

SUR LES CONSTANTES DE THELE ET DE SCHÄFFER

JOCELYN DESBIENS

RÉSUMÉ. Nous formulons une nouvelle représentation de la mesure de symétrie de l'orthogonalité de Birkhoff-James dans les espaces de Banach de dimension finie. Nous donnons de plus une nouvelle caractérisation des espaces de Hilbert.

ABSTRACT. We give a new representation of the measure of symmetry of Birkhoff-Jame's orthogonality in a finite-dimensional Banach space and a new characterization of Hilbert spaces. See the English extended abstract at the end of the paper.

0. Introduction. La notion d'orthogonalité telle que définie par Birkhoff [4] est une extension naturelle aux espaces de Banach de la notion bien connue d'orthogonalité dans les espaces de Hilbert ($x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$).

En 1965, Schäffer [21] montra que la double inégalité suivante est toujours vraie :

$$1 \leq \underbrace{\limsup_{\alpha[x,y] \rightarrow 0^+} \frac{\alpha[x,y] \max\{\|x\|, \|y\|\}}{\|x-y\|}}_{s(\mathcal{B})} \leq 2,$$

où x et y sont des vecteurs d'un espace de Banach réel donné $\mathcal{B}$ et $\alpha[x, y]$ est la distance angulaire [5] mesurée entre les vecteurs x et y . En 1974, Thele [23] trouva que la constante de Lipschitz de l'opérateur de projection radiale $r: \mathcal{B} \rightarrow B(\mathcal{O}; 1)$ défini par

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

admet la représentation suivante :

$$k(\mathcal{B}) = \sup \left\{ \frac{\|y\|}{\|x - \lambda y\|} \in \mathbb{R} \mid x \perp y, y \neq \mathcal{O}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

et que, de plus, $1 \leq k(\mathcal{B}) \leq 2$. D'autres représentations de cette constante ont été données [2, 8, 22].

Le but du présent article est de montrer *primo* que, dans les espaces de dimension finie, l'égalité

$$s(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B})$$

Reçu le 4 septembre 1991 et, sous forme définitive, le 23 avril 1992.

©Association mathématique du Québec

est toujours vraie (théorème 1), et ceci en mettant l'accent sur le lien existant entre les projections, les hyperplans et les mesures de symétrie de l'orthogonalité de Birkhoff-James dans les espaces vectoriels normés (la démonstration du théorème est modelée sur celle de [21]). Ce qui permettra dans un deuxième temps de généraliser un théorème de Schäffer [21] et un théorème de Papini [19] (corollaires 2 et 3). *Tertio*, nous donnerons une nouvelle caractérisation de la symétrie de l'orthogonalité de Birkhoff-James dans un espace de Banach strictement convexe (théorème 2 et corollaire 4).

1. Notations.

$(\mathcal{B}, \ \cdot\)$	Espace de Banach réel.
$(\mathcal{B}^*, \ \cdot\)$	Le dual topologique de l'espace $\mathcal{B}$.
$\mathcal{O}$	L'origine de l'espace $\mathcal{B}$.
$\mathcal{P}(x, y)$	Le plan délimité par les vecteurs indépendants x et y .
$S(x; \rho)$	$\{y \in \mathcal{B} \mid \ x - y\ = \rho\}, \rho > 0$.
$B(x; \rho)$	$\{y \in \mathcal{B} \mid \ x - y\ \leq \rho\}, \rho > 0$.
$S(\mathcal{B})$ ou $\mathcal{S}$	$S(\mathcal{O}; 1) \subset \mathcal{B}$.
$S(x, y)$	$S(\mathcal{O}; 1) \cap \mathcal{P}(x, y)$.
$\perp$	L'orthogonalité au sens de Birkhoff-James.
$\mathcal{Z}(x, y)$	$\{z \in \mathcal{P}(x, y) \mid \ z\ = 1; z \perp x\}$.
$\dim(\mathcal{B})$	La dimension algébrique de $\mathcal{B}$.
$\mu(\mathcal{B})$	La constante rectangle de l'espace $\mathcal{B}$.
$\beta(\mathcal{B})$	Le biais de l'espace $\mathcal{B}$.
$\text{MPB}(\mathcal{B})$	La constante de Smith de l'espace $\mathcal{B}$.
$\text{MPB}'(\mathcal{B})$	La constante de Baronti de l'espace $\mathcal{B}$.
$\overline{\text{MPB}}(\mathcal{B})$	La constante de Franchetti de l'espace $\mathcal{B}$.
$k(\mathcal{B})$	La constante de Thele de l'espace $\mathcal{B}$.
$s(\mathcal{B})$	La constante de Schäffer de l'espace $\mathcal{B}$.
$\text{signe}(x)$	La signature du vecteur x c'est-à-dire $\text{signe}(x) = x/\ x\ $.
Rx	La droite $\{\lambda x \mid \lambda \in R\}$.

2. Préliminaires et rappels. Le but de cette section est de présenter au lecteur plusieurs définitions de la mesure de la symétrie de l'orthogonalité de Birkhoff-James que l'on retrouve éparpillées à gauche et à droite dans la documentation technique et de montrer qu'elles sont essentiellement équivalentes.

Rappelons en tout premier lieu la définition de la relation d'orthogonalité telle que donnée par Birkhoff.

Définition 1 (Birkhoff [4, p. 169]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $(x, y) \in \mathcal{B}^2$.

- (1) Nous dirons que x est *orthogonal* à y au sens de Birkhoff-James, ce que nous noterons par $x \perp y$, si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \forall \lambda \in R$.
- (2) Nous dirons aussi, reprenant à notre compte la terminologie de Giles [15], que x est *transversal* à y au sens de Birkhoff-James, ce que nous noterons par $x \top y$ si et seulement si $y \perp x$.

La définition originale de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James a été donnée par Birkhoff [4] en 1935. Elle fut reprise un peu plus tard par Fortet [11] et James [16] et utilisée par Joly [18] en 1969 dans sa définition de la mesure de convexité d'un espace de Banach. C'est ce qu'on a dénommé la "constante rectangle" d'un espace vectoriel normé. En voici la définition formelle :

Définition 2 (Joly [18, définition 2]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit la *constante rectangle* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on note $\mu(\mathcal{B})$, par la formule

$$\mu(\mathcal{B}) = \sup_{\substack{x \perp y \\ x \neq 0}} \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x + y\|}.$$

Joly a montré que $\sqrt{2} \leq \mu(\mathcal{B}) \leq 3$. On a en fait la caractérisation suivante¹ :

Proposition 1 (Del Rio et Benitez [7, théorème, p. 18]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Pour que la norme soit issue d'un produit scalaire il faut et il suffit que $\mu(\mathcal{B}) = \sqrt{2}$.

Pour obtenir une autre mesure de la "distance" entre la norme et un produit scalaire, nous avons introduit dans l'article [8] une constante associée à un espace de Banach $\mathcal{B}$, que nous notons $\beta(\mathcal{B})$, et dont la définition est :

Définition 3. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit le *biais* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on note $\beta(\mathcal{B})$, par la formule

$$\beta(\mathcal{B}) = \sup\{\gamma \in \mathbb{R} \mid x + \gamma y \perp y; 0 < \|x\| \leq \|y\|; x, y \in \mathcal{B}\}.$$

Nous avons montré [8] ci-dessous que ce paramètre peut en fait se redéfinir, par rapport à trois autres constantes, dans les termes suivants :

Définition 4 (Smith [22, p. 225]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit la *constante de projection métrique* ou *constante de Smith* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on note $\text{MPB}(\mathcal{B})$, par la formule

$$\text{MPB}(\mathcal{B}) = \sup\{\|\mathcal{P}_{\mathcal{E}}\| \in \mathbb{R} \mid \mathcal{E} \text{ est un sous-espace proximal de } \mathcal{B}\}$$

où

$$\|\mathcal{P}_{\mathcal{E}}\| = \sup\{\|y\| \in \mathbb{R} \mid y \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}}(x), \|x\| \leq 1\}$$

et $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(x)$ est la projection du vecteur x sur le sous-espace $\mathcal{E}$ de $\mathcal{B}$.

Rappelons qu'un sous-ensemble $\mathcal{E}$ d'un espace de Banach $\mathcal{B}$ est *proximal* si, pour tout $x \in \mathcal{B}$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(x) = \{y \in \mathcal{B} \mid \|x - y\| = d(x, \mathcal{E})\} \neq \emptyset$$

où

$$d(x, \mathcal{E}) = \inf\{\|x - y\| \in \mathbb{R} \mid y \in \mathcal{E}\}.$$

Définition 5 (Baronti [2, p. 1076]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit la *constante de Baronti* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on note $\text{MPB}'(\mathcal{B})$, par la formule

$$\text{MPB}'(\mathcal{B}) = \sup\{\|\mathcal{P}_{\mathcal{E}}\| \in \mathbb{R} \mid \mathcal{E} \text{ est un sous-espace de dimension 1 de } \mathcal{B}\}.$$

¹Joly n'a vérifié cette assertion que dans le cas où $\dim(\mathcal{B}) \geq 3$ ([18, proposition, p. 307]).

Définition 6. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. La *projection radiale* est la fonction $r: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{O}; 1)$ définie par la formule

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

On définit la *constante de Thele* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on note $k(\mathcal{B})$, comme étant la plus petite constante de Lipschitz de la projection r , c'est-à-dire le plus petit nombre réel ayant la propriété que

$$\|r(x) - r(y)\| \leq k(\mathcal{B})\|x - y\|$$

et ce pour tout $x, y \in \mathcal{B}$.

Les majorants donnés par Dunkl et Williams [10] et Schäffer [21] montrent que ce nombre est bien défini et a une valeur comprise entre 1 et 2. De plus, DeFigueiredo et Karlovitz ([6, proposition 3]) ont montré que la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ est symétrique si et seulement si $k(\mathcal{B}) = 1$.

Proposition 2 (Thele [23, p. 483]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors

$$k(\mathcal{B}) = \sup \left\{ \frac{\|y\|}{\|x - \lambda y\|} \in \mathbb{R} \mid x \perp y, y \neq \mathcal{O}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1)$$

Proposition 3 (Baronti [2, théorème 5]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On a toujours que

$$\text{MPB}(\mathcal{B}) = \text{MPB}'(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B}).$$

Proposition 4 (Desbiens [8, proposition 12]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On a toujours que

$$\text{MPB}(\mathcal{B}) = \text{MPB}'(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B}) = \beta(\mathcal{B}).$$

Notons maintenant par $\alpha[x, y]$ la *distance angulaire* [5] entre les vecteurs x et y c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \alpha[x, y] &= \|\text{signe}(x) - \text{signe}(y)\| \\ &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \end{aligned}$$

et ce, pour tout $x, y \in \mathcal{B} \setminus \{\mathcal{O}\}$ et définissons la fonction ψ par la formule

$$\psi(x, y) = \frac{\|x - y\|}{\alpha[x, y] \max\{\|x\|, \|y\|\}}$$

et ce, pour tout $x, y \in \mathcal{B} \setminus \{\mathcal{O}\}$ et $\alpha[x, y] \neq 0$. La fonction ψ est de toute évidence homogène de degré zéro et $\psi(x, y) = 1$ si $\|x\| = \|y\|$. De plus, Schäffer a montré que

Proposition 5 (Schäffer [21, p. 272]).

$$\frac{1}{2} \leq \liminf_{\alpha[x,y] \rightarrow 0^+} \psi(x, y) \leq 1.$$

Définition 7. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit la *constante de Schäffer* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on note $s(\mathcal{B})$, par la formule

$$s(\mathcal{B}) = \limsup_{\alpha[x,y] \rightarrow 0^+} \frac{1}{\psi(x, y)} = \limsup_{\alpha[x,y] \rightarrow 0^+} \frac{\alpha[x, y] \max\{\|x\|, \|y\|\}}{\|x - y\|}.$$

Rappelons aussi que $\mathcal{J}: \mathcal{B} \rightarrow 2^{\mathcal{B}^*}$ est l'*application de dualité normalisée* définie par la formule

$$\mathcal{J}(x) = \{x^* \in \mathcal{B}^* \mid \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

$\forall x \in \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}^*$ est le *dual topologique* de l'espace $\mathcal{B}$. Le théorème de Hahn-Banach garantit la non vacuité de l'ensemble $\mathcal{J}(x)$. La proposition suivante sera utile ultérieurement.

Proposition 6 (Diestel [9, théorème 3]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $z^* \in \mathcal{B}^*$. Alors $x \perp y$ pour chaque vecteur $y \in \ker(z^*)$ si et seulement si $|\langle x, z^* \rangle| = \|x\| \cdot \|z^*\|$.

Rappelons quelques faits connus à propos des projections et des hyperplans dans les espaces de Banach. Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace fermé d'un espace de Banach $\mathcal{B}$. Un opérateur linéaire continue surjectif $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ tel que $\pi(z) = z$, $\forall z \in \mathcal{E}$, est dénommé une *projection*. Un *hyperplan* est un sous-espace de $\mathcal{B}$ de la forme $\mathcal{E} = \ker(x^*)$ où $x^* \in \mathcal{S}^*$. On sait que $\mathcal{E}$ est proximal si et seulement si x^* atteint sa norme sur $\mathcal{S}$. Il n'est pas difficile de voir de plus qu'une projection π sur un hyperplan $\mathcal{E} = \ker(x^*)$ est toujours de la forme

$$\pi(z) = z - \langle z, x^* \rangle w, \quad \forall z \in \mathcal{B},$$

où w est un vecteur de $\mathcal{B}$ tel que $\langle w, x^* \rangle = 1$. Nous dénoterons alors cette application par $\pi_w^{x^*}$. Si $\|w\| = 1$ on dit alors que $\pi_w^{x^*}$ est une *projection polaire*. Dans ce cas on a que $\|I - \pi_w^{x^*}\| = 1$ (car $w \perp \mathcal{E}$) et $z - \langle z, x^* \rangle w \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}}(z)$, $\forall z \in \mathcal{B}$. On pose $\pi_{\mathcal{E}}^{x^*} = \pi_w^{x^*}$ dans le cas où le vecteur w est unique. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que l'espace $\mathcal{B}$ est réflexif on a alors que $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(z) = \{z - \langle z, x^* \rangle w\}$, $\forall z \in \mathcal{B}$, ce qui implique donc que $\|\mathcal{P}_{\mathcal{E}}\| = \|\pi_{\mathcal{E}}^{x^*}\|$. Le concept de projection polaire a été utilisé dans [14] où il y est montré que dans certains espaces de Banach classiques celui-ci coïncidait avec la notion de projection de norme minimale. Nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition de la constante $\overline{\text{MPB}}(\mathcal{B})$.

Définition 8 (Franchetti [13, p. 329]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit la *constante de Franchetti* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on note $\overline{\text{MPB}}(\mathcal{B})$, par la formule

$$\overline{\text{MPB}}(\mathcal{B}) = \sup\{\|\mathcal{P}_{\mathcal{E}}\| \in \mathbb{R} \mid \mathcal{E} \text{ est un hyperplan proximal de } \mathcal{B}\}.$$

Proposition 7 (Baronti et Papini [3, proposition 5.1]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On a toujours que

$$\overline{\text{MPB}}(\mathcal{B}) = \text{MPB}(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B}).$$

Soit $x \in \mathcal{S}$, $x^* \in \mathcal{J}(x)$. Posons $\mathcal{E} = \ker(x^*)$. L'hyperplan $\mathcal{E}$ est dans ce cas un sous-espace proximal de $\mathcal{E}$. Notons momentanément l'opérateur π_x^* par π . On sait ([20], pages 87–94) qu'à l'opérateur π est associée une unique fonction $\pi^*: \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ telle que

$$\langle \pi(z), y^* \rangle = \langle z, \pi^*(y^*) \rangle, \quad \forall z \in \mathcal{B}, \forall y^* \in \mathcal{B}^*.$$

L'application π^* est linéaire, continue et $\|\pi^*\| = \|\pi\|$. Montrons que π^* est une projection (polaire) de $\mathcal{B}^*$ sur l'hyperplan proximal $\mathcal{E}^* = \ker(\hat{x})$. A cet effet, notons par $\hat{x}$ l'unique fonctionnelle de $\mathcal{B}^{**}$ associée au vecteur x par l'isomorphisme naturel $v^* \mapsto \langle x, v^* \rangle$, $\forall v^* \in \mathcal{B}^*$. Montrons que $\hat{x} \in \mathcal{J}(x^*)$.

Lemme 1. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Si $x \in \mathcal{S}$ et $x^* \in \mathcal{J}(x)$ alors $\hat{x} \in \mathcal{J}(x^*)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle x^*, \hat{x} \rangle &= \langle x, x^* \rangle \\ &= \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \quad \text{car } x^* \in \mathcal{J}(x) \\ &= 1 \\ &= \|x^*\| \cdot \|\hat{x}\| \quad \text{car } \|\hat{x}\| = \|x\| = 1 \\ &= \|x^*\|^2 = \|\hat{x}\|^2 \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\hat{x} \in \mathcal{J}(x^*)$. $\square$

Montrons maintenant que $\pi^*(\mathcal{B}^*) = \mathcal{E}^*$. Soit $y^* \in \mathcal{B}^*$. Alors $\langle \pi^*(y^*), \hat{x} \rangle = \langle x, \pi^*(y^*) \rangle = \langle \pi(x), y^* \rangle = 0$ car $x \in \ker(\pi)$. Donc $x^* \perp \pi^*(\mathcal{B}^*)$ et $\pi^*(\mathcal{B}^*) \subset \mathcal{E}^*$. Inversement, soit $y^* \in \mathcal{E}^*$ et $z \in \mathcal{B}$. Alors $\langle z, \pi^*(y^*) - y^* \rangle = \langle z, \pi^*(y^*) \rangle - \langle z, y^* \rangle = \langle \pi(z), y^* \rangle - \langle z, y^* \rangle = \langle \pi(z) - z, y^* \rangle = \langle -\langle z, x^* \rangle x, y^* \rangle = -\langle z, x^* \rangle \langle x, y^* \rangle = -\langle z, x^* \rangle \langle y^*, \hat{x} \rangle = 0$, $\forall z \in \mathcal{B}$, car $y^* \in \ker(\hat{x})$. Ce qui implique que $\pi^*(y^*) = y^*$, $\forall y^* \in \mathcal{E}^*$ (π^* est ainsi idempotente), et $\mathcal{E}^* \subset \pi^*(\mathcal{B}^*)$. Finalement $\pi^*(\mathcal{B}^*) = \mathcal{E}^*$ et l'application π^* est de la forme

$$\pi^*(z^*) = z^* - \langle z^*, \hat{x} \rangle x^*, \quad \forall z^* \in \mathcal{B}^*.$$

On peut alors poser $\pi^* = \pi_{x^*}^{\hat{x}}$ et π^* est bien une projection (polaire) sur l'hyperplan proximal $\mathcal{E}^* = \ker(\hat{x})$. Puisque $\|\pi_x^*\| = \|\pi_{x^*}^{\hat{x}}\|$, on en déduit que $\overline{\text{MPB}}(\mathcal{B}) \leq \overline{\text{MPB}}(\mathcal{B}^*)$. Évidemment $\overline{\text{MPB}}(\mathcal{B}) = \overline{\text{MPB}}(\mathcal{B}^*)$ si $\mathcal{B}$ est réflexif. Dans le cas contraire $\overline{\text{MPB}}(\mathcal{B}) = 2$ ([22, théorème 2.1]) et $2 \geq \overline{\text{MPB}}(\mathcal{B}^*) \geq \overline{\text{MPB}}(\mathcal{B}) = 2$. C'est là une démonstration simple de la proposition suivante.

Proposition 8 (Franchetti [12, théorème, p. 427]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors $k(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B}^*)$.

Rappelons finalement au lecteur que l'on définit les *dérivées à gauche* et à *droite* de la norme au point x dans la direction du vecteur y par les formules

$$\rho'_-(x, y) = \|x\| \cdot \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = \|x\| \cdot \sup_{t < 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

et

$$\rho'_+(x, y) = \|x\| \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = \|x\| \cdot \inf_{t > 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}.$$

Il n'est pas difficile de voir que les valeurs $\rho'_-(x, y)$ et $\rho'_+(x, y)$ représentent les dérivées à gauche et à droite de la fonction $\rho(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, $\forall x \in \mathcal{B}$, au point x dans la direction du vecteur y et que de plus $\rho'_-(x, y) = -\rho'_+(x, -y)$, $\forall x, y \in \mathcal{B}$. Nous renvoyons le lecteur à la référence [1], chapitre 2, pour de plus amples détails sur les propriétés de ces fonction. On peut par ailleurs y trouver une démonstration de la prochaine proposition.

Proposition 9 (Amir [1, lemme 2.1]). *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $x, y \in \mathcal{B}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\rho'_-(x, y) \leq \alpha \leq \rho'_+(x, y)$ si et seulement si il existe $x^* \in \mathcal{J}(x)$ tel que $\langle y, x^* \rangle = \alpha$.*

Rappelons finalement qu'un espace de Banach $\mathcal{B}$ est dit *strictement convexe* si pour tout couple de vecteurs $x, y \in \mathcal{B}$ l'égalité $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ entraîne toujours que $x = \lambda y$, où λ est scalaire quelconque de $\mathbb{R}$.

3. Une égalité dans les espaces de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et x, y deux vecteurs de $\mathcal{B}$. Définissons la fonction $\sigma: (x, y) \in \mathcal{B}^2 \mapsto \mathbb{R}$ par la formule

$$\sigma(x, y) = \inf\{\|y - \lambda x\| \in \mathbb{R} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Géométriquement, la fonction σ représente la distance séparant le point y de la droite $Rx = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. On peut facilement vérifier que la fonction $\sigma(x, \cdot)$ est une semi-norme et que la fonction $\sigma(\cdot, y)$ est continue sur l'ensemble $\mathcal{S}$.

Lemme 2. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, x, y deux vecteurs indépendants quelconques de $\mathcal{B}$ et $z \in \mathcal{Z}(x, y) = \{z \in \mathcal{P}(x, y) \mid \|z\| = 1; z \perp x\}$. Il est alors possible de trouver un scalaire $r \in \mathbb{R}$ tel que : i) $\sigma(x, y) = \|y - rx\|$; ii) $z = \pm \text{signe}(y - rx)$.*

Démonstration. Puisque $z \perp x$ alors le vecteur z n'est certes pas parallèle au vecteur x . Ainsi la droite $y + Rx$ coupe-t-elle la droite Rz en un point $tz = y - rx$, $t \neq 0$ (rappelons que le vecteur z est situé dans le plan $\mathcal{P}(x, y)$). Donc $\|y - rx\| = \|tz\| = |t| \cdot \|z\| = |t|$. La propriété d'homogénéité de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James amène de plus que $y - rx \perp x$ et donc que $\sigma(x, y) = \|y - rx\|$ ([9, lemme, p. 27]). Si $t > 0$ alors $z = \text{signe}(y - rx)$. Par contre, si $t < 0$ alors $z = -\text{signe}(y - rx)$. $\square$

Lemme 3. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, $x \in \mathcal{S}$ et y un vecteur de $\mathcal{B}$ indépendant de x .*

- (1) $\pi_x^{x^*}(y - rx) = \pi_x^{x^*}(y)$, $\forall r \in \mathbb{R}$.
- (2) Si $y \in \ker(x^*)$ alors $\pi_x^{x^*}(y - rx) = y$, $\forall r \in \mathbb{R}$.
- (3) Si $z \in \mathcal{Z}(x, y)$ alors $\pm \sigma(x, y) \pi_x^{x^*}(z) = \pi_x^{x^*}(y)$.
- (4) Si $y \in \ker(x^*)$ et si $z \in \mathcal{Z}(x, y)$ alors $\pi_x^{x^*}(z) = y \pm \sigma(x, y)$.

Démonstration. (1) L'application $\pi_x^{x^*}$ est linéaire et $\ker(\pi_x^{x^*}) = Rx$. (2) $\pi_x^{x^*}(y) = y$ car $y \in \ker(x^*)$. (3) Il suffit d'appliquer le lemme 2 en remarquant que $\pi_x^{x^*}(z) = \pi_x^{x^*}(\|y - rx\|z) / \|y - rx\|$. $\square$

Soit $v \in \mathcal{S}$, y un vecteur de $\mathcal{B}$ indépendant du vecteur x , $z \in \mathcal{Z}(x, y) = \{z \in \mathcal{P}(x, y) \mid \|z\| = 1; z \perp x\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\rho'_-(x, z) \leq \alpha \leq \rho'_+(x, z)$. En vertu de la proposition 9, nous pouvons trouver une fonctionnelle $x_\alpha^* \in \mathcal{J}(x)$ telle que $\langle z, x_\alpha^* \rangle = \alpha$. Choisissons de plus le vecteur $y_\alpha \in \mathcal{B}$ tel que $y_\alpha \in \ker(x_\alpha^*) \cap \mathcal{S}(x, y) = \ker(x_\alpha^*) \cap \mathcal{S}(x, z)$.

Ceci est toujours possible si l'on définit la fonctionnelle $x^*: \mathcal{P}(x, z) \rightarrow R$ par la formule $\langle ax + bz, x^* \rangle = a + b\alpha$, $\forall a, b \in R$; fonctionnelle que l'on étend par suite à la fonctionnelle x_α^* qui est définie sur tout l'espace $\mathcal{B}$, en appliquant le théorème de Hahn-Banach. Notons $\rho_- = \rho'_-(x, z)$ et $\rho_+ = \rho'_+(x, z)$.

Lemme 4. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, $x \in \mathcal{S}$, y un vecteur de $\mathcal{B}$ indépendant du vecteur x et $z \in \mathcal{Z}(x, y) = \{z \in \mathcal{P}(x, y) \mid \|z\| = 1; z \perp x\}$. Définissons la fonctionnelle $x_\alpha^* \in \mathcal{J}(x)$ et le vecteur y_α comme ci-dessus. Alors l'image de la fonction $[\rho_-, \rho_+] \ni \alpha \mapsto \sigma(x, y_\alpha)$ est une portion connexe (un "arc") d'une courbe concave de R^2 ; courbe dont le maximum absolu est atteint en $\alpha = 0$.

Démonstration. Puisque $y_\alpha \in \ker(x_\alpha^*)$ alors $x \perp y_\alpha$ et x, y_α sont deux vecteurs indépendants de $\mathcal{B}$. Ainsi $z \in \mathcal{Z}(x, y) = \mathcal{Z}(x, y_\alpha)$. En vertu du lemme 3.3, on trouve que

$$\pi_{x_\alpha^*}^z(z) = \frac{y_\alpha}{\pm \sigma(x, y_\alpha)}$$

et donc que

$$\frac{1}{\sigma(x, y_\alpha)} = \|\pi_{x_\alpha^*}^z(z)\| = \|z - \alpha x\|.$$

La fonction $\varphi: R \rightarrow R$ définie par la formule

$$\varphi(\lambda) = \|z - \lambda x\|, \quad \forall \lambda \in R,$$

est convexe et atteint son minimum absolu en tout point $r \in R$ tel que $z - rx \perp x$ ([9, lemme, p. 27]). Puisque $z \perp x$, le point $\lambda = 0$ est ainsi un minimum absolu de la fonction φ . L'application $[\rho_-, \rho_+] \ni \alpha \mapsto \sigma(x, y_\alpha)$ est donc concave. $\square$

Lemme 5. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $x, y \in \mathcal{S}$. Alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\alpha[x, x + \lambda y]} = \frac{1}{\|y - \rho'_+(x, y)x\|}$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\alpha[x, x - \lambda y]} = \frac{1}{\|y - \rho'_-(x, y)x\|}.$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\alpha[x, x + \lambda y]} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\left\|x - \frac{x + \lambda y}{\|x + \lambda y\|}\right\|} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|x + \lambda y\|}{\left\|\left(\frac{\|x + \lambda y\| - 1}{\lambda}\right)x - y\right\|} \\ &= \frac{1}{\|y - \rho'_+(x, y)x\|}. \end{aligned}$$

La seconde égalité est une conséquence directe de la première. $\square$

Lemme 6. Soit B un espace de Banach. Alors la valeur de la constante de Thele de l'espace B ne dépasse pas la valeur de la constante de Schäffer de cet espace, c'est-à-dire

$$k(B) \leq s(B).$$

Démonstration. Posons²

$$m = \liminf_{\alpha[x,y] \rightarrow 0^+} \psi(x, y).$$

Soit u et v deux vecteurs de $\mathcal{S}$ tels que $u \top v$ (dans ce cas $u \pm v \neq \mathcal{O}$). Alors $\alpha[u, u + \lambda v] = \|u + \lambda v\|^{-1} \|(1 - \|u + \lambda v\|)u + \lambda v\| \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$ et donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\alpha[u, u + \lambda v]} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \psi(u, u + \lambda v) \geq m$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\alpha[u, u + \lambda v]} \geq m \quad (2)$$

et ce, pour tout couple de vecteurs $u, v \in \mathcal{S}$ tels que $u \top v$. Grâce à l'équation (1) la formule de Thele (proposition 2) peut se réécrire sous la forme

$$k(B) = \sup \left\{ \frac{\|y\|}{\|x - y\|} \in R \mid x \perp y \right\}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(B)} &= \inf \{ \|\lambda x - y\| \in R \mid \lambda \in R, x \perp y; x, y \in \mathcal{S} \} \\ &= \inf \{ \|\lambda x - y\| \in R \mid \lambda \in R, x \perp y; x, y \in \mathcal{S}; \lambda x - y \perp x \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Utilisant la formule (3), il est possible de trouver deux vecteurs u, v de $\mathcal{S}$ tels que $u \perp v$ et $\sigma(u, v) \leq 1/k(B) + \varepsilon$. Plaçons-nous dans le plan $\mathcal{P}(u, v)$. Soit $w \in \mathcal{Z}(u, v)$. Choisissons $u^* \in \mathcal{J}(u)$ tel que $\langle w, u^* \rangle = \rho'_+(u, w)$ et $v' \in \mathcal{S}(u, v)$ tel que $v' = v_{\rho'_+(u, w)} \in \ker(u^*)$. Supposons que $\sigma(u, v_{\rho'_+(u, w)}) \leq \sigma(u, v_{\rho'_-(u, w)})$. Dans le cas contraire, il suffit, dans le raisonnement qui suit, de substituer $-w$ à w et d'appliquer la seconde partie du lemme précédent. Alors

$$\begin{aligned} m &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda / \alpha[u, u + \lambda w] \\ &= 1 / \|w - \rho'_+(u, w)u\| \\ &= 1 / \|w - \langle w, u^* \rangle u\| \\ &= 1 / \|\pi_u^{u^*}(w)\| \\ &= \sigma(u, v') / \|v'\| \\ &= \sigma(u, v') \\ &\leq \sigma(u, v) \\ &\leq \frac{1}{k(B)} + \varepsilon \end{aligned}$$

²Pour la définition de la fonction $\psi(x, y)$ voir la section 1, immédiatement avant l'énoncé de la proposition 5.

et ce, pour tout $\varepsilon > 0$. Nous nous sommes servis ici de l'inégalité (2) et du fait que la fonction $[\rho'_-(u, w), \rho'_+(u, w)] \ni \alpha \mapsto \sigma(u, v_\alpha)$ est concave et atteint son minimum sur l'extrémité droite de l'intervalle (parce que nous nous plaçons dans le cas où $\sigma(u, v_{\rho'_+(u, w)}) \leq \sigma(u, v_{\rho'_-(u, w)})$). Par conséquent,

$$\frac{1}{k(\mathcal{B})} \geq \liminf_{\alpha[x, y] \rightarrow 0^+} \psi(x, y)$$

et en conclusion

$$s(\mathcal{B}) = \limsup_{\alpha[x, y] \rightarrow 0^+} \frac{\alpha[x, y] \max\{\|x\|, \|y\|\}}{\|x - y\|} \geq k(\mathcal{B}). \quad \square$$

Lemme 7. Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace de dimension finie d'un espace de Banach $\mathcal{B}$. Alors la valeur de la constante de Schäffer du sous-espace $\mathcal{E}$ ne dépasse pas la valeur de la constante de Thele de l'espace entier, c'est-à-dire

$$s(\mathcal{E}) \leq k(\mathcal{B}).$$

Démonstration. Posons

$$m = \liminf_{\alpha[x, y] \rightarrow 0^+} \psi(x, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{E}.$$

On peut alors trouver deux suites $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathcal{E}$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha[x_n, y_n] = 0^+$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x_n, y_n) = m$. La fonction ψ étant par définition homogène de degré zéro, on peut supposer sans perte de généralité que $x_n \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ici $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est la sphère unité du sous-espace $\mathcal{E}$. La compacité de la sphère $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{E}$ permet de supposer de plus que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ existe. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = u$. Admettons que le contraire soit vrai. On peut dans ce cas supposer, quitte à passer à une sous-suite de la suite originale, que $\|x_n - y_n\| \geq \nu > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de Schäffer (proposition 5) on obtient que

$$\begin{aligned} 1 &\geq m \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x_n, y_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu}{(1 + \nu)\alpha[x_n, y_n]} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. En conséquence, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = u$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 1, \tag{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\alpha[x_n, y_n]} = m. \tag{5}$$

On peut faire l'hypothèse supplémentaire, quitte à passer à une sous-suite de la suite originale, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{signe}(\text{signe}(y_n) - x_n) = v \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$. Puisque les suites $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

et $\{\text{signe}(y_n)\}_{n \in N}$ de vecteurs de $\mathcal{E}$ convergent toutes deux vers le vecteur u , le vecteur v est alors parallèle à une droite de support de la sphère unité au point u . Par conséquent, $u \perp v$. Mais

$$\begin{aligned}\sigma(u, v) &= \inf\{\|v - \lambda u\| \in R \mid \lambda \in R\} \\ &\geq \inf\{\|\lambda x - y\| \in R \mid \lambda \in R; x \perp y; y \in \mathcal{S}\} \\ &= \frac{1}{k(\mathcal{B})}\end{aligned}$$

car $u, v \in \mathcal{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}$ et $u \perp v$. De plus

$$\begin{aligned}|\sigma(x_n, v) - \sigma(x_n, \text{signe}(\text{signe}(y_n) - x_n))| \\ \leq \|v - \text{signe}(\text{signe}(y_n) - x_n)\| \rightarrow 0\end{aligned}\quad (6)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ et

$$\begin{aligned}\|y_n\|\sigma(x_n, \text{signe}(y_n) - x_n) &= \sigma(x_n, y_n) \\ &= \sigma(x_n, y_n - x_n) \\ &\leq \|y_n - x_n\|.\end{aligned}\quad (7)$$

En utilisant les formules (6), (4), (7), (5) (dans cet ordre) et la continuité de la fonction $\sigma(\cdot, v)$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(\mathcal{B})} &\leq \sigma(u, v) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n, v) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n, \text{signe}(\text{signe}(y_n) - x_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n, \text{signe}(y_n) - x_n) / \alpha[x_n, y_n] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| / \alpha[x_n, y_n] \\ &= m.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\liminf_{\alpha[x, y] \rightarrow 0^+} \psi(x, y) \geq \frac{1}{k(\mathcal{B})}, \quad \forall x, y \in \mathcal{E},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}s(\mathcal{E}) &= \limsup_{\alpha[x, y] \rightarrow 0^+} \frac{\alpha[x, y] \max\{\|x\|, \|y\|\}}{\|x - y\|}, \quad \forall x, y \in \mathcal{E} \\ &\leq k(\mathcal{B}). \quad \square\end{aligned}$$

Des lemmes 6 et 7 on tire :

Théorème 1. Soit B un espace de Banach de dimension finie. Alors les valeurs de la constante de Schäffer et de la constante de Thele de l'espace B coïncident, c'est-à-dire

$$s(B) = k(B).$$

Remarque. L'auteur n'a pu démontrer que cette égalité tenait aussi dans le cas plus général des espaces de Banach de dimension infinie. Comme le montre le lemme 6, l'inégalité $k(B) \leq s(B)$ est toujours vérifiée. Nous croyons que l'inégalité inverse $s(B) \leq k(B)$ tient aussi en dimension infinie (voir le lemme 7). Dans certains cas, comme dans celui des espaces L^p , l'égalité est néanmoins vraie: en effet, si $\dim(L^p) < \infty$ alors $s(L^p) = k(L^p)$ en vertu du théorème 1. Dans le cas contraire, (c'est-à-dire si $\dim(L^p) = \infty$) alors $s(L^p) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(l_n^p) = \lim_{n \rightarrow \infty} k(l_n^p) = k(L^p)$, toujours en vertu du théorème 1.

La symétrie de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James ne devant être vérifiée que dans les sous-espaces de dimension deux (en effet $k(B) = \sup\{k(\mathcal{P}(x, y)) \mid x, y \in B\}$) et on sait que la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur un espace X est symétrique si et seulement si $k(X) = 1$ ([8, proposition 5]) on obtient en conséquence le résultat suivant.

Corollaire 2. Soit B un espace de Banach. Les conditions suivantes sont alors équivalentes.

- (1) $\liminf_{\alpha[x, y] \rightarrow 0+} \frac{\|x - y\|}{\alpha[x, y] \max\{\|x\|, \|y\|\}} = 1.$
- (2) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda / \alpha[x, x + \lambda y] \geq 1$ pour tout couple de vecteurs $x, y \in S$ tels que $x \top y$.
- (3) La relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur cet espace est symétrique.

Ce qui est une généralisation du théorème suivant dû à Schäffer.

Proposition 10 (Schäffer [21, théorème 1]). Soit B un espace de Banach. Les conditions suivantes sont alors équivalentes.

- (1) $\liminf_{\alpha[x, y] \rightarrow 0+} \frac{\|x - y\|}{\alpha[x, y] \max\{\|x\|, \|y\|\}} = 1.$
- (2) $\liminf_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda / \alpha[x, x + \lambda y] \geq 1$ pour tout couple de vecteurs $x, y \in S$ tels que $x \pm y \neq \mathcal{O}$.
- (3) La relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur cet espace est symétrique.

Si l'on fait la remarque, grâce au lemme 5, que $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda / \alpha[x, x + \lambda y] \geq 1$ si et seulement si $\|x - \rho'_+(x, y)x\| \leq 1$ on obtient alors le corollaire suivant

Corollaire 3. Soit B un espace de Banach. Les conditions suivantes sont alors équivalentes.

- (1) $\|y - \rho'_+(x, y)x\| \leq 1, \forall x, y \in S$ avec $x \top y$.
- (2) La relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur cet espace est symétrique.

qui est une généralisation du résultat suivant dû à Papini.

Proposition 11 (Papini [19, proposition 2]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. La relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur cet espace est symétrique si et seulement si $\|y - \rho'_+(x, y)x\| \leq 1, \forall x, y \in \mathcal{S}$.

4. Une condition nécessaire et suffisante de symétrie. Soit $x, y, z \in \mathcal{S}$ trois vecteurs tels que $x \perp y$ et $z \in \mathcal{Z}(x, y)$. Choisissons aussi les fonctionnelles $x^* \in \mathcal{J}(x)$ et $z^* \in \mathcal{J}(z)$ de telle sorte que $y \in \ker(x^*)$ et $x \in \ker(z^*)$. Le lemme 3.4 affirme que $y/\pm\sigma(x, y) = \pi_x^{z^*}(z) = z - \langle z, x^* \rangle x$. Multiplions chaque membre de cette équation par le facteur z^* . Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pm\sigma(x, y)} \langle y, z^* \rangle &= \left\langle \frac{y}{\sigma(x, y)}, z^* \right\rangle \\ &= \langle z - \langle z, x^* \rangle x, z^* \rangle \\ &= \langle z, z^* \rangle - \langle z, x^* \rangle \langle x, z^* \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

et donc

$$\langle y, z^* \rangle = \pm\sigma(x, y). \quad (8)$$

Supposons que $\langle y, z^* \rangle = +\sigma(x, y)$. Alors, appliquant la proposition 9, on trouve que $\rho'_-(z, y) \leq \sigma(x, y) \leq \rho'_+(z, y)$. Ainsi $\sigma(x, y) \leq \rho'_+(z, y)$. Dans le second cas, c'est-à-dire si $\langle y, z^* \rangle = -\sigma(x, y)$, on a que $\rho'_-(z, y) \leq -\sigma(x, y) \leq \rho'_+(z, y)$ et donc que $\rho'_-(z, y) \leq -\sigma(x, y)$ ou encore que $\sigma(x, y) \leq -\rho'_-(z, y)$. Puisque $-\rho'_-(z, y) = \rho'_+(z, -y)$ alors $\sigma(x, y) \leq \rho'_+(z, -y)$. Par conséquent, l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$\sigma(x, y) \leq \rho'_+(z, y) \quad \text{ou} \quad \sigma(x, y) \leq \rho'_+(z, -y) \quad (9)$$

pour tout triplet de vecteurs $x, y, z \in \mathcal{S}$ tels que $x \perp y$ et $z \in \mathcal{Z}(x, y)$.

Théorème 2. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe. Les conditions suivantes sont alors équivalentes.

- (1) Pour tout triplet de vecteurs $x, y, z \in \mathcal{S}$ tels que $x \perp y$ et $z \in \mathcal{Z}(x, y)$ on a toujours que $\rho'_+(z, y) = 1$ ou que $\rho'_+(z, -y) = 1$.
- (2) La relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur cet espace est symétrique.

Démonstration. Supposons que l'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur cet espace soit symétrique. Choisissons $x, y, z \in \mathcal{S}$ tels que $x \perp y$ et $z \in \mathcal{Z}(x, y)$. Sachant que $1 \geq \sigma(x, y) \geq 1/k(\mathcal{B}) = 1$ on trouve, en appliquant l'inégalité (9), que $1 = \sigma(x, y) \leq \rho'_+(z, y) \leq \|z\| \cdot