\exists U \in \mathcal{L}_1^c$ tel que $\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{2}\} \subset U$ et $U \cap B = \emptyset$. Une second application de cette même proposition nous permet de trouver $V \in \mathcal{L}_1^c$ tel que $\{x \in X : f(x) \leq \frac{3}{4}\} \subset V$ et $V \cap A = \emptyset$. En posant $E = V^c$ et $D = U^c$, on a que $E, D \in \mathcal{L}_1$, $A \subset E$, $B \subset D$ et $E \cap D = \emptyset$.

Réciproquement, supposons que $\forall A, B \in \mathcal{L}_2$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $\exists E, D \in \mathcal{L}_1$ tels que $A \subset E$, $B \subset D$ et $E \cap D = \emptyset$. Alors, puisque $C_b(\mathcal{L}_2)$ est $\mathcal{L}_2$ -séparante (voir proposition 3.13 b)), on a que $C_b(\mathcal{L}_1)$ est $\mathcal{L}_2$ -séparante. De plus, comme $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$, il faut que $C_b(\mathcal{L}_1) \subset C_b(\mathcal{L}_2)$, d'où $C_b(\mathcal{L}_1) = C_b(\mathcal{L}_2)$ en vertu du corollaire 4.9. Finalement, $(W(\mathcal{L}_1), \phi)$ et $(W(\mathcal{L}_2), \phi)$ sont topologiquement équivalents et ce grâce au corollaire 2.2.

La preuve est complète. $\square$

Remarque 4.12. Dans l'énoncé de la proposition 4.7, du théorème 4.8 et des corollaires 4.9 et 4.11, il n'est pas supposé que $\mathcal{L}$ est disjonctif et donc, ces résultats ne peuvent être en aucune façon être démontrés à partir de ce qui a été publié jusqu'à maintenant sur le compactifié de Wallman. À noter également que, dans l'énoncé des trois premiers résultats, on aurait pu remplacer la condition « $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante» par la condition plus faible « $R\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}$ -séparante» et ce, en vertu du fait que $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ et $(X_{R\mathcal{V}}^0)$ sont topologiquement équivalents (voir théorème 2.4).

Le corollaire suivant du théorème 4.8 est une généralisation du corollaire 8 dans [16, p. 364]. Convenons tout d'abord que si $\mathcal{V}$ est une collection de fonctions réelles définies sur X , alors $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ désigne la classe des ensembles zéros des fonctions dans $\mathcal{V}$ (i.e. $\mathcal{Z}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(0) : f \in \mathcal{V}\}$).

Corollaire 4.13. *Soit $\mathcal{V}$ un treillis de fonctions réelles bornées sur X , fermé sous les opérations $(f - a) \vee 0$ et $(a - f) \vee 0$ (où $f \in \mathcal{V}$, $a \geq 0$).*

a) *Alors $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ est un pavé de X et $\mathcal{V} \subset C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$.*

b) *De plus, si*

i) *T est un espace compact,*

ii) *$k: X \rightarrow T$ est une fonction telle que $k(X)$ est dense dans T et*

iii) $\mathcal{V}$ satisfait les conditions suivantes:

- 1) chaque fonction $f \in \mathcal{V}$ admet une unique extension continue $f^T: T \rightarrow R$ avec $f^T \circ k = f$;
- 2) $\mathcal{V}^T = \{f^T: f \in \mathcal{V}\}$ sépare les points de T ;
- 3) $\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante,

alors (T, k) et $(W(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \phi)$ sont topologiquement équivalents.

Preuve. a) Vérifions premièrement que $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ est un pavé de X . Or, à noter que si $f \in \mathcal{V}$, on a

$$|f| = [(f - 0) \vee 0] \vee [(0 - f) \vee 0] \in \mathcal{V}.$$

Ainsi $\forall f, g \in \mathcal{V}$, on déduit que

$$f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) = (|f| \wedge |g|)^{-1}(0) \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})$$

et

$$f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (|f| \vee |g|)^{-1}(0) \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})$$

ce qui montre que $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ est fermé sous l'intersection finie et sous l'union finie. De plus, si $f \in \mathcal{V}$, alors f est bornée et donc $\exists M \geq 0$ tel que $f \leq M$. On a donc $0 = (f - M) \vee 0 \in \mathcal{V}$, d'où $X \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})$. Finalement, $\emptyset \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})$ car $1 = (1 - 0) \vee 0 \in \mathcal{V}$. (En fait, les fonctions constantes positives appartiennent à $\mathcal{V}$.) Par conséquent $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ est un pavé de X .

Montrons maintenant que $\mathcal{V} \subset C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$. Pour ce faire, observons que $\forall f \in \mathcal{V}$ telle que $f \geq 0$ et $\forall a, b \geq 0$ avec $a < b$, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty, b]) &= \{x \in X : [(b - f) \vee 0](x) \neq 0\} \in (\mathcal{Z}(\mathcal{V}))^c, \\ f^{-1}(]a, \infty]) &= \{x \in X : [(f - a) \vee 0](x) \neq 0\} \in (\mathcal{Z}(\mathcal{V}))^c \end{aligned}$$

et

$$f^{-1}(]a, b]) = f^{-1}(]a, \infty]) \cap f^{-1}(]-\infty, b]) \in (\mathcal{Z}(\mathcal{V}))^c,$$

d'où $f \in C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$. Ainsi, si $f \in \mathcal{V}$ est arbitraire, alors $f^+ = (f - 0) \vee 0 \in \mathcal{V}$ et $f^- = (0 - f) \vee 0 \in \mathcal{V}$, d'où $f^+, f^- \in C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$, en vertu de ce qui précède. Par conséquent, $f = f^+ - f^- \in C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$, ce qui montre que $\mathcal{V} \subset C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$.

b) En vertu de la partie a) de présent corollaire et du théorème 4.8, on peut conclure que (T, k) et $(W(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \phi)$ sont topologiquement équivalents.

La preuve du corollaire 4.13 est maintenant complète. $\square$

Remarques 4.14. a) Dans le corollaire 8 de [16, p. 364], la classe $\mathcal{V}$ utilisée est l'ensemble de toutes les fonctions $f: X \rightarrow R$ qui admettent une extension continue sur T . De plus, dans ce corollaire, il est supposé que pour chaque paire d'éléments $A, B \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})$ telle que $A \cap B = \emptyset$, $\exists f \in \mathcal{V}$ telle que $f(A) = \{1\}$ et $f(B) = \{0\}$. On voit que cette condition est plus restrictive que la condition 3) de notre corollaire et ce lorsque $\mathcal{V}$ n'est pas nécessairement une algèbre de Banach (par rapport à la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$) de fonctions réelles bornées sur X . À noter finalement qu'il aurait été possible de remplacer cette condition par la condition plus faible « $R\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante».

b) Lorsque $\mathcal{V}$ est un treillis de fonctions réelles bornées sur X qui est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparant et fermé sous les opérations $(f - \alpha) \vee 0$ et $(\alpha - f) \vee 0$ (où $f \in \mathcal{V}$, $\alpha \geq 0$), alors le corollaire 4.13 nous permet de conclure que $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ et $(W(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \phi)$ sont topologiquement équivalents. (En particulier, on a $R\mathcal{V} = C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$.)

