

HAMILTONIEN SELON UNE POLARITÉ

ABDELKADER ELQORTOBI

RÉSUMÉ. Pour étudier les fonctions convexes concaves, P. J. Laurent utilise dans la définition de la conjuguée d'une fonction, une fonction de couplage qui n'est autre qu'une application bilinéaire. Dans cet article, on montre que son point de vue peut s'orienter dans une autre direction en choisissant adéquatement une polarité et une fonction de couplage.

ABSTRACT. To study the convex concave functions and to define his Hamiltonian, P. J. Laurent uses a bilinear application in the expression of the function polar. We show how his work can be extended in an other direction by choosing a polarity and a particular "couplage" function. See the English extended abstract at the end of the paper.

1. Introduction. Considérons deux ensembles non vides X et X' (resp. Y et Y') et une fonction de couplage définie dans $X \times X'$ (resp. $Y \times Y'$) et à valeurs dans $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$. Prolongeons l'addition à $\bar{R}$ de la manière suivante : $a + (+\infty) = +\infty$ pour tout a appartenant à $[-\infty, +\infty]$ et rappelons (cf. [3]) la définition de la conjuguée $f^c \in \bar{R}^X$ relativement à la fonction de couplage c :

$$f^c(x') = \sup\{c(x, x') - f(x) : x \in X\}.$$

Pour étudier les fonctions convexes concaves, P. J. Laurent s'est basé sur cette définition avec une application bilinéaire comme fonction de couplage (cf. [2]). On remarque alors que ses travaux peuvent être étendus dans la voie suivante en reprenant le formalisme introduit par M. Volle (cf. [4, 5]).

Soit Δ_X une polarité définie sur 2^X et à valeurs dans $2^{X'}$. Δ_X vérifie l'égalité suivante :

$$\Delta_x\left(\bigcup A_i\right) = \bigcap \Delta_X(A_i)$$

pour toute famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$ de X . La polarité duale définie dans $2^{X'}$ et à valeurs dans 2^X vérifie :

$$\Delta_{X'}A' = \{x \in X : A' \text{ est inclus dans } \Delta_X x\}$$

où A' est inclus dans X' et $\Delta_X x$ désigne le sous-ensemble $\Delta_X\{x\}$. On obtient l'équivalence suivante :

$$x' \in \Delta_{X'}x \iff x \in \Delta_X x'.$$

Reçu le 30 novembre 1991 et, sous forme définitive, le 3 septembre 1992.

L'opérateur $D = \Delta_X \Delta_{X'}$ est un opérateur de fermeture, autrement dit $D \circ D = D$ et $D(A)$ contient A quelque soit le sous-ensemble A de X .

Choisissons la fonction de couplage suivante :

$$c(x, x') = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \in \Delta_{X'} x' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La polaire et la bipolaire de $f \in \overline{R}^X$ s'expriment respectivement comme suit (s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'utilisation du symbole Δ) :

$$\Delta_X f(x') = -\inf\{f(x) : x \notin \Delta_{X'} x'\}.$$

et

$$\Delta_{X'} \Delta_X f(x) = \sup\{\inf\{f(z) : z \notin \Delta_{X'} x'\} : x \notin \Delta_X x\}$$

où $\Delta_X f(x')$ (resp. $\Delta_{X'} \Delta_X f(x)$) désigne la fonction $f^c(x')$ (resp. $f^{cc}(x)$). Les ensembles $T_\lambda f = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ et $t_\lambda f = \{x \in X : f(x) < \lambda\}$ sont appelés les tranches ou les sections de f et on obtient la relation suivante :

$$\Delta_X t_\lambda f = T_{-\lambda} \Delta_X f.$$

On sait aussi d'après [4] que la fonction $\Delta_{X'} \Delta_X f$ est la plus grande minorante de f dont les tranches sont fermées pour $\Delta_{X'} \Delta_X$.

Considérons maintenant P un ensemble fini de propriétés topologiques, algébriques ou géométriques qui en général est déterminé par le choix de la polarité. On dira alors qu'un ensemble A vérifie P si, pour toute propriété P appartenant à P , A vérifie P . On adoptera la convention suivante : X et $\emptyset$ vérifient P .

Dans tout ce qui suit, on supposera que P vérifie les conditions suivantes :

- a) quelle que soit la famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de X tels que A_i vérifie P , alors $\bigcap A_i$ vérifie P (stabilité pour l'intersection);
- b) pour tout A inclus dans X , $\Delta_X A$ vérifie P .

En ce qui concerne les fonctions, on dira que la fonction f vérifie P si les sections T_λ vérifient P pour tout λ réel et que f vérifie $-P$ si $-f$ vérifie P .

Pour les fonction, les conditions précédentes deviennent :

- a') si, pour tout i appartenant à I , la fonction f_i vérifie P , alors $\sup f_i$ vérifie P ;
- b') pour toute fonction f de $\overline{R}^X$, la fonction $\Delta_X f$ vérifie P .

Remarque 1. Soient $P(X) = \{f \in \overline{R}^X : f = \Delta_{X'} \Delta_X f\}$ et $P(X') = \{f \in \overline{R}^{X'} : f = \Delta_X \Delta_{X'} f\}$.

i) En général les propriétés de P sont faciles à déterminer. Caractérisons $P(X)$ pour deux polarités particulières cf. [1,4]). Soient X et X' deux espaces vectoriels topologiques localement convexes mis en dualité séparante par l'application bilinéaire notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Premier exemple. $\Delta_X A = \{x' \in X' : x \in A \implies \langle x, x' \rangle \leq 1\}$ d'où $P(X) = \{f \in \overline{R}^X : f \text{ quasi-convexe, semi-continue inférieurement et } f(0) = -\infty\}$.

Second exemple. $\Delta_X A = \{x' \in X' : x \in A \implies \langle x, x' \rangle \geq 1\}$ d'où $P(X) = \{f \in \overline{R}^X : f \text{ quasi-convexe, semi continue inférieurement et } f(\mu x) \geq f(x) \text{ pour tout } (x, \mu) \text{ appartenant à } X \times [0, 1]\}$.

ii) La fonction $\Delta_X f$ appartient à $P(X')$ car $\Delta_X \Delta_{X'} \Delta_X f = \Delta_X f$.

iii) $f \in P(X) \implies f$ vérifie P . En effet la condition b') est vérifiée car il suffit d'écrire $f = \Delta_{X'} g$ où $g = \Delta_X f$. Pour la condition a'), il suffit de poser $g = \sup f_i$ avec f_i un élément de $P(X)$. En effet, par définition, on a toujours $\Delta_{X'} \Delta_X g \leq g$. D'autre part,

$$f_i \leq g \implies \Delta_{X'} \Delta_X f_i = f_i \leq \Delta_{X'} \Delta_X g \implies g = \sup f_i \leq \Delta_{X'} \Delta_X g.$$

Par conséquent $g = \Delta_{X'} \Delta_X g$. En général la réciproque est fausse. En effet, prenons $X = R$, $\Delta A = \{y \in R : 1 \leq xy, \forall x \in A\}$ et $f(x) = x^2$. On dira que f vérifie P si $T_\lambda f$ sont convexes et fermés. On constate alors que $\Delta_R \Delta_R f$ est identiquement nulle.

Dorénavant, on appliquera la polarité uniquement à des fonctions qui vérifient P .

2. Polarité partielle. Soit $k \in \overline{R}^{X \times Y}$ une fonction de deux variables x et y vérifiant $(P, -P)$ c'est-à-dire pour y fixé dans Y (resp. x fixé dans X) la fonction $k(\cdot, y)$ (resp. $-k(x, \cdot)$) vérifie P . On va donc procéder à certaines opérations de polarité par rapport à la première et la seconde variables de la manière suivante. En appliquant l'opération de polarité par rapport à la première variable on obtient une fonction $\Delta_X k$ appartenant à $\overline{R}^{X \times Y}$ dont l'expression est la suivante :

$$\Delta_X k(x', y) = -\inf\{k(x, y) : x \notin \Delta_{X'} x'\} = \sup\{-k(x, y) : x \notin \Delta_{X'} x'\}.$$

D'après les hypothèses précédentes, pour tout y appartenant à Y , la fonction $\Delta_X k(\cdot, y)$ vérifie P . Comme $\Delta_X k(x', \cdot)$ est la borne supérieure d'une famille de fonctions qui vérifient P , on déduit que $\Delta_X k(x', \cdot)$ vérifie P pour tout x' appartenant à X' . En résumé, $\Delta_X k$ vérifie (P, P) . Pour ne pas introduire une nouvelle polarité à des fonctions qui vérifient $(-P)$, on utilise l'opérateur d'inversion de signe θ appliqué à ce type de fonctions. En effet si k vérifie $(P, -P)$, θk vérifie $(-P, P)$. On peut sans changer de polarité, appliquer celle-ci à θk à la seconde variable pour obtenir la fonction $\Delta_Y \theta k$ appartenant à $\overline{R}^{X \times Y'}$ et s'exprimant comme suit :

$$\Delta_Y \theta k(x, y') = -\inf\{-k(x, y) : y \notin \Delta_{Y'} y'\} = \sup\{k(x, y) : y \notin \Delta_{Y'} y'\}$$

Là encore on constate que la fonction $\Delta_Y \theta k$ vérifie (P, P) . Comme on a toujours

$$\Delta_{X'} \Delta_X k(x, y) \leq k(x, y) \leq \theta \Delta_{Y'} \Delta_Y \theta k(x, y)$$

autrement écrit

$$\begin{aligned} \sup\{\inf\{k(u, y) : u \notin \Delta_{X'} x'\} : x' \notin \Delta_X x\} &\leq k(x, y) \\ &\leq \inf\{\sup\{k(x, v) : v \notin \Delta_{Y'} y'\} : y' \notin \Delta_Y y\}. \end{aligned}$$

Il est alors souhaitable d'introduire un opérateur de régularisation.

Définition 1. Soit $k \in \overline{R}^{X \times Y}$ qui vérifie $(P, -P)$. L'opérateur de régularisation σ_X (resp. σ_Y) par rapport à la variable $x \in X$ (resp. $y \in Y$) est défini par :

$$\sigma_X k = \Delta_{X'} \Delta_X k \quad (\text{resp. } \sigma_Y k = \theta \Delta_{Y'} \Delta_Y \theta k).$$

Remarque 2. Avec ces notations, la double inégalité précédente s'écrit

$$\sigma_X k \leq k(x, y) \leq \sigma_Y k.$$

Notons par f^* (resp. f^{**}) la polaire (resp. bipolaire) de la fonction f . f^* est un élément de $\overline{R}^{X' \times Y'}$ et s'exprime comme suit :

$$f^*(x', y') = -\inf\{f(x, y) : x \notin \Delta_X x', y \notin \Delta_Y y'\}.$$

Désignons par $P(X, Y) = \{f \in \overline{R}^{X \times Y} : \text{bipolaire de } f = f, \Delta_X \Delta_X f = f \text{ et } \Delta_Y \Delta_Y f = f\}$.

Soient $\phi \in P(X, Y')$ et $\psi \in P(X', Y)$ telles que ψ soit la polaire de ϕ . On obtient :

$$\psi = \Delta_Y \theta \Delta_X \phi = \Delta_X \theta \Delta_Y \phi.$$

La polaire de ψ n'est autre que la fonction ϕ car celle-ci est égale à sa bipolaire. Ainsi

$$\phi = \Delta_Y \theta \Delta_X \psi = \Delta_X \theta \Delta_Y \psi.$$

Construisons à partir des fonctions ϕ et ψ deux fonctions $\bar{k}$ et $\underline{k}$ définies sur $X \times Y$ et qui vérifient $(P, -P)$. Elles vont être les éléments extrêmes d'une classe de fonctions. Posons $\bar{k} = \theta \Delta_Y \phi$ et $\underline{k} = \Delta_X \psi$. Leur expression est :

$$\bar{k} = \inf\{\phi(x, y') : y \notin \Delta_Y y'\} \quad \text{et} \quad \underline{k} = -\inf\{\psi(x', y) : x \notin \Delta_X x'\}.$$

Remarque 3. D'après les égalités et notations précédentes, on peut aussi écrire que :

$$\psi = \Delta_X \bar{k} \quad \text{et} \quad \phi = \Delta_Y \theta \underline{k}.$$

Théorème 1. Pour tout x fixé dans X , la fonction $y \rightarrow \bar{k}(x, y)$ appartient à $P(Y)$.

Pour tout y fixé dans Y , la fonction $x \rightarrow \underline{k}(x, y)$ appartient à $P(X)$.

Preuve.

$$\sigma_Y \bar{k} = \theta \Delta_Y \Delta_Y \theta \bar{k} = \theta \Delta_Y \Delta_Y \theta \theta \Delta_Y \phi = \theta \Delta_Y \Delta_Y \Delta_Y \phi = \theta \Delta_Y \phi = \bar{k}$$

et

$$\sigma_X \underline{k} = \Delta_X \Delta_X \underline{k} = \Delta_X \Delta_X \Delta_X \psi = \Delta_X \psi = \underline{k}. \quad \square$$

Théorème 2. Pour tout $k \in \overline{R}^{X \times Y}$ vérifiant $(P, -P)$ tel que $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$, alors :

- i) $\sigma_X k = \underline{k}$ et $\sigma_Y k = \bar{k}$;
- ii) $\Delta_X k = \psi$ et $\Delta_Y \theta k = \phi$.

Preuve. i) Il suffit de vérifier que $\sigma_X \bar{k} = \underline{k}$ et $\sigma_Y \underline{k} = \bar{k}$.

$$\sigma_X \bar{k} = \Delta_X \Delta_X \theta \Delta_Y \phi = \Delta_X \psi = \underline{k} \quad \text{et} \quad \sigma_Y \underline{k} = \theta \Delta_Y \Delta_Y \theta \Delta_X \psi = \theta \Delta_Y \phi = \bar{k}.$$

ii) D'après la remarque 3, il suffit de vérifier que $\phi = \Delta_Y \theta \bar{k}$ et $\psi = \Delta_X \underline{k}$. En effet $\Delta_X \underline{k} = \Delta_X \Delta_X \psi = \Delta_X \psi = \psi$ et $\Delta_Y \theta \bar{k} = \Delta_Y \theta \theta \Delta_Y \phi = \Delta_Y \Delta_Y \phi = \phi$ ce qui achève la preuve. $\square$

Théorème 3. Soit k et $k' \in \overline{R}^{X \times Y}$ vérifiant $(P, -P)$. La relation $\mathcal{R}$ définie par

$$k \mathcal{R} k' \iff \sigma_X k = \sigma_X k' \quad \text{et} \quad \sigma_Y k = \sigma_Y k'$$

est une relation d'équivalence et le sous-ensemble $K = \{k \in \overline{R}^{X \times Y} \text{ vérifiant } (P, -P) : \underline{k} \leq k \leq \bar{k}\}$ est une classe d'équivalence.

Preuve. Soit k et k' deux éléments de K . D'après le théorème précédent $\sigma_X k = \sigma_X k' = \underline{k}$ et $\sigma_Y k = \sigma_Y k' = \bar{k}$ d'où $k \mathcal{R} k'$.

Réciproquement, pour $k \in K$, considérons $k' \in \overline{R}^{X \times Y}$ vérifiant $(P, -P)$ tel que $k \mathcal{R} k'$. On a donc $\sigma_X k = \sigma_X k' = \underline{k}$. Comme $\sigma_X k' \leq k'$, on en déduit que $\underline{k} \leq k'$. De même, $\sigma_Y k = \sigma_Y k' = \bar{k}$ comme $k' \leq \sigma_Y k'$, on déduit que $k \leq \bar{k}$. En définitive $k' \in K$. $\square$

Remarque 4. $\sigma_X \sigma_Y \underline{k} = \sigma_X \bar{k} = \underline{k} = \sigma_X \underline{k}$ et $\sigma_Y \sigma_X \bar{k} = \sigma_Y \underline{k} = \bar{k} = \sigma_Y \bar{k}$. Ces égalités suggèrent l'emploi d'un nouvel ensemble. On pose :

$$S(X \times Y) = \{k \in \overline{R}^{X \times Y} \text{ vérifiant } (P, -P) : \sigma_X \sigma_Y k = \sigma_X k \text{ et } \sigma_Y \sigma_X k = \sigma_Y k\}.$$

Remarque 5. Toutes les fonctions k vérifiant $(P, -P)$ et situées entre $\underline{k}$ et $\bar{k}$ appartiennent à $S(X \times Y)$, autrement dit la classe K est incluse dans $S(X \times Y)$. En effet, pour k vérifiant $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$, on a :

$$\sigma_X \sigma_Y k = \sigma_X \bar{k} = \underline{k} = \sigma_X k \quad \text{et} \quad \sigma_Y \sigma_X k = \sigma_Y \underline{k} = \bar{k} = \sigma_Y k.$$

Théorème 4. Soit $k \in S(X \times Y)$. Si on pose $f = \Delta_X k$ et $g = \Delta_Y \theta k$, alors ces deux fonctions sont mutuellement polaires. En plus f (resp. g) est un élément de $P(X, Y')$ (resp. $P(X', Y)$).

Preuve. On emploie la remarque 1 i). D'une part

$$\Delta_X \theta \Delta_Y' g = (\Delta_X \Delta_X') \Delta_X \theta \Delta_Y' g = \Delta_X \sigma_X \sigma_Y k = \Delta_X \sigma_X k = \Delta_X k = f$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \Delta_Y \theta \Delta_X' f &= \Delta_Y (\theta \Delta_Y' \Delta_Y) \theta \Delta_X' f = \Delta_Y \theta \sigma_Y \sigma_X k = \Delta_Y \theta \sigma_Y k \\ &= \Delta_Y \Delta_Y' \Delta_Y \theta k = \Delta_Y \theta k = g. \end{aligned}$$

Par conséquent les fonctions f et g sont mutuellement polaires.

En remarquant qu'on a aussi les égalités suivantes $\Delta_Y' \theta \Delta_X g = f$ et $\Delta_X' \theta \Delta_Y f = g$, on déduit que

$$\Delta_Y' \Delta_Y f = (\Delta_Y' \Delta_Y \Delta_Y') \theta \Delta_X g = \Delta_Y' \theta \Delta_X g = f$$

et

$$\Delta_X' \Delta_X g = (\Delta_X' \Delta_X \Delta_X') \theta \Delta_Y f = \Delta_X' \theta \Delta_Y f = g$$

puis,

$$\Delta_X \Delta_X' f = (\Delta_X \Delta_X' \Delta_X) k = \Delta_X k = f$$

et

$$\Delta_Y \Delta_Y' g = (\Delta_Y \Delta_Y' \Delta_Y) \theta k = \Delta_Y \theta k = g.$$

Donc f appartient à $P(X, Y')$ et g appartient à $P(X', Y)$. $\square$

Nous sommes en mesure d'étudier la réciproque du théorème 2.

Théorème 4 bis. Pour tout k appartenant à $S(X \times Y)$, il existe deux fonctions mutuellement polaires ϕ appartenant à $P(X, Y')$ et ψ appartenant à $P(X', Y)$ telles que si l'on pose $\bar{k} = \theta \Delta_{Y'} \phi$ et $\underline{k} = \Delta_{X'} \psi$ alors $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$, $\sigma_X k = \underline{k}$ et $\bar{k} = \sigma_Y k$.

Preuve. La démonstration se fait en deux étapes.

a) Posons $\phi = \Delta_Y \theta \sigma_X k$ et $\psi = \Delta_X \sigma_Y k$. On obtient

$$\begin{aligned}\Delta_X \theta \Delta_{Y'} \phi &= \Delta_X \theta \Delta_{Y'} \Delta_Y \theta \sigma_X k = \Delta_X \sigma_Y \sigma_X k = \Delta_X \sigma_Y k = \psi \\ \Delta_Y \theta \Delta_{X'} \psi &= \Delta_Y \theta \Delta_{X'} \Delta_X \sigma_Y k = \Delta_Y \theta \sigma_X \sigma_Y k = \Delta_Y \theta \sigma_X k = \phi.\end{aligned}$$

Par conséquent ϕ et ψ sont mutuellement polaires et par suite en remarquant qu'on a aussi les égalités suivantes

$$\Delta_{Y'} \theta \Delta_X \phi = \psi \quad \text{et} \quad \Delta_{X'} \theta \Delta_Y \psi = \phi$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\Delta_{Y'} \Delta_Y \psi &= \Delta_{Y'} \Delta_Y \Delta_{Y'} \theta \Delta_X \phi = \Delta_{Y'} \theta \Delta_X \phi = \psi \\ \Delta_{X'} \Delta_X \phi &= \Delta_{X'} \Delta_X \Delta_{X'} \theta \Delta_Y \psi = \Delta_{X'} \theta \Delta_Y \psi = \phi.\end{aligned}$$

En remplaçant ψ et ϕ par leur expression, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_X \Delta_{X'} \psi &= \Delta_X \Delta_{X'} \Delta_X \sigma_Y k = \Delta_X \sigma_Y k = \psi \\ \Delta_Y \Delta_{Y'} \phi &= \Delta_Y \Delta_{Y'} \Delta_Y \theta \sigma_X k = \Delta_Y \theta \sigma_X k = \phi\end{aligned}$$

donc $\phi \in P(X, Y')$ et $\psi \in P(X', Y)$.

b) Posons

$$\sigma_X k = k_x \quad \text{et} \quad \sigma_Y k = k_y$$

d'après la remarque 5, on obtient alors

$$\sigma_X \sigma_Y k = \sigma_X k_y = k_x \quad \text{et} \quad \sigma_Y \sigma_X k = \sigma_Y k_x = k_y.$$

D'une manière évidente, on a :

$$k_x \leq k \leq k_y, \quad \sigma_X k_x = k_x \quad \text{et} \quad \sigma_Y k_y = k_y.$$

Par suite pour tout k' appartenant à $\bar{R}^{X \times Y}$ vérifiant $(P, -P)$ tel que $k_x \leq k' \leq k_y$, on a

$$\sigma_X k' = k_x \quad \text{et} \quad \sigma_Y k' = k_y$$

puis

$$\underline{k} = \Delta_{X'} \psi = \Delta_{X'} \Delta_X k_y = \sigma_X k_y = k_x$$

et

$$\bar{k} = \theta \Delta_{Y'} \phi = \theta \Delta_{Y'} \Delta_Y \theta k_x = \sigma_Y k_x = k_y$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

En résumé, en combinant les théorèmes 2, 4 et 4 bis, on conclut que $f = \psi$ et $g = \phi$, autrement dit les fonctions ψ et ϕ sont les mêmes quelle que soit la fonction k prise dans la classe L .

3. Polaires d'une fonction qui vérifient $(P, -P)$.

Définition 2. Soit $k \in S(X \times Y)$. On appelle *polaire supérieure* (resp. *inférieure*) de k la fonction

$$k_s = \theta \Delta_Y \Delta_X k \quad (\text{resp. } k_i = \Delta_X \Delta_Y \theta k)$$

c'est-à-dire

$$k_s(x', y') = -\sup\{\inf\{k(x, y) : x \notin \Delta_{X'} x'\} : y \notin \Delta_{Y'} y'\} \quad \forall (x', y') \in X' \times Y'$$

$$k_i(x', y') = -\inf\{\sup\{k(x, y) : y \notin \Delta_{Y'} y'\} : x \notin \Delta_{X'} x'\} \quad \forall (x', y') \in X' \times Y'.$$

Si on pose $\psi = \Delta_X k$ et $\phi = \Delta_Y \theta k$, alors d'après le théorème 4, ces fonctions sont mutuellement polaires et appartiennent respectivement à $P(X', Y)$ et $P(X, Y')$. On constate alors que $k_s = \theta \Delta_Y \psi$ et $k_i = \Delta_X \phi$, et que ces deux fonctions appartiennent à $S(X' \times Y')$.

Reprenons le procédé de construction du paragraphe précédent qui, à partir de deux fonctions $\phi \in P(X, Y')$ et $\psi \in P(X', Y)$ mutuellement polaires nous a permis de construire par polarité partielle les fonctions $\underline{k}$ et $\bar{k}$. On recommence cette construction mais en inversant les rôles de ϕ et ψ , autrement dit on appliquera respectivement les polarités partielles Δ_X et $\theta \Delta_Y$ à ϕ et ψ . On posera

$$\underline{m} = \Delta_X \phi \quad \text{et} \quad \overline{m} = \theta \Delta_Y \psi$$

avec $\psi = \Delta_X k$ et $\phi = \Delta_Y \theta k$. On remarque alors que $\underline{m} = k_i$ et $\overline{m} = k_s$. Évidemment, les fonctions $\underline{m}$ et $\overline{m}$ vérifient le genre de propriétés que celles vérifiées par $\underline{k}$ et $\bar{k}$.

Si on pose $M = \{k \in \overline{R}^{X' \times Y'} \text{ vérifiant } (P, -P) : \underline{m} \leq m \leq \overline{m}\}$, alors M est une classe d'équivalence; on dira que M est la classe polaire de K et on notera $M = K^*$.

Pour $m \in M$ (qui est inclus dans $S(X' \times Y')$), on définit de même les fonctions m_i et m_s en posant

$$m_i = \Delta_{X'} \Delta_{Y'} \theta m \quad \text{et} \quad m_s = \theta \Delta_{Y'} \Delta_{X'} m.$$

On remarque facilement que $m_i \leq m_s$. En plus

$$m_s(x, y) = -\sup\{\inf\{m(x', y') : x' \notin \Delta_X x\} : y' \notin \Delta_Y y\} \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

et

$$m_i(x, y) = -\inf\{\sup\{m(x', y') : y' \notin \Delta_Y y\} : x' \notin \Delta_X x\} \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Notons alors par $M^* = K^{**} = \{l \in \overline{R}^{X \times Y} \text{ vérifiant } (P, -P) : m_i \leq l \leq m_s\}$. On va prouver que cet ensemble n'est autre que l'ensemble K .

Théorème 5. $K^{**} = K$. Plus précisément si on note $\underline{k} = \sigma_X k$ et $\bar{k} = \sigma_Y k$, alors pour tout m appartenant à M on a $m_s = \bar{k}$ et $m_i = \underline{k}$ autrement dit les fonctions extrêmes de K^{**} sont $\underline{k}$ et $\bar{k}$.

Preuve. Il suffit de prouver que

$$(\underline{m})_s = (k_i)_s = (\overline{m})_s = (k_s)_s = \bar{k} \quad \text{et} \quad (\underline{m})_i = (k_i)_i = (k_s)_i = (\overline{m})_i = \underline{k}.$$

D'après les notations précédentes $k_i = \Delta_X \phi$ et $k_s = \theta \Delta_Y \psi$; il s'ensuit les égalités suivantes

$$\begin{aligned}(k_i)_s &= (\Delta_X \phi)_s = \theta \Delta_Y \Delta_X \phi = \theta \Delta_Y \phi = \bar{k} \\(k_s)_s &= (\theta \Delta_Y \psi)_s = \theta \Delta_Y \Delta_X \theta \Delta_Y \psi = \theta \Delta_Y \phi = \bar{k} \\(k_i)_i &= (\Delta_X \phi)_i = \Delta_X \Delta_Y \theta \Delta_X \phi = \Delta_X \psi = \underline{k} \\(k_s)_i &= (\theta \Delta_Y \psi)_i = \Delta_X \Delta_Y \theta \Delta_Y \psi = \Delta_X \psi = \underline{k}. \quad \square\end{aligned}$$

4. Sous-différentiel d'une fonction qui vérifie $(P, -P)$.

Définition 3. (cf. [4]) Soient $f \in \bar{R}^X$ qui vérifie P et $x \in X$. $x' \in X'$ est un *sous-gradient* de f au point x si et seulement si $\Delta_X f(x') + f(x) = 0$ et $x' \notin \Delta_X x$. L'ensemble des sous-gradients de f au point x s'appelle le *sous-différentiel* et sera noté $\delta f(x)$.

Soit $k \in S(X \times Y)$. Pour chaque y fixé dans Y (resp. x fixé dans X), la fonction $x \rightarrow k(x, y)$ vérifie P (resp. $y \rightarrow k(x, y)$ vérifie P). On notera $\delta_X k(x, y)$ (resp. $\delta_Y k(x, y)$) son sous-différentiel en x (resp. en y). C'est une partie (éventuellement vide) de X' (resp. de Y').

Définition 4. Soit $k \in S(X \times Y)$. L'ensemble $\delta k(x, y) = \delta_X k(x, y) \times \delta_Y k(x, y)$ est appelé le *sous-différentiel* de k au point (x, y) . C'est une partie éventuellement vide de $X' \times Y'$.

Théorème 6. Soient $k \in S(X \times Y)$, $\phi = \Delta_Y \theta k$ et $\psi = \Delta_X k$.

$$(x', y') \in \delta k(x, y) \iff \phi(x, y') + \psi(x', y) = 0 \quad \text{et} \quad (x', y') \notin \Delta_X x \times \Delta_Y y.$$

Preuve. La condition nécessaire est évidente. Condition suffisante : comme $x' \notin \Delta_X x \iff x \notin \Delta_{X'} x'$ (resp. $y' \notin \Delta_Y y \iff y \notin \Delta_{Y'} y'$), on en déduit $0 \leq \psi(x', y) + k(x, y)$ (resp. $0 \leq \phi(x, y') + \theta k(x, y)$). Or

$$\phi(x, y') + \psi(x', y) = [\phi(x, y') + \theta k(x, y)] + [\psi(x', y) + k(x, y)] = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\phi(x, y') + \theta k(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x', y) + k(x, y) = 0. \quad \square$$

Théorème 7. Soient $k \in S(X \times Y)$ et $m \in M = K^*$.

$$(x', y') \in \delta k(x, y) \iff (x, y) \in \delta m(x', y').$$

Preuve. Appliquons le théorème 4 à m . On a

$$\Delta_Y \theta m = \psi \in P(X', Y) \quad \text{et} \quad \Delta_X k = \phi \in P(X, Y').$$

Comme $\theta \Delta_Y \phi = \bar{k}$, $\Delta_X \psi = \underline{k}$ et $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$, il s'ensuit

$$\begin{aligned}(x, y) \in \delta m(x', y') &\iff \phi(x, y') + \psi(x', y) = 0, \quad x' \notin \Delta_X x \quad \text{et} \quad y' \notin \Delta_Y y \\&\iff \phi(x, y') + \psi(x', y) = 0, \quad x \notin \Delta_{X'} x' \quad \text{et} \quad y \notin \Delta_{Y'} y' \\&\iff (x', y') \in \delta k(x, y). \quad \square\end{aligned}$$

Remarque 5. Quand m varie dans $M = K^*$ ou k varie dans K , les fonctions ϕ et ψ ne changent pas. Par conséquent les ensembles $\delta k(x, y)$ et $\delta m(x', y')$ ne dépendent pas particulièrement de m ou de k mais des classes K et M .

5. Application : problème $(P, -P)$. Dans ce paragraphe, on prendra $X = R^n$, $X' = R^m$, $Y = R^p$, $Y' = R^q$, et on supposera que la polarité Δ vérifie la condition suivante :

$$\text{pour tout } A \text{ inclus dans } X, \quad \Delta_X A = \emptyset \iff 0 \in \Delta_{X'} \Delta_X A.$$

Par convention, on posera $\Delta_{X'} \emptyset = X$ et $\Delta_X X = \emptyset$ (de même $\Delta_X \emptyset = X'$ et $\Delta_{X'} X' = \emptyset$).

À la fonction $h \in \overline{R}^{X \times Y}$, On associe les deux problèmes

$$\alpha = \inf\{\sup\{h(x, y) : y \in Y\} : x \in X\} \text{ et } \beta = \sup\{\inf\{h(x, y) : x \in X\} : y \in Y\}.$$

Le premier problème s'appelle le problème primal et le second, problème dual.

Théorème 8. Soient $\psi \subset P(X', Y)$ et $\phi \in P(X, Y')$ mutuellement polaires. Si on pose $\theta \Delta_{Y'} \phi = \bar{k}$ et $\Delta_{X'} \psi = \underline{k}$, alors toutes les fonctions h de $\overline{R}^{X \times Y}$ vérifiant $(P, -P)$ et $\underline{k} \leq h \leq \bar{k}$ ont les mêmes problèmes primal et dual.

Preuve. Soit $h : \underline{k} \leq h \leq \bar{k}$. Comme $\{y \notin \Delta_{Y'} 0\} = Y$, on en déduit que

$$\phi(x, 0) = \Delta_{Y'} \theta h(x, 0) = \sup\{h(x, y) : y \notin \Delta_{Y'} 0\} = \sup\{h(x, y) : y \in Y\}.$$

De même

$$-\psi(0, y) = \theta \Delta_X h(0, y) = \inf\{h(x, y) : x \notin \Delta_X 0\} = \inf\{h(x, y) : x \in X\}.$$

Puisque ϕ et ψ ne dépendent pas de h , on déduit qu'elles ont les mêmes problèmes primal et dual. $\square$

Théorème 9. Soit $k \in S(X \times Y)$. On a

$$\alpha = \beta \iff k_s(0, 0) = k_i(0, 0).$$

Autrement dit, toutes les fonctions $m \in K^*$ prennent la même valeur en $(0, 0) \in X' \times Y'$.

Preuve. Évident. $\square$

Définition 5. On dit que $(a, b) \in X \times Y$ est un point de selle de h si l'on a :

$$h(a, y) \leq h(a, b) \leq h(x, b) \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

autrement dit

$$\sup\{h(a, y) : y \in Y\} = h(a, b) = \inf\{h(x, b) : x \in X\}.$$

Théorème 10. Soient $k \in S(X \times Y)$, $\phi = \Delta_{Y'} \theta k$ et $\psi = \Delta_X k$. $(a, b) \in X \times Y$ est un point de selle de $k \iff \phi(a, 0) + \psi(0, b) = 0$.

Preuve.

(a, b) est un point de selle de k

$$\iff \sup\{h(a, y) : y \in Y\} = h(a, b) = \inf\{h(x, b) : x \in X\}$$

$$\iff \phi(a, 0) = h(a, b) = -\psi(0, b). \quad \square$$

English extended abstract. To any two nonempty sets X and X' (resp. Y and Y') we associate a polarity $\Delta_X: 2^X \rightarrow 2^{X'}$ (resp. $\Delta_Y: 2^Y \rightarrow 2^{Y'}$) and denote the *slices* of a function f in $\overline{R}^X$ by $T_\lambda f = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ and $t_\lambda f = \{x \in X : f(x) < \lambda\}$. The polarity satisfies the following relation connecting the polar of the slices of f and the slices of its polar

$$\Delta_X t_\lambda f = T_{-\lambda} \Delta_X f.$$

We also consider a finite set P of properties which will be determined, among other things, by the choice of the polarity. Let $k \in \overline{R}^{X \times Y}$ be a function of the two variables x and y satisfying $(P, -P)$. We apply to k the operation of polarity with respect to the first variable, thereby obtaining a function $\Delta_X k \in \overline{R}^{X' \times Y}$ given explicitly by the following expression

$$\Delta_X k(x', y) = -\inf\{k(x, y) : x \notin \Delta_{X'} x'\} = \sup\{-k(x, y) : x \notin \Delta_{X'} x'\}.$$

Without changing the polarity, we can apply it to $\theta k = -k$ with respect to the second variable y to obtain a function $\Delta_Y \theta k \in \overline{R}^{X \times Y'}$ given by

$$\Delta_Y \theta k(x, y') = -\inf\{-k(x, y) : y \notin \Delta_{Y'} y'\} = \sup\{k(x, y) : y \notin \Delta_{Y'} y'\}.$$

Note that both functions $\Delta_X k$ and $\Delta_Y \theta k$ satisfy (P, P) . It is then natural to introduce a regularization operator σ_X (resp. σ_Y) with respect to x (resp. y) given by

$$\sigma_X k = \Delta_{X'} \Delta_X k \quad (\text{resp. } \sigma_Y k = \Delta_{Y'} \Delta_Y k)$$

and to define the following sets

$$\begin{aligned} P(X) &= \{f \in \overline{R}^X : f = \Delta_{X'} \Delta_X f\}, \\ P(X, Y) &= \{f \in \overline{R}^{X \times Y} : \text{bipolar } f = f, \Delta_{X'} \Delta_X f = f, \Delta_{Y'} \Delta_Y f = f\}, \\ S(X \times Y) &= \{k \in \overline{R}^{X \times Y} \text{ satisfying } (P, -P) : \sigma_X \sigma_Y k = \sigma_X k, \sigma_Y \sigma_X k = \sigma_Y k\}. \end{aligned}$$

Let $\phi \in P(X, Y')$ and $\psi \in P(X', Y)$ be such that ψ is the polar of ϕ . We obtain

$$\psi = \Delta_{Y'} \theta \Delta_X \phi = \Delta_X \theta \Delta_{Y'} \phi.$$

The polar of ψ is ϕ since the latter is equal to its bipolar. Hence

$$\phi = \Delta_Y \theta \Delta_{X'} \psi = \Delta_{X'} \theta \Delta_Y \psi.$$

Starting with ϕ and ψ , we can build two functions $\bar{k}$ and $\underline{k}$, both defined on $X \times Y$ and both satisfying $(P, -P)$, by $\bar{k} = \theta \Delta_{Y'} \phi$ and $\underline{k} = \Delta_{X'} \psi$.

Our main results are as follows:

Theorem 1. *For every fixed x in X , the function $y \rightarrow \bar{k}(x, y)$ belongs to $P(Y)$. For every fixed y in Y , the function $x \rightarrow \underline{k}(x, y)$ belongs to $P(X)$.*

Theorem 2. For every $k \in \overline{R}^{X \times Y}$ satisfying $(P, -P)$ and $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$, we have

- i) $\sigma_X k = \underline{k}$ and $\sigma_Y k = \bar{k}$,
- ii) $\Delta_X k = \psi$ and $\Delta_Y \theta k = \phi$.

In the following theorem we partition the functions satisfying $(P, -P)$ into equivalence classes and characterize the extremal elements of these equivalence classes.

Theorem 3. Let k and $k' \in \overline{R}^{X \times Y}$ satisfying $(P, -P)$. The relation $\mathfrak{R}$ defined by

$$k \mathfrak{R} k' \iff \sigma_X k = \sigma_X k' \quad \text{and} \quad \sigma_Y k = \sigma_Y k'$$

is an equivalence relation and the subset

$$K = \{k' \in \overline{R}^{X \times Y} \text{ satisfying } (P, -P) : \underline{k} \leq k' \leq \bar{k}\}$$

is an equivalence class.

The following results enables us to build mutually polar functions.

Theorem 4. Let $k \in S(X \times Y)$ and define f and g by $\Delta_X k$ and $g = \Delta_Y \theta k$. Then these two functions are mutually polar. Moreover, f (resp. g) is an element of $P(X, Y')$ (resp. $P(X', Y)$).

Theorem 4 bis. For every $k \in S(X \times Y)$, there exist two mutually polar functions ϕ in $P(X, Y')$ and ψ in $P(X', Y)$ such that if we let $\bar{k} = \theta \Delta_Y \phi$ and $\underline{k} = \theta \Delta_X \psi$ then $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$, $\equiv \sigma_X k$ and $\bar{k} = \sigma_Y k$.

The notion of lower polar k_i and upper polar k_s of a function k in $S(X \times Y)$ and the polar class of K denoted by M are introduced in Chapter 3 using the operator of partial polarity. Let $k \in S(X \times Y)$. The upper polar (resp. lower polar) of k is the function

$$k_s = \theta \Delta_Y \Delta_X k \quad (\text{resp. } k_i = \Delta_X \Delta_Y \theta k).$$

We also write

$$M = \{m \in \overline{R}^{X' \times Y'} \text{ satisfying } (P, -P) : \underline{m} \leq m \leq \overline{m}\}$$

$\underline{m} = \Delta_X \phi$ and $\overline{m} = \theta \Delta_Y \psi$ with $\psi = \Delta_X k$ and $\phi = \Delta_Y \theta k$. M is the polar class of K . For $m \in M$ (which is included in $S(X' \times Y')$), we define in a similar manner the function m_i and m_s by $m_i = \Delta_{X'} \Delta_{Y'} \theta m$ and $m_s = \theta \Delta_{Y'} \Delta_{X'} m$. We then denote by M^* the set $M^* = \{l \in \overline{R}^{X \times Y} \text{ satisfying } (P, -P) : m_i \leq l \leq m_s\}$. We have

Theorem 5. $M^* = K$. More precisely, if we write $\underline{k} = \sigma_X k$ and $\bar{k} = \sigma_Y k$ then for every m in M , $m_s = \bar{k}$ and $m_i = \underline{k}$. This means that the extremal functions of M^* are $\bar{k}$ and $\underline{k}$.

The subdifferential of a function satisfying $(P, -P)$ is defined in Chapter 4 where we give a simple characterization of subgradients. Let $k \in S(X \times Y)$ and denote by $\delta_X k(x, y)$ (resp. $\delta_Y k(x, y)$) its subdifferential at x (resp. at y).

Theorem 6. Let $k \in S(X \times Y)$, $\phi = \Delta_Y \theta k$, $\psi = \Delta_X k$ and write $\delta k(x, y) = \delta_X k(x, y) \times \delta_Y k(x, y)$. Then

$$(x', y') \in \delta k(x, y) \iff \phi(x, y') + \psi(x', y) = 0 \quad \text{and} \quad (x', y') \notin \Delta_X x \times \Delta_Y y.$$

Finally, in Chapter 5, we apply the above results to the characterization of the saddle points of a functions in the following way.

Theorem 10. Let $k \in S(X \times Y)$, $\phi = \Delta_Y \theta k$, $\psi = \Delta_X k$. Then (a, b) is a saddle point of k if and only if $\phi(a, 0) + \psi(0, b) = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Atteia et A. Elqortobi, *Hamiltonien quasi-convexes quasi-concaves*, Rech. Opér. **25** (1991), 425–438.
2. P.-J. Laurent, *Fonctions convexes concaves et problèmes de minimax*, Séminaire d'Analyse Numérique, Grenoble, 1972.
3. J.-J. Moreau, *Inf convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques*, J. Math. Pures Appl. **49** (1970), 109–154.
4. M. Volle, *Conjugaison par tranches*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **139** (1985), 279–312.
5. ———, *Conjugaison par tranches et dualité de Toland*, Optimization **18** (1987), 633–642.

DÉP. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
SHERBROOKE (QUÉBEC)
J1K 2R1