

FRACTIONS CONTINUES q -ANALOGIQUES POUR CERTAINES FAMILLES DE PERMUTATIONS ET DE PARTITIONS

JEAN FRANÇON

RÉSUMÉ. On montre que la série génératrice de certaines familles de permutations distribuées selon la somme de leur pics moins la somme de leurs creux admet un développement en fraction continue de type Jacobi. Il en est de même de certaines familles de partitions selon la somme des maxima des blocs moins la somme des minima. On obtient ainsi des q -analogues de fractions continues classiques dues, en particulier, à Euler, Gauss, Stieltjes et, plus récemment, Flajolet.

ABSTRACT. It is shown that the generating series of certain families of permutations weighted by the sum of the peaks minus the sum of the troughs can be expanded in a continued fraction of Jacobi. The same is true for certain families of partitions weighted by the sum of blocks maxima minus their minima. In this manner one obtains q -analogues of classical continued fractions due to Euler, Gauss, Stieltjes and, more recently, Flajolet. See the English extended abstract at the end of the paper.

1. Introduction. Pour n entier, on note $[n]$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et $\mathfrak{S}_n$ le groupe de permutations de $[n]$. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est considérée comme un mot $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ sur l'alphabet $[n]$; une lettre $\sigma(i)$ est dite un *pic* si $\sigma(i-1) < \sigma(i) > \sigma(i+1)$, un *creux* si $\sigma(i-1) > \sigma(i) < \sigma(i+1)$, en convenant de poser $\sigma(0) = \sigma(n+1) = 0$. Notons $P(\sigma)$ (resp. $Q(\sigma)$) l'ensemble des pics (resp. creux) de σ .

Considérons la quantité

$$D(\sigma) = \sum \{j : j \in P(\sigma)\} - \sum \{j : j \in Q(\sigma)\} \quad (1.1)$$

c'est-à-dire la «somme des pics moins somme des creux» de la permutation σ .

Exemple. Soit $\sigma = 351894762$; on a $P(\sigma) = \{5, 7, 9\}$ et $Q(\sigma) = \{1, 4\}$, donc $D(\sigma) = 5 + 7 + 9 - 1 - 4 = 16$.

L'objet de cette note est de démontrer le théorème suivant, ainsi que des formules analogues pour certaines familles de permutations et de partitions.

Théorème 1.1. On a l'identité

$$\sum_{n>0} z^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{D(\sigma)} = \frac{qz}{1 - 2qz - \frac{1 \cdot 2q^3 z^2}{1 - 4q^2 z - \frac{2 \cdot 3q^5 z^2}{1 - 6q^3 z - \frac{3 \cdot 4q^7 z^2}{1 - \dots}}}}. \quad (1.2)$$

Reçu le 4 octobre 1991.

Soit π une partition de $[n]$ en blocs $B_1, B_2, \dots, B_k$; posons

$$D(\pi) = \sum_{i=1}^k (\max(B_i) - \min(B_i)) \quad (1.3)$$

c'est-à-dire la «somme des maxima des blocs moins somme des minima» de la partition π . Par exemple une partition π de $[9]$ en 3 blocs est définie par $B_1 = \{1, 7, 8\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{3, 4, 5, 6, 9\}$; on a alors $D(\pi) = 8 - 1 + 2 - 2 + 9 - 3 = 13$. Notons Π_n l'ensemble des partitions de $[n]$.

Théorème 1.2. *On a l'identité*

$$1 + \sum_{n>0} z^n \sum_{\pi \in \Pi_n} q^{D(\pi)} = \frac{1}{1 - q^0 z - \frac{q^1 z^2}{1 - 2q^1 z - \frac{2q^3 z^2}{1 - 3q^2 z - \frac{3q^5 z^2}{1 - \dots}}}}. \quad (1.4)$$

On vérifie aisément que la valeur maximum sur $\mathfrak{S}_n$ (resp. Π_n) de $D(\sigma)$ (resp. $D(\pi)$) est d'ordre n^2 , le minimum étant d'ordre n .

Il est à noter qu'en faisant $q = 1$ dans (1.2) on obtient la célèbre fraction continue d'Euler de la série $\sum n! z^n$, en faisant $q = 1$ dans (1.4) on obtient un développement en fraction continue de la série $\sum B_n z^n$, où B_n est le n^e nombre de Bell, développement dû à Flajolet [2].