Nous donnons maintenant deux exemples d'application du corollaire 4.13 qui ne peuvent être démontrés à l'aide du corollaire 8 dans [16, p. 364]. Notons cependant que le second de ces exemples a été obtenu par Brooks dans [6, p. 148] par des méthodes plus complexes.

Exemples 4.15. a) Désignons par $\mathcal{V}$ la classe des fonctions réelles continues linéaires par morceaux sur R dont la pente de chacun des segments de droite est un entier. Alors il est clair que $\mathcal{V}$ est un treillis fermé sous les opérations $(f - \alpha) \vee 0$ et $(\alpha - f) \vee 0$ (où $f \in \mathcal{V}$, $\alpha \geq 0$). De plus, on montre facilement mais fastidieusement que $\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante. Ainsi, en vertu de la partie b) des remarques 4.14, on a que $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ et $(W(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \phi)$ sont topologiquement équivalents, d'où $R\mathcal{V} = C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$ i.e. l'algèbre engendrée par $\mathcal{V}$ est dense dans $(C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \|\cdot\|_{\infty})$. Or, on peut vérifier sans problèmes que $C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$ contient l'ensemble des fonctions bornées uniformément continues sur R . Ainsi, si f est une telle fonction et si $\varepsilon > 0$, $\exists \{a_i\}_{i=1}^n \subset R$ et $\exists \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n_i} \subset \mathcal{V}$ telles que

$$\left\| f - \left(\sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^{n_i} f_{ij} \right) \right\|_{\infty} < \varepsilon.$$

À noter finalement que $\mathcal{V}$ n'est pas une algèbre de Banach par rapport à la norme uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$ et que l'on peut exhiber deux ensembles disjoints $A, B \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})$ tels qu'il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{V}$ avec $f(A) = \{1\}$ et $f(B) = \{0\}$.

b) Soit X un espace localement compact séparé et dénotons par $(\overline{X}, k)$ le compactifié un-point de X , et soit $\mathcal{V}$ la classe de toutes les fonctions de la forme $f + \alpha$ où $\alpha \in R$ et f appartient à la classe $C_c(X, R)$ de toutes les fonctions réelles continues à support compact sur X . Alors, évidemment, $\mathcal{V}$ est un treillis de fonctions fermé sous les opérations $(f - \alpha) \vee 0$ et $(\alpha - f) \vee 0$ (où $f \in \mathcal{V}$, $\alpha \geq 0$). De plus $\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante en vertu du lemme d'Urysohn. Finalement, chaque fonction $f \in \mathcal{V}$ admet une extension continue $\bar{f}$ sur $\overline{X}$ et l'ensemble $\overline{\mathcal{V}} = \{\bar{f} : f \in \mathcal{V}\}$ sépare les points de $\overline{X}$. Ainsi, par le corollaire 4.14, $(\overline{X}, k)$ et $(W(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \phi)$ sont topologiquement équivalents. De plus, la fermeture de $\mathcal{V}$ par rapport à la norme uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$, fermeture qui est égale à $R\mathcal{V}$, est l'ensemble des fonctions réelles continues sur X qui admettent une extension continue sur $\overline{X}$. Cependant $R\mathcal{V}$ n'est pas nécessairement $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante et donc, le corollaire 8 dans [16, p. 364] ne peut être utilisé afin de montrer que $(\overline{X}, k)$ et $(W(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \phi)$ sont topologiquement équivalents.

Pour terminer cet exemple, mentionnons qu'il est possible de montrer directement que $\overline{X}$ peut être identifié avec un certain espace de la forme $W(\mathcal{L})$. En effet, désignons par $\mathcal{L}$ la classe des sous-ensembles fermés A de X tels que A ou $\overline{A^c}$ soit compact dans X . Ainsi, en vertu de corollaire 2.2, on a que $(\overline{X}, k)$ et $(W(\mathcal{L}), \phi)$ sont topologiquement équivalents. En particulier, il en est de même pour $(W(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \phi)$ et $(W(\mathcal{L}), \phi)$ mais à noter que ce dernier fait peut être également être démontré à l'aide du corollaire 4.11.

Nous allons maintenant énoncer et démontrer une généralisation du théorème 4.3 dans [16, p. 62].

Corollaire 4.16. Soit $\mathcal{V}$ un treillis de fonctions réelles bornées sur X contenant la fonction constante 1 et fermé sous les opérations $(f - ah) \vee 0$ et $(ah - f) \vee 0$ (où $f, h \in \mathcal{V}$, et $a \geq 0$). Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (1) $R\mathcal{V} = C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$;
- (2) $\forall f, g \in \mathcal{V}$ telles que $g^{-1}(0) = \emptyset$ et f/g est bornée, on a que $f/g \in R\mathcal{V}$;
- (3) $\forall f, g \in \mathcal{V}$ telles que $g > 0$ sur X et f/g est bornée, on a que $f/g \in R\mathcal{V}$;
- (4) $R\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante;
- (5) $\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante.

Preuve. 1) $\implies$ 2) Si $f, g \in \mathcal{V}$ sont telles que $f \geq 0, g \geq 0$ et f/g est bornée, alors $\forall a, b \geq 0$ avec $a < b$, on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)^1 (]-\infty, b[) = \{x \in X : [(bg - f) \vee 0](x) \neq 0\} \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})^c$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)^1 (]a, \infty[) = \{x \in X : [(f - ag) \vee 0](x) \neq 0\} \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})^c$$

et

$$\left(\frac{f}{g}\right)^1 (]a, b[) = \left(\frac{f}{g}\right)^1 (]-\infty, b[) \cap \left(\frac{f}{g}\right)^1 (]a, \infty[) \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})^c$$

d'où $f/g \in C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$. Puisque, par hypothèse on a $R\mathcal{V} = C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$, alors il s'ensuit que $f/g \in R\mathcal{V}$.

Convenons maintenant que si $h \in \mathcal{V}$, alors h^+ et h^- désignent respectivement les fonctions $(h - 0) \vee 0$ et $(0 - h) \vee 0$ qui, évidemment appartiennent à $\mathcal{V}$. Ensuite, prenons $f, g \in \mathcal{V}$ telles que $g(x) \neq 0 \forall x \in X$ et f/g est bornée. Or, si on pose $U_1 = g^{-1}(]0, \infty[)$ et $U_2 = g^{-1}(]-\infty, 0[)$, on a que $U_1, U_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})^c$ car, en fait, $U_1 = \{x \in X : g^+(x) \neq 0\}$ et $U_2 = \{x \in X : g^-(x) \neq 0\}$. De plus $X = U_1 \cup U_2$, $(|g|/g)(U_1) = \{1\}$ et $(|g|/g)(U_2) = \{-1\}$, d'où $|g|/g \in C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) = R\mathcal{V}$. D'autre part, $|g| = g^+ \vee g^- \in \mathcal{V}$ et donc, en vertu de ce qui a été montré dans le paragraphe précédent, on a $f^+ / |g|, f^- / |g| \in R\mathcal{V}$. Par conséquent,

$$\frac{f}{g} = \left(\frac{f^+}{|g|} - \frac{f^-}{|g|} \right) \frac{|g|}{g} \in R\mathcal{V}.$$

2) $\implies$ 3) Évident.

3) $\implies$ 4) Soit $A, B \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors $\exists f, g \in \mathcal{V}$ telles que $f^{-1}(0) = A$ et $g^{-1}(0) = B$. Or $(|f| \vee |g|)(x) > 0 \forall x \in X$ et $0 \leq |f| / (|f| \vee |g|) \leq 1$. Par hypothèse, on a donc $h = |f| / (|f| \vee |g|) \in R\mathcal{V}$. Puisque $h(A) = \{0\}$ et $h(B) = \{1\}$, alors cela montre que $R\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante.

4) $\implies$ 5) Convenons premièrement que si $\mathcal{W}$ désigne une classe de fonctions réelles définies sur X , alors $\mathcal{W}^+$ désigne l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{W}$ telles que $f \geq 0$.

Posons maintenant $\mathcal{U} = \{f - g : f, g \in \mathcal{V}^+\}$. Alors il est clair que $\mathcal{U}^+ = \mathcal{V}^+$ et $R\mathcal{U} = R\mathcal{V}$. De plus, $\mathcal{U}$ est un treillis car si $f, g, f', g' \in \mathcal{V}^+$ alors

$$(f - g) \vee (f' - g') = [(f - g) \vee 0] \vee [(f' - g') \vee 0] - [(f - g) \vee 0] \wedge [(f' - g') \vee 0] \in \mathcal{U}$$

et

$$(f - g) \wedge (f' - g') = [(f - g) \vee 0] \wedge [(f' - g') \vee 0] - [(f - g) \vee 0] \vee [(f' - g') \vee 0] \in \mathcal{U}.$$

Finalement, si $f, g \in \mathcal{V}^+$ et $a \geq 0$, alors

$$a(f - g) = a[(f - g) \vee 0] - a[(g - f) \vee 0] \in \mathcal{U}$$

et

$$(f - g) + a = [(a + \sup_{x \in X} f(x)) - (\sup_{x \in X} (f(x) - g))] - g \in \mathcal{U},$$

d'où $\mathcal{U}$ est fermée sous les opérations af et $f + a$ (où $f \in \mathcal{U}$, $a \in R$) en vertu du fait que $-f \in \mathcal{U}$ lorsque $f \in \mathcal{U}$. Puisque $\mathcal{U}$ est également un treillis et que $R\mathcal{U} = R\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante, alors $\mathcal{U}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante et ce grâce à la partie b) de la proposition 3.13. La partie a) de cette même proposition nous permet de déduire que $\mathcal{U}^+ = \mathcal{V}^+$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante et comme $\mathcal{V}^+ \subset \mathcal{V}$, il en est de même pour $\mathcal{V}$.

4) $\implies$ 5) Cela est une conséquence directe de la partie b) des remarques 4.14.

La preuve est maintenant complétée. $\square$

Remarques 4.17. a) Dans le contexte des corollaires 4.13 et 4.16, on peut montrer que $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ est un pavé disjonctif et donc, il est possible de les déduire en utilisant les résultats connus sur le compactifié de Wallman. Cependant, avec la connaissance de $X_{\mathcal{V}}^0$ et de ses propriétés, nous sommes en mesure d'effectuer une meilleure synthèse des compactifiés en général et donc, la démonstration des corollaires en question n'est que tâche plus facile. Finalement, rapelons encore que ceux-ci s'appuient sur un théorème dont la preuve ne peut être effectuée sans utiliser nos méthodes.

b) Dans le théorème 4.3 de [16, p. 62], la classe $\mathcal{V}$ utilisée est une algèbre de Banach par rapport à la norme uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$ qui sépare les points de X et qui est telle que $\forall A, B \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})$ avec $A \cap B = \emptyset$, $\exists f \in \mathcal{V}$ satisfaisant les propriétés: $0 \leq f \leq 1$, $f(A) = \{1\}$ et $f(B) = \{0\}$.

c) Si $\mathcal{V}$ est telle que définie dans le corollaire 4.16, alors en examinant la preuve de ce dernier, on constate qu'il est possible de conclure (même si $\mathcal{V}$ n'est pas $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante) que $C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$ est fermée sous les quotients bornés de la forme f/g où $f, g \in \mathcal{V}$ et $g^{-1}(0) = \emptyset$.

d) Les conclusions du corollaire 4.16 demeurent valides si on remplace la condition « $\mathcal{V}$ est fermée sous les opérations $(f - ah) \vee 0$ et $(ah - f) \vee 0$ (où $f, h \in \mathcal{V}$, $a \geq 0$)» par la condition plus faible « $\mathcal{V}$ est fermée sous les opérations $(mf - nh) \vee 0$ et $(nh - mf) \vee 0$ (où $f, h \in \mathcal{V}$, $m, n \in N$)». Nous omettons ici la preuve de ce fait, laquelle est simple quoique un peu fastidieuse.

Pour clore cette section, nous appliquons le corollaire qui précède afin d'obtenir un résultat intéressant et, à notre avis, inconnu, sur les fonctions continues bornées de R vers R . Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin des deux résultats qui suivent, dont le premier sera réutilisé à la prochaine section. Tout d'abord, nous allons convenir que si $\mathcal{V}$ est un treillis vectoriel de fonctions réelles bornées sur X alors $\mathcal{V}^*$ désigne la classe de toutes les fonctions bornées de la forme f/g où $f, g \in \mathcal{V}$ et $g > 0$ sur X . Lorsque $\mathcal{V}$ est de plus fermé sous les produits, il est alors clair que $\mathcal{V}^*$ est également un treillis vectoriel fermé sous les produits.

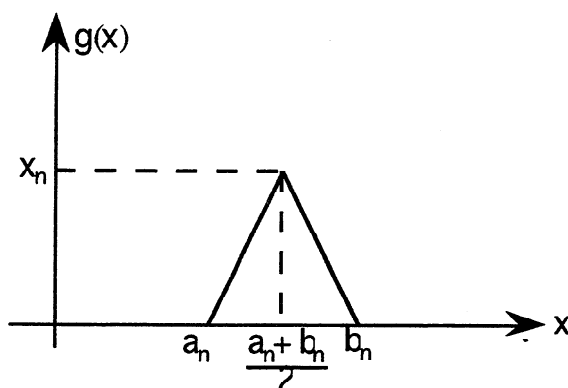


SCHÉMA 1

Propositio 4.18. Si $\mathcal{V}$ est un treillis vectoriel de fonctions réelles bornées sur X , fermé sous les produits et contenant les fonctions constantes, alors $\mathcal{V}^*$ est dense dans $\langle C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \|\cdot\|_\infty \rangle$.

Preuve. Or $\mathcal{V}^*$ est un treillis vectoriel fermé sous les produits et contenant les fonctions constantes. Ainsi, $\mathcal{V}^*$ est dense dans $\langle R\mathcal{V}^*, \|\cdot\|_\infty \rangle$. De plus, il est clair que si $h_1, h_2 \in \mathcal{V}^*$ sont telles que $h_2 > 0$ sur X et h_1/h_2 est bornée, alors $h_1/h_2 \in \mathcal{V}^* \subset R\mathcal{V}^*$. Ainsi, en vertu du corollaire 4.16, on a que $R\mathcal{V}^* = C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}^*))$, d'où $\mathcal{V}^*$ est dense dans $\langle C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}^*)), \|\cdot\|_\infty \rangle$. Puisque $\mathcal{Z}(\mathcal{V}^*) = \mathcal{Z}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V}^*$ est donc dense dans $\langle C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \|\cdot\|_\infty \rangle$, ce qui termine la preuve. $\square$

Lemme 4.19. Si $f \in C_b(R, R)$, $\exists g \in C_b(R, R)$ telle que:

- (1) g est une fonction de Lipschitz (i.e. $\exists M \geq 0$ tel que $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$ $\forall x, y \in R$) qui est à variation bornée;
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$;
- (3) $g^{-1}(0) = f^{-1}(0)$.

Preuve. Si $f^{-1}(0) = R$, on pose $g = 0$ et si $f^{-1}(0) = \emptyset$, on pose (par exemple) $g(x) = e^{-|x|} \forall x \in X$. Supposons que $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(0) \rightarrow R$. Pour chaque paire d'éléments $x_1, x_2 \in f^{-1}(0)$ telle que $|x_1, x_2[\cap f^{-1}(0) = \emptyset$ considérons l'intervalle $]x_1, x_2[$. De plus, $\forall x_1 \in f^{-1}(0)$ tel que $|x_1, \infty[\cap f^{-1}(0) = \emptyset$, considérons l'intervalle $]x_1, \infty[$. Finalement, $\forall x_2 \in f^{-1}(0)$ tel que $]-\infty, x_2] \cap f^{-1}(0) = \emptyset$, considérons l'intervalle $]-\infty, x_2]$. Désignons par J la collection des intervalles ainsi construits. Alors J est une collection au plus dénombrable $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de la forme $]a_n, b_n[$ où $a_n \in f^{-1}(0) \cup \{-\infty\}$ et $b_n \in f^{-1}(0) \cup \{\infty\}$ et on a que $\bigcup_{n=1}^\infty I_n = R \setminus f^{-1}(0)$. Construisons maintenant g de la façon suivante:

- 1) Sur un intervalle de la forme $I_n =]a_n, b_n[$ où $a_n, b_n \in R$, on pose (voir le

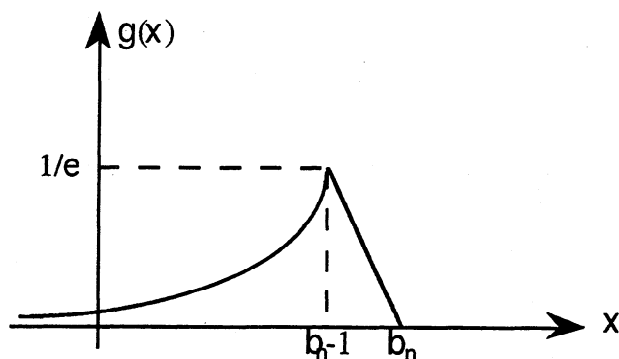


SCHÉMA 2

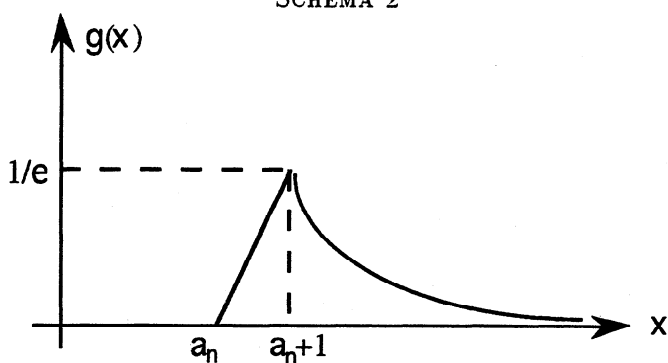


SCHÉMA 3

schéma 1):

$$g(x) = \begin{cases} \left[\frac{\min(1, b_n - a_n)}{2^n(b_n - a_n)} \right] (x - a_n) & \text{si } x \in]a_n, \frac{1}{2}(a_n + b_n)] \\ \left[\frac{\min(1, b_n - a_n)}{2^n(b_n - a_n)} \right] (b_n - x) & \text{si } x \in]\frac{1}{2}(a_n + b_n), b_n[\end{cases}$$

(À noter qu'il aurait été possible de définir g sur $I_n =]a_n, b_n[$ de façon à ce que cette fonction soit infiniment différentiable sur l'intervalle en question. Cette remarque s'applique également lors des étapes 2) et 3) de la construction de g . On aurait alors que g est une fonction de Lipschitz telle que $\left| \frac{dg}{dx}(x) \right| \leq M \forall x \in R$, où M est un certain nombre réel strictement positif.)

2) Sur un intervalle de la forme $I_n =]a_n, b_n[$ où $a_n = -\infty$, $b_n \in R$, on pose (voir le schéma 2):

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}(b_n - x) & \text{si } x \in [b_n - 1, b_n] \\ e^{-(b_n - 1 - x)} & \text{si } x \in]-\infty, b_n - 1[\end{cases}$$

3) Sur un intervalle de la forme $I_n =]a_n, b_n[$ où $a_n \in R$ et $b_n = \infty$, on pose (voir

le schéma 3):

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}(x - a_n) & \text{si } x \in]a_n, a_n + 1[\\ e^{-(x - a_n - 1)} & \text{si } x \in]a_n + 1, \infty[\end{cases}$$

4) $\forall x \in f^{-1}(0)$, on pose $g(x) = 0$.

Alors on vérifie sans peine que g possède les propriétés désirées, et la preuve est maintenant complète. $\square$

Proposition 4.20. *Si $f \in C_b(R, R)$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h, g \in C_b(R, R)$ telles que*

- (1) *h et g sont des fonctions de Lipschitz à variation bornée;*
- (2) *$g > 0$ sur R ;*
- (3) *$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$;*
- (4) *$\|f - h/g\|_\infty < \varepsilon$.*

Preuve. Désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble des fonctions $h \in C_b(R, R)$ telles que h est une fonction de Lipschitz à variation bornée avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$. Alors, il est clair que $\mathcal{V}$ est un treillis vectoriel fermé sous les produits et contenant les fonctions constantes. En vertu de la proposition 4.18, on a que $\mathcal{V}^* = \{h/g : h, g \in \mathcal{V}, g > 0, \text{ et } h/g \text{ est bornée}\}$ est dense dans $\langle C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \|\cdot\|_\infty \rangle$. De plus, par le lemme 4.19, on a $\mathcal{Z}(\mathcal{V}) = \mathcal{Z}(C_b(R, R))$ et donc $C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) = C_b(\mathcal{Z}(C_b(R, R))) = C_b(R, R)$ (voir la partie a) des exemples 3.4). Par conséquent, $\mathcal{V}^*$ est dense dans $\langle C_b(R, R), \|\cdot\|_\infty \rangle$, ce qui termine la preuve. $\square$

5. Un théorème de représentation intégrale pour les fonctionnelles linéaires positives.

Dans cette section, nous présentons un théorème de représentation intégrale pour les fonctionnelles linéaires positives, qui, à notre connaissance, ne pourrait être démontré à l'aide des théorèmes de représentation intégrale existant dans la littérature mathématique. Tout d'abord, convenons que si $\mathcal{L}$ est un pavé d'un ensemble X , alors $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ désigne l'algèbre d'ensemble engendrée par $\mathcal{L}$. Convenons également de la définition suivante:

Définition 5.1. Soit $\mathcal{L}$ un pavé de X et soit $\mathcal{A}$ une collection de sous-ensembles de X contenant $\mathcal{L}$. Alors une fonction d'ensemble $u : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty[$ est dite $\mathcal{L}$ -régulière si $u(E) = \sup\{u(A) : A \subset E, A \in \mathcal{A}\} \forall E \in \mathcal{A}$.

Le résultat suivant, qui sera utilisé dans le théorème principal de cette section, a été démontré par Topsoe dans [18].

Théorème 5.2. *Soit $\mathcal{L}$ un pavé et $u : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty[$ une fonction telle que*

$$u(A) + \sup\{u(E) : E \subset B \setminus A, E \in \mathcal{L}\} = u(B)$$

$\forall A, B \in \mathcal{L}$ avec $A \subset B$. Si u_* est la fonction d'ensembles définie sur $\mathcal{P}(X) = \{A; A \subset X\}$ par

$$u_*(E) = \sup\{u(A) : A \subset E, A \in \mathcal{L}\}$$

$\forall E \in \mathcal{P}(X)$, et si $\mathcal{M}$ désigne la classe des ensembles $E \in \mathcal{P}(X)$ tels que

$$u_*(B) = u_*(B \cap E) + u_*(B \cap E^c)$$

$\forall B \in \mathcal{P}(X)$, alors $\mathcal{M}$ est une algèbre contenant $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ et la restriction de u_* à $\mathcal{M}$ est une fonction d'ensemble additive et $\mathcal{L}$ -régulière.

Remarque 5.3. On pourrait montrer que l'algèbre $\mathcal{M}$ du théorème 5.2 est précisément la classe des ensembles $E \in \mathcal{P}(X)$ tels que

$$u_*(E) = \inf\{u_*(V) : V \supset E, E \in \mathcal{L}^c\}.$$

Nous en venons maintenant au théorème central de la présente section mais auparavant, nous référons le lecteur au volume *Linear Operator: Part I* [18, pp. 101–125], dans lequel il pourra consulter la théorie de l'intégration par rapport aux fonctions d'ensembles additives.

Théorème 5.4. Si $\mathcal{L}$ est un pavé normal de X et si $L: C_b(\mathcal{L}) \rightarrow R$ est une fonctionnelle linéaire positive, alors il existe une unique fonction d'ensembles additive et $\mathcal{L}$ -régulière $u: \mathcal{A}(\mathcal{L}) \rightarrow [0, \infty[$ telle que

$$Lf = \int_X f \, du \quad \forall f \in C_b(\mathcal{L}).$$

De plus, $\forall A \in \mathcal{L}$, on a

$$u(A) = \inf\{Lf : 1_A \leq f \leq 1, f \in C_b(\mathcal{L})\}$$

et $\forall V \in \mathcal{L}^c$, on a

$$u(V) = \sup\{Lf : 0 \leq f \leq 1_V, f \in C_b(\mathcal{L})\}$$

(où 1_E désigne la fonction indicatrice associée à $E \in \mathcal{P}(X)$).

Remarque 5.5. Le théorème 5.4 ne peut en aucune façon être démontré à l'aide des résultats obtenus par Pollard et Topsoe [13] et Topsoe [17], car il peut arriver que pour un certain $f \in C_b(\mathcal{L})$ et un certain $a \in R$, on ait $\{x \in X : f(x) \geq a\} \notin \mathcal{L}$. De plus, notre théorème généralise le théorème de représentation d'Alexandroff au cas où $\mathcal{L}$ n'est pas nécessairement un δ -pavé (voir théorème 12 dans [16, p. 55]).

Preuve du théorème 5.4. La preuve sera donnée en cinq étapes. Tout d'abord, posons

$$u(A) = \inf\{Lf : 1_A \leq f \leq 1, f \in C_b(\mathcal{L})\} \quad \forall A \in \mathcal{L}.$$

Alors, il est clair que $u(A) \leq u(B) \, \forall A, B \in \mathcal{L}$ tels que $A \subset B$. De plus, l'infimum aurait pu être calculé sur l'ensemble des fonctions $f \in C_b(\mathcal{L})$ avec $1_A \leq f$, sans pour autant modifier la valeur de $u(A)$.

Étape I. Si $A, B \in \mathcal{L}$ sont tels que $A \subset B$, on a

$$u(A) + \sup\{u(E) : E \subset B \setminus A, E \in \mathcal{L}\} = u(B).$$

Preuve. Choisissons $E \in \mathcal{L}$ tel que $E \subset B \setminus A$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists h \in C_b(\mathcal{L})$ avec $1_{A \cup E} \leq h \leq 1$ et $Lh < u(A \cup E) - \varepsilon$. Puisque $A \cap E = \emptyset$, alors en vertu du

théorème 3.7, $\exists f \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f(A) = \{1\}$ et $f(B) = \{0\}$. Ainsi, $fh \geq 1_A$ et $(1-f)h \geq 1_e$ d'où

$$u(A) \neq u(E) \leq L(fh) = L(1-f)h = Lh < u(A \cup E) + \varepsilon.$$

On a donc $u(A) \neq u(E) \leq u(A \cup E) \leq u(B) \forall E \subset B \setminus A$, d'où

$$u(A) + \sup\{u(E) : E \subset B \setminus A, E \in \mathcal{L}\} \leq u(B).$$

Afin de montrer l'inégalité inverse, prenons $\varepsilon > 0$ et choisissons $f \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $1_A \leq f \leq 1$ et $Lf < u(A) + \varepsilon$. Or, si $\alpha \in]0, 1[$, alors, par la proposition 3.5 b), $\exists A_\alpha \in \mathcal{L}$ tel que

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \subset A_\alpha \subset \{x \in X : f(x) \leq \sqrt{\alpha}\}.$$

Posons $B_\alpha = B \cap A_\alpha \in \mathcal{L}$, et prenons $g \in C_b(\mathcal{L})$ avec $1_{B_\alpha} \leq g \leq 1$ et $Lg < u(B_\alpha) + \varepsilon$. Puisque $A_\alpha \cap A = \emptyset$ on a $B_\alpha \subset B \setminus A$ et donc $1_B \leq g + f/\alpha$, d'où

$$\begin{aligned} u(B) &\leq L\left(g + \frac{f}{\alpha}\right) \leq Lg + L\left(\frac{f}{\alpha}\right) < u(B_\alpha) + \varepsilon + \frac{1}{\alpha}(u(A) + \varepsilon) \\ &\leq \sup\{u(E) : E \subset B \setminus A, E \in \mathcal{L}\} + \frac{1}{\alpha}(u(A) + \varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ sont arbitraires, nous obtenons le résultat désiré, et la preuve de l'étape I est complète. $\square$

La prochaine étape est une conséquence directe de l'étape I et du théorème 5.2.

Étape II. $\forall E \in \mathcal{P}(X)$, posons

$$u_*(E) = \sup\{u(A) : A \subset E, A \in \mathcal{L}\}$$

et désignons par $\mathcal{M}$ la classe des ensembles $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que

$$u_*(E) = u_*(B \cap E) + u_*(B \cap E^c) \quad \forall B \in \mathcal{P}(X).$$

Alors $\mathcal{M}$ est une algèbre d'ensembles contenant $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ et la restriction de u_* à $\mathcal{M}$ (que nous désignerons par le symbole u) est une fonction d'ensembles additive et $\mathcal{L}$ -régulière.

Étape III. $\forall f \in C_b(\mathcal{L})$, on a

$$Lf = \int_X f du.$$

Preuve. Étant donné $f \in C_b(\mathcal{L})$ telle que f est éloignée de zéro et étant donné $\varepsilon > 0$ $\exists \{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{L}^c$ telle que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ et $\sup_{x,y \in U_i} |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall i$. Posons $E_1 = U_1$ et $E_i = U_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k \in \mathcal{M}$ ($i = 2, \dots, n$) et supposons sans perte de généralité que chaque E_i est non vide. Par la suite, posons $\alpha_i = \inf_{x \in U_i} f(x) > 0$ ($i = 1, \dots, n$) et $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{E_i}$. Alors h est une fonction étagée $\mathcal{M}$ -mesurable telle que $h \leq f \leq h + \varepsilon$ et donc $\int_X h du \geq \int_X (f - \varepsilon) du = \int_X f du - \varepsilon u(X)$.

Or $\int_X h \, du = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(E_i)$. Puisque u est $\mathcal{L}$ -régulière, $\exists A \in \mathcal{L}$ tel que $A_i \subset E_i$ et $u(E_i) < u(A_i) + \varepsilon/n\alpha_i$ ($i = 1, \dots, n$). Ainsi

$$\int_X h \, du < \sum_{i=1}^n \alpha_i u(A_i) = \varepsilon.$$

Maintenant, on sait que L est normal, et donc, $\exists V_1, W_1 \in \mathcal{L}^c$ tels que $V_1 \cap W_1 = \emptyset$, $A_1 \subset V_1 \subset U_1$ et $\bigcup_{i=2}^n A_i \subset W_1$, et $\exists f_1 \in C_b(\mathcal{L})$ avec $1_{A_1} \leq f_1 \leq 1_{V_1}$. Par la suite, $\exists V_2, W_2 \in \mathcal{L}^c$ tels que $V_2 \cap W_2 = \emptyset$, $A_2 \subset V_2 \subset U_2 \cap W_1$ et $\bigcup_{i=3}^n A_i \subset W_2 \subset W_1$, et $\exists f_2 \in C_b(\mathcal{L})$ avec $1_{A_2} \leq f_2 \leq 1_{V_2}$. Si on répète encore une fois le processus, alors $\exists V_3, W_3 \in \mathcal{L}^c$ tels que $V_3 \cap W_3 = \emptyset$, $A_3 \subset V_3 \subset U_3 \cap W_2$ et $\bigcup_{i=4}^n A_i \subset W_3 \subset W_2$, et $\exists f_3 \in C_b(\mathcal{L})$ avec $1_{A_3} \leq f_3 \leq 1_{V_3}$. En continuant de la sorte nous construisons une suite $\{f_i\} \subset C_b(\mathcal{L})$ telle que $f_i f_j = 0$ si $i \neq j$ et $1_{A_i} \leq f_i \leq 1_{V_i} \leq 1_{U_i}$. Ainsi, $f f_i \geq \alpha_i f_i \, \forall i$, et, puisque les V_i sont deux à deux disjoints, on a $\sum_{i=1}^n f_i \leq 1$. Par conséquent

$$\begin{aligned} Lf &\geq L\left(f \sum_{i=1}^n f_i\right) = L\left(\sum_{i=1}^n f f_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i Lf_i \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i u(A_i) \\ &> \int_X h \, du - \varepsilon \geq \int_X f \, du - \varepsilon u(X) - \varepsilon = \int_X f \, du - \varepsilon(u(X) + 1). \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on déduit que $\int_X f \, du \leq Lf$.

Prenons maintenant une fonction arbitraire $f \in C_b(\mathcal{L})$. Alors $\exists M \geq 0$ tel que $f + M$ est éloignée de zéro et donc, en vertu de ce qui précède, on a

$$\int_X f \, du + Mu(X) = \int_X (f + M) \, du \leq L(f + M) = Lf + ML1 = Lf + Mu(X),$$

d'où

$$\int_X f \, du \leq Lf.$$

Si on remplace f par $-f$ dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité inverse, c'est-à-dire, $Lf \leq \int_X f \, du$ et, par conséquent, on déduit que

$$Lf = \int_X f \, du,$$

ce qui complète la preuve de l'étape III.

Étape IV. Si $\lambda: \mathcal{A}(\mathcal{L}) \rightarrow [0, \infty[$ est une fonction d'ensemble additive et $\mathcal{L}$ -régulière telle que

$$Lf = \int_X f \, d\lambda \quad \forall f \in C_b(\mathcal{L}),$$

alors $\lambda = u$ sur $\mathcal{A}(\mathcal{L})$.

Preuve. Puisque λ et u sont $\mathcal{L}$ -régulières, il suffit de vérifier que $\lambda(A) = u(A) \forall A \in \mathcal{L}$. Or étant donné $A \in \mathcal{L}$ et $\varepsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{L}^c$ tel que $A \subset V$ et $\lambda(V) < \lambda(A) + \varepsilon$. Choisissons maintenant $f \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $1_A \leq f \leq 1_V$. Alors,

$$u(A) \leq Lf = \int_X f du = \int_X f d\lambda \leq \int_X 1_V d\lambda = \lambda(V) < \lambda(A) + \varepsilon,$$

d'où $u(A) \leq \lambda(A)$. En interchangeant u et λ dans les lignes qui précèdent, on obtient l'inégalité inverse $\lambda(A) \leq u(A)$, et la preuve de l'étape IV est complète.

Étape V. Si $V \in \mathcal{L}^c$, on a

$$u(V) = \sup\{Lf : 0 \leq f \leq 1_V, f \in C_b(\mathcal{L})\}.$$

Preuve. Or, $\exists g \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $1_{V^c} \leq g \leq 1$ et $Lg < u(V^c) + \varepsilon$. Posons $f = 1 - g$. Alors $0 \leq f \leq 1_V$ et $Lf > u(V) - \varepsilon$. D'autre part, en vertu de l'étape III, on a que si $h \in C_b(\mathcal{L})$ est telle que $0 \leq h \leq 1_V$, alors $Lh = \int_X h du \leq \int_X 1_V du = u(V)$, et donc,

$$u(V) = \sup\{Lf : 0 \leq f \leq 1_V, f \in C_b(\mathcal{L})\}.$$

Cela complète la preuve de l'étape V et du théorème 5.4. $\square$

Corollaire 5.6. Soit $\mathcal{V}$ un treillis vectoriel de fonctions réelles bornées sur X contenant les fonctions constantes, et soit $L: \mathcal{V} \rightarrow R$ une fonctionnelle linéaire positive. Alors, il existe une fonction d'ensembles additive et $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -régulière $u: \mathcal{A}(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) \rightarrow [0, \infty[$ telle que

$$Lf = \int_X f du \quad \forall f \in \mathcal{V}.$$

Si, de plus $\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante, alors u est unique.

Preuve. Or, par le corollaire 4.13, on a que $\mathcal{V} \subset C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$. Ainsi, il existe une extension linéaire positive $L^*: C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) \rightarrow R$ de L à $C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$. (Voir [7, p. 144].) De plus, $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ est normal car si on a $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = \emptyset$ (où $f, g \in \mathcal{V}$), alors en posant $U = \{x \in X : (|g| - |f|) \vee 0(x) \neq 0\}$ et $V = \{x \in X : (|f| - |g|) \vee 0(x) \neq 0\}$, on a $U, V \in (\mathcal{Z}(\mathcal{V}))^c$, $f^{-1}(0) \subset U$, $g^{-1}(0) \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. On peut donc appliquer le théorème 5.4 ce qui nous permet de conclure qu'il existe une (unique) fonction d'ensembles additive et $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -régulière $u: \mathcal{A}(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) \rightarrow [0, \infty[$ telle que

$$Lf = \int_X f du \quad \forall f \in C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V})),$$

d'où $u: \mathcal{A}(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) \rightarrow [0, \infty[$ telle que

$$Lf = \int_X f du \quad \forall f \in \mathcal{V}.$$

Si, de plus $\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante, alors, par le corollaire 4.16, on a que $R\mathcal{V} = C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$ et comme $\mathcal{V}$ est dense dans $(R\mathcal{V}, \|\cdot\|_\infty)$, on déduit que L admet une unique extension L^* de L à $C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$. Par conséquent, u doit être unique, ce qui termine la preuve. $\square$

Remarques 5.7. a) Le corollaire 5.6 ne peut être démontré à l'aide des résultats dans [13] ou [17]. En effet, dans la première partie de ce corollaire, aucune hypothèse n'est donnée sur $\mathcal{V}$ ou sur $\mathcal{L}$ quant à une séparation quelconque des éléments de $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$. De plus, dans la deuxième partie de notre corollaire, nous supposons que $\mathcal{V}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -séparante et cette condition n'est nullement équivalente à l'une ou l'autre des conditions données dans [13] ou [17].

b) Le corollaire 5.6 généralise le théorème 2 de [2, p. 130] au cas où $\mathcal{V}$ n'est pas nécessairement fermé sous les produits. Cependant, si c'est le cas et si, comme à l'accoutumée, on pose $\mathcal{V}^* = \{f/g : f, g \in \mathcal{V}, g > 0 \text{ et } f/g \text{ est bornée}\}$, alors, comme $\mathcal{V}^*$ est dense dans $(C_b(\mathcal{Z}(\mathcal{V})), \|\cdot\|_\infty)$ (voir proposition 4.18), une application du théorème 5.4 nous redonne le corollaire 1 de [2, p. 131], qui s'énonce comme suit:

Étant donné une fonctionnelle linéaire positive $L^* : \mathcal{V}^* \rightarrow R$, il existe une unique fonction d'ensembles additive et $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -régulière $u : \mathcal{A}(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) \rightarrow R$ telle que

$$L^*f = \int_X f \, du \quad \forall f \in \mathcal{V}^*.$$

Corollaire 5.8. *Soit $\mathcal{L}$ un pavé normal et $L : C_b(\mathcal{L}) \rightarrow R$ une fonctionnelle linéaire multiplicative. (L est dite multiplicative si $L(fg) = (Lf)(Lg) \, \forall f, g \in C_b(\mathcal{L})$). À noter que L est nécessairement positive car $f^{1/2} \in C_b(\mathcal{L}) \, \forall f \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $f \geq 0$). Alors il existe une unique fonction d'ensembles additive et $\mathcal{L}$ -régulière $u : \mathcal{A}(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) \rightarrow R$ telle*

$$Lf = \int_X f \, du \quad \forall f \in C_b(\mathcal{L}),$$

et de plus, u satisfait la propriété : $u(E) \in \{0, 1\} \, \forall E \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$.

Preuve. Par le théorème 5.4, il existe une unique fonction d'ensembles additive et $\mathcal{L}$ -régulière $u : \mathcal{A}(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) \rightarrow R$ telle

$$Lf = \int_X f \, du \quad \forall f \in C_b(\mathcal{L}).$$

Il nous reste donc seulement à vérifier que $u(E) \in \{0, 1\} \, \forall E \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$ i.e. $u = u^2$.

Soit $A \in \mathcal{L}$. Alors, on sait que $u(A) = \inf\{Lf : 1_A \leq f \leq 1, f \in C_b(\mathcal{L})\}$, et donc, comme $f^{1/2} \in C_b(\mathcal{L}) \, \forall f \in C_b(\mathcal{L})$ telle que $f \geq 0$, on a que $\{f^2 : 1_A \leq f \leq 1, f \in C_b(\mathcal{L})\} = \{f : 1_A \leq f \leq 1, f \in C_b(\mathcal{L})\}$, d'où

$$\begin{aligned} u(A) &= \inf\{L(f^2) : 1_A \leq f \leq 1, f \in C_b(\mathcal{L})\} = \inf\{(Lf)^2 : 1_A \leq f \leq 1, f \in C_b(\mathcal{L})\} \\ &= (\inf\{Lf : 1_A \leq f \leq 1, f \in C_b(\mathcal{L})\})^2 = (u(A))^2 \end{aligned}$$

et par conséquent, si $E \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$, on a

$$\begin{aligned} u(E) &= \sup\{u(A) : A \subset E, A \in \mathcal{L}\} = \sup\{(u(A))^2 : A \subset E, A \in \mathcal{L}\} \\ &= (\sup\{u(A) : A \subset E, A \in \mathcal{L}\})^2 = (u(E))^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que $u = u^2$.

La preuve est complète. $\square$

Remarques 5.9. a) Le corollaire 5.8 généralise un résultat démontré par Sultan dans [16, p. 60], au cas où L n'est pas nécessairement un δ -pavé.

b) En vertu du corollaire 5.8 et de la partie b) des remarques 4.7, on peut facilement obtenir le résultat suivant, qui a été démontré pour la première fois dans [2, p. 35]:

Soit

i) $\mathcal{V}$ un treillis vectoriel de fonctions réelles bornées sur X , fermé sous les produits et contenant les fonctions constantes et

ii) $L^*: \mathcal{V}^* \rightarrow R$ une fonctionnelle linéaire positive multiplicative.

Alors il existe une unique fonction d'ensembles additive et $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ -régulière $u: \mathcal{A}(\mathcal{Z}(\mathcal{V})) \rightarrow R$ telle que

$$L^*f = \int_X f du \quad \forall f \in \mathcal{V},$$

et, de plus, u satisfait la propriété: $u(E) \in \{0, 1\} \quad \forall E \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}(\mathcal{V}))$.

English extended abstract. Let X be a (nonempty) set and $\mathcal{V}$ be an arbitrary (nonempty) collection of real-valued bounded functions on X . For all $x \in X$, denote by h_x the real valued function defined on $\mathcal{V}$ by the formula $h_x(f) = f(x)$ for all $f \in \mathcal{V}$. Furthermore, denote by $X_{\mathcal{V}}^0$ the class of all real-valued functions on $\mathcal{V}$ for which there exists a net $\{x_\alpha\} \subset X$ such that $h_{x_\alpha}(f) \rightarrow h(f)$ for all $f \in \mathcal{V}$.

We now provide $X_{\mathcal{V}}^0$ with a topology such that $X_{\mathcal{V}}^0$ becomes a compact Hausdorff space. The topology is defined as follows: for all $f \in \mathcal{V}$, let I_f be a compact interval of R containing $f(X)$, the image of f , and identify $X_{\mathcal{V}}^0$ with the closure of the set of points $S(x) = \prod_{f \in \mathcal{V}} \{f(x)\}$ (where $x \in X$) in the compact Hausdorff space $\prod_{f \in \mathcal{V}} I_f$. Clearly, the function $j: X \rightarrow X_{\mathcal{V}}^0$ defined by $j(x) = h_x$ for all $x \in X$, is such that $j(X)$ is a dense subspace of $X_{\mathcal{V}}^0$. Hence $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ is a compactification of the set X . Furthermore, if we define $f^0: X_{\mathcal{V}}^0 \rightarrow R$ by $f^0(h) = f(h)$ for all $f \in \mathcal{V}$, then, obviously, $f^0 \circ j = f$ and so, f^0 is the unique continuous extension of f to $X_{\mathcal{V}}^0$. It is also clear that $\mathcal{V}^0 = \{f^0 : f \in \mathcal{V}\}$ separates points of $X_{\mathcal{V}}^0$.

In this paper, we first obtain some basic properties satisfied by the space $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$. We then show that the Wallman's compactification can be constructed from $(X_{\mathcal{V}}^0, j)$ by choosing a suitable class of functions $\mathcal{V}$ and by dropping a crucial hypothesis which was used in the classical construction. In order to show this fact, we will need to prove a generalization of Urysohn's lemma.

Our construction of Wallman's compactification yields many results concerning the properties possessed by this compactification as well as results on compactification which can be identified with it. Using these results, we obtain applications to topology and functional analysis. For example, we prove that given $\varepsilon > 0$ and $f: R \rightarrow R$, a continuous,

bounded function, there exists two continuous Lipschitz functions with bounded variation $h: R \rightarrow R$ and $g: R \rightarrow R$, such that:

- (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ and
- (3) $|f(x) - h(x)/g(x)| < \varepsilon$ for all $x \in R$.

Finally, we use our construction of Wallman's compactification in order to obtain a new integral representation theorem which generalizes many of the well-known results of this nature published in the literature. One of the most important corollaries of our theorem is the following:

Let

- i) $\mathcal{V}$ be a vector lattice of real-valued bounded functions defined on a set X such that $1 \in \mathcal{V}$, and
- ii) L be a positive linear functional on $\mathcal{V}$.

Then, there exists a finitely additive set function μ defined on the algebra generated by $Z = \{f^{-1}(0) : f \in \mathcal{V}\}$, such that

- (1) μ is inner regular with respect to Z and outer regular with respect to $Z^c = \{X \setminus f^{-1}(0) : f \in \mathcal{V}\}$, and
- (2) $Lf = \int_X f d\mu$ for all $f \in \mathcal{V}$.

It should be noted that our integral representation theorem cannot be obtained from the very general results proved by Pollard and Topsøe in 1975.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. D. Alexandroff, *Additive set-functions in abstract spaces*, Mat. Sbornik **8** (1940), 307-348.
2. J. M. Belley et F. Lessard, *A synthesis of Bochner and Riesz type representation theorems*, Ann. Sci. Math. Québec **10** (129-151).
3. ———, *Treillis de fonctions réelles, compactifiés et transformations multiplicatives*, Ann. Sci. Math. Québec **11** (1987), 253-268.
4. C. M. Biles, *Gelfand and Wallman-type compactifications*, Pacific J. Math. **35** (1970), 267-278.
5. S. Bochner, *Additive set functions on groups*, Ann. of Math. **40** (1939), 769-799.
6. R. M. Brooks, *On Wallman compactifications*, Fund. Math. **60** (1967), 157-174.
7. R. Cignoli et M. Cotlar, *An introduction to functional analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1974.
8. N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I: General theory*, vol. 1, Interscience, New York, 1958.
9. O. Frink, *Compactifications and semi-normal bases*, Amer. J. Math. **86** (1964), 602-607.
10. J. L. Kelley, *General topology*, Springer-Verlag, New York, 1955.
11. R. B. Kirk, *Algebras of bounded real valued functions I, II*, Indag. Math. **34** (1972), 443-463.
12. A. Markov, *On mean values and exterior densities*, Mat. Sbornik **46** (1938), 165-191.
13. D. Pollard et F. Topsøe, *A unified approach to Riesz type representation theorems*, Studia Math. **54** (1975), 173-190.
14. W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.
15. A. Sultan, *General rings of functions*, J. Austral. Math. Soc. **20** (1975), 359-365.
16. ———, *Measure, compactification and representation*, Canad. J. Math. **30** (1978), 54-65.
17. F. Topsøe, *Further results on integral representations*, Studia Math. **55** (1976), 239-245.
18. ———, *Topology and measure*, Springer-Verlag, New York, 1970.

F. LESSARD

3941 HENRI-BOURASSA EST

MONTRÉAL-NORD (QUÉBEC) H1H 1K8