D'autres q -analogues de ces fractions ont été introduits dans [3]. Il est aussi montré dans [3] comment on peut, à partir d'elles (p. ex. de (1.2)) calculer les moments de la distribution associée (p. ex. de $D(\sigma)$).

Il est à noter l'analogie entre la somme des pics moins la somme des creux d'une permutation et son index majeur, c'est-à-dire la somme des indices de ses montées, dont on sait qu'il a même distribution que le nombre d'inversions (voir p. ex. [4] et ses références). De nombreux auteurs, notamment D. Foata, A. Garsia, I. Gessel, D. Rawlings, D. Stanton, G.-X. Viennot et D. Zeilberger ont étudié diverses distributions sur les permutations et les partitions, et leurs rapports avec les fonctions spéciales. Il subsiste des questions à résoudre dans un travail ultérieur, en particulier l'existence de formules closes pour les q -analogues présentés ici, ou encore une comparaison avec les q -analogues connus, ainsi que les applications possibles aux polynômes orthogonaux classiques.

La section 2 prouve le théorème 1.1 et énonce quelques formules analogues en restreignant la classe de permutations considérées. La section 3 ramène une partition à une permutation et énonce quelques formules analogues à celles du théorème 1.2 en restreignant la classe des partitions considérées.

La preuve de ces formules est basée sur trois propriétés :

- (i) une bijection, établie dans [5], entre permutations et «chemins valués»;
- (ii) l'égalité, démontrée ci-dessous (voir le théorème 2.2), entre la somme des pics moins la somme des creux d'une part et, d'autre part, l'«aire sous le chemin» correspondant à la permutation par la bijection précédente;
- (iii) l'existence, démontrée dans [2], d'un développement en fraction continue de la série génératrice de l'ensemble des chemins valués.

2. Permutations. Rappelons tout d'abord, la définition d'un chemin valué (en modifiant légèrement les notions introduites dans [2]).

Définition 2.1. Un chemin (sur $[n]$) est une application $c: [n] \rightarrow [n]$ telle que, pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, on a $|c(i+1) - c(i)| \leq 1$ et, de plus, $c(1) = 1 = c(n)$.

Par exemple, pour $n = 8$, les valeurs suivantes définissent un chemin : $c(1) = 1 = c(2)$, $c(3) = 2$, $c(4) = 1$, $c(5) = 2$, $c(6) = 3$, $c(7) = 2$, $c(8) = 1$.

Définition 2.2. Un chemin simplement valué (sur $[n]$) est un couple (c, v) , où c est un chemin sur $[n]$ et v une suite d'entiers $(v(1), v(2), \dots, v(n))$ avec $1 \leq v(i) \leq c(i)$ pour tout $i \in [n]$ tel que $c(i) \neq c(i+1)$ et $1 \leq v(i) \leq 2c(i)$ pour tout $i \in [n-1]$ tel que $c(i) = c(i+1)$.

L'énoncé suivant est prouvé dans [2] :

Théorème 2.1. Il existe une bijection θ de l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble des chemins simplement valués sur $[n]$ ayant les propriétés suivantes : pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(c, v) = \theta(\sigma)$, pour tout creux i de σ on a $c(i+1) = c(i) + 1$, pour tout pic j de σ autre que n on a $c(j+1) = c(j) - 1$, et pour tout $k \in [n]$ ni pic ni creux de σ on a $c(k+1) = c(k)$.

Le chemin associé à une permutation admet une propriété supplémentaire :

Théorème 2.2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $D(\sigma)$ la somme de ses pics moins la somme de ses creux; soit c le chemin associé à σ par la bijection θ . Alors on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^n c(i) = D(\sigma). \quad (2.1)$$

Preuve. Pour un chemin c , appelons $\text{Aire}(c)$ la quantité $\sum_{i=1}^n c(i)$. À tout indice i , $1 \leq i \leq n$, tel que $c(i+1) = c(i) + 1$, on peut faire correspondre un unique indice $m(i) = \min\{j > i, j < n, c(j+1) = c(j) - 1 = c(i)\}$. On vérifie alors aisément, en procédant «à la Lebesgue», l'égalité

$$\text{Aire}(c) = \sum_i (m(i) - i) + n,$$

où la somme s'étend à tous les indices i tels que $1 \leq i < n$ et $c(i+1) = c(i) + 1$. Or ces derniers indices sont les creux de σ et les indices $m(i)$ sont les pics de σ autres que n , d'après le théorème 2.1. On a donc l'égalité

$$\text{Aire}(c) = D(\sigma). \quad \square$$

Avant d'énoncer le théorème de Flajolet, nous avons besoin d'une notion plus générale que celle de chemin simplement valué. Considérons un chemin c sur $[n]$ comme une suite de $n-1$ étapes, c'est-à-dire de couples $(c(i), c(i+1))_{i \in [n-1]}$; une étape telle que $c(i+1) = c(i) + 1$ (resp. $c(i+1) = c(i) - 1$, $c(i+1) = c(i)$) est dite *ascendante* (resp. *descendante*, *palier*); le *niveau* d'une étape $(c(i), c(i+1))$ est l'entier $c(i)$. Soit trois suites doubles $(a_{i,j}, d_{i,j}, p_{i,j})_{i \geq 1, j \geq 1}$ d'indéterminées.

Définition 2.3. On appelle *chemin valué* sur $[n]$ un couple (c, v) où c est un chemin sur $[n]$ et v est une suite $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, dite *valuation* du chemin telle que si la i^{e} étape de c ($1 \leq i < n$) est une étape ascendante (resp. descendante, palier) à niveau k , alors $v_i = a_{k,j}$ (resp. $d_{k,j}$, $p_{k,j}$) pour un certain j .

Il est clair qu'un chemin valué est caractérisé par sa valuation et nous l'identifions à sa valuation considérée comme un mot sur l'alphabet $\{a_{i,j}, d_{i,j}, p_{i,j}\}_{i \geq 1, j \geq 1}$. Un exemple de chemin valué est fourni par le mot

$$a_{1,1} a_{2,1} a_{3,5} p_{4,2} d_{4,2} d_{3,1} p_{2,2} d_{2,7}.$$

L'énoncé suivant est prouvé dans [2] :

Théorème 2.4. *L'image abélienne de la série caractéristique des chemins valués admet le développement en fraction continue*

$$\frac{1}{1 - \sum_{j \geq 1} p_{1,j} - \frac{\left(\sum_{j \geq 1} a_{1,j}\right) \left(\sum_{j \geq 1} d_{2,j}\right)}{1 - \sum_{j \geq 1} p_{2,j} - \frac{\left(\sum_{j \geq 1} a_{2,j}\right) \left(\sum_{j \geq 1} d_{3,j}\right)}{1 - \dots}}}. \quad (2.2)$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 1.1. Soit q et z deux indéterminées. Posons

$$a_{i,j} = d_{i,j} = zq^i, \quad p_{i,j} = 2zq^i$$

pour tout $i \geq 1$ et pour tout $j \leq i$, et $a_{i,j} = d_{i,j} = p_{i,j} = 0$ sinon. Considérons l'image abélienne d'un chemin valué sur $[n]$ dont le chemin est noté c ; ce monôme est évidemment égal à

$$2^\beta z^{n-1} q^{c(1)+c(2)+\dots+c(n-1)} = 2^\beta z^{n-1} q^{\text{Aire}(c)-1},$$

où β dénote le nombre de paliers de c . De plus, pour tout chemin c , le nombre de chemins valués admettant c comme chemin, multiplié par 2^β , est égal au nombre de chemins simplement valués (voir la définition 2.2) admettant c comme chemin. Le théorème 2.4 s'exprime alors ainsi : La série génératrice

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ k \geq 1}} \alpha_{n,k} z^{n-1} q^{k-1},$$

où $\alpha_{n,k}$ est le nombre de chemins simplement valués sur $[n]$ d'aire k , admet le développement en fraction continue

$$\frac{1}{1 - 2qz - \frac{1q^1 z 2q^2 z}{1 - 4q^2 z - \frac{2q^2 z 3q^3 z}{1 - 6q^3 z - \dots}}}. \quad (2.4)$$

En réinterprétant les nombres $\alpha_{n,k}$ par les théorèmes 2.1 et 2.2, et en multipliant par qz , on termine la preuve du théorème 1.1.

Grâce aux propriétés de la bijection θ du théorème 2.1 (voir [5] ou [2]) on peut démontrer les formules suivantes. Soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations *alternantes* sur $[n]$, c'est-à-dire les permutations σ telles que $\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \sigma(4) < \dots$. On a

$$\sum_{n \text{ impair}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} q^{D(\sigma)} z^n = \frac{zq}{1 - \frac{1 \cdot 2q^3 z^2}{1 - \frac{2 \cdot 3q^5 z^2}{1 - \frac{3 \cdot 4q^7 z^2}{1 - \dots}}}}, \quad (2.5)$$

$$1 + \sum_{\substack{n \text{ pair} \\ n > 0}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} q^{D(\sigma) - \sigma(n)} z^n = \frac{1}{1 - \frac{1^2 q z^2}{1 - \frac{2^2 q^3 z^2}{1 - \frac{3^2 q^5 z^2}{1 - \dots}}}}. \quad (2.6)$$

En faisant $q = 1$ dans (2.5) et (2.6) on obtient respectivement les développements en fraction continue des nombres tangents et sécants dus à Stieltjes [7] par la voie des formules d'addition (voir aussi [6]).

On dit qu'une lettre i d'une permutation est un *pic de cycle* (resp. *creux de cycle*) si $\sigma(i) < i > \sigma^{-1}(i)$ (resp. $\sigma(i) > i < \sigma^{-1}(i)$), σ^{-1} notant la permutation inverse de σ . Notons $D'(\sigma)$ la somme des pics de cycles moins la somme des creux de cycles de σ . Ainsi pour $\sigma = 351897462$ les pics de cycles sont 3, 7, 8, 9 et les creux de cycles sont 1, 2, 4, 6, donc $D'(\sigma) = 3 + 7 + 8 + 9 - 1 - 2 - 4 - 6 = 14$. On a

$$1 + \sum_{n > 0} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{D'(\sigma)} z^n = \frac{1}{1 - z - \frac{qz^2}{1 - 3qz - \frac{2^2 q^3 z^2}{1 - 5q^2 z - \frac{3^2 q^5 z^2}{1 - \dots}}}}. \quad (2.7)$$

Les involutions sont des permutations dont les cycles sont de taille 1 ou 2; on peut les considérer comme des partitions dont les blocs sont de taille 1 ou 2; elles sont traitées à la section suivante.

On laisse au lecteur l'obtention, par la même méthode, d'un q -analogue du développement en fraction continue suivant

$$\sum_{\substack{n \geq 0 \\ k \geq 0}} A_{n+1,k+1} u^k z^n = \frac{1}{1 - (1+u)z - \frac{1 \cdot 2uz^2}{1 - 2(1+u)z - \frac{2 \cdot 3uz^2}{\dots}}}, \quad (2.8)$$

où $A_{n,k}$ sont les nombres eulériens (cf. [1, 2, 4]).

3. Partitions. Rappelons d'abord comment on peut associer une permutation à une partition et comment se transmettent certaines propriétés. Soit π une partition de $[n]$ en blocs $B_1, B_2, \dots, B_k$; on suppose que ces blocs sont ordonnés par leur plus petits éléments. Par exemple, pour $n = 8$, une partition est définie par ses blocs $B_1 = \{1, 3, 4, 8\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{5\}$, $B_4 = \{6, 7\}$. On associe à π une permutation $\sigma = \tau(\pi)$ sur $[n+1]$ en juxtaposant les mots $B'_1, \dots, B'_k$ puis la lettre $n+1$, où B'_i est obtenu en juxtaposant les lettres de B_i en ordre décroissant. Pour l'exemple ci-dessus on obtient

$$\sigma = 843125769.$$

Les propriétés de cette application τ qui nous intéressent ici sont les suivantes :

- (i) si m est l'élément maximum d'un bloc de π de taille supérieure ou égale à 2, alors m est un pic de σ ;
- (ii) si m est l'élément unique d'un bloc de π alors m est double montée de σ , c'est-à-dire supérieur à son voisin de gauche et inférieur à son voisin de droite dans σ ;
- (iii) si m est l'élément minimum d'un bloc de π de taille supérieure ou égale à 2, alors m est un creux de σ ;
- (iv) si m n'est ni minimum ni maximum dans son bloc, alors m est double descente de σ , c'est-à-dire supérieur à son voisin de droite et inférieur à son voisin de gauche dans σ ;

La quantité $D(\pi)$, somme des maxima des blocs moins somme des minima, est donc égale à $D(\sigma) - \sigma(n+1) = D(\sigma) - n - 1$.

On peut alors prouver le théorème 1.2 en associant (par la bijection θ du théorème 2.1) à l'ensemble des partitions une classe particulière de chemins valués (voir [5]) puis en procédant comme dans la section précédente.

On peut obtenir aussi les formules suivantes : Soit Π'_n l'ensemble des partitions de $[n]$ sans blocs de taille 1; on a

$$1 + \sum_{n>0} \sum_{\pi \in \Pi'_n} q^{D(\pi)} z^n = \frac{1}{1 - \frac{qz^2}{1 - qz - \frac{2q^3z^2}{1 - 2q^2z - \frac{3q^5z^2}{1 - 3q^3z - \dots}}}}; \quad (3.1)$$

soit I_n l'ensemble des partitions de $[n]$ en blocs de taille inférieure ou égale à 2; on a

$$1 + \sum_{n>0} \sum_{\pi \in I_n} q^{D(\pi)} z^n = \frac{1}{1 - z - \frac{qz^2}{1 - qz - \frac{2q^3z^2}{1 - q^2z - \frac{3q^5z^2}{1 - q^3z - \dots}}}}; \quad (3.2)$$

soit I'_n l'ensemble des partitions de $[n]$ en blocs tous de taille 2; on a

$$1 + \sum_{n>0} \sum_{\pi \in I'_n} q^{D(\pi)} z^n = \frac{1}{1 - \frac{qz^2}{1 - \frac{2q^3z^2}{1 - \frac{3q^5z^2}{1 - \dots}}}}. \quad (3.3)$$

En faisant $q = 1$ dans (3.3) on obtient un développement en fraction continue de la série génératrice des factorielles impaires, classiquement obtenue comme fraction continue de Gauss. En faisant $q = 1$ dans (3.2) on obtient un développement en fraction continue de la série génératrice des nombres d'involutions, due à [2]. En faisant $q = 1$ dans (3.1) on obtient un développement en fraction continue de la série génératrice des nombres de Bell 2-associés (cf. [1, vol. 2, p. 57]), due à [2].

On laisse au lecteur l'obtention d'un q -analogue de la série génératrice ordinaire des nombres de Stirling de 2^e espèce $S_{n,k}$:

$$\sum_{\substack{n \geq 0 \\ k \geq 0}} S_{n,k} u^k z^n = \frac{1}{1 - uz - \frac{1uz^2}{1 - (1+u)z - \frac{2uz^2}{\dots}}}. \quad (3.4)$$

Remerciements. L'auteur remercie les rapporteurs anonymes pour leurs propositions d'amélioration de cette note.

English extended abstract. In this note a statistics, $D(\sigma)$, on permutations σ is defined as the sum of the peaks (*pics* in French) minus the sum of the troughs (*creux* in French) of σ . As shown in Section 2, $D(\sigma)$ is the area under the (Motzkin) path associated to σ according to the Françon-Viennot correspondence [5]. Variants and specializations of this statistics are given for alternating permutations, involutions, set partitions, etc. For a set partition π of $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $D(\pi)$ is defined as the sum of blocks maxima minus their minima.

We then show, using the combinatorial theory of continued fractions of Flajolet [2], that the generating functions with respect to this statistics for permutations, involutions, set partitions, etc. can be expanded as continued fractions of Jacobi type. This gives, in particular, q -analogues of classical continued fractions due to Euler (for $n!$, see (1.2)), Stieltjes (for the tangent and secant numbers, see (2.5) and (2.6)), Gauss (for the odd factorials, see (3.3)) and Flajolet (for the Bell numbers, see (1.4); for the number of involutions, see (3.2); for the 2-associated Bell numbers [1], see (3.1)).

The questions of finding closed forms for the generating functions and of the relationship with other q -analogues of these combinatorial objects and with special functions, in particular q -analogues of classical orthogonal polynomials, are left for further study.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Comtet, *Analyse combinatoire*, 2 vol., P. U. F., Paris, 1970.
2. P. Flajolet, *Combinatorial Aspects of Continued Fractions*, Discrete Math. **32** (1980), 125–161.
3. P. Flajolet, C. Puech et J. Vuillemin, *The Analysis of Simple List Structures*, Inform. Sci. **38** (1986), 121–146.

4. D. Foata et M.-P. Schützenberger, *Major index and inversion number of permutations*, Math. Nachr. **83** (1978), 143–159.
5. J. Françon et G. Viennot, *Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi*, Discrete Math. **28** (1979), 21–35.
6. L. J. Rogers, *On the Representation of Certain Asymptotic Series as Continued Fractions*, Proc. London Math. Soc. (2) **4** (1907), 72–89.
7. T. J. Stieltjes, *Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **3** (1889), 1–17.

JEAN FRANÇON
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE
7, RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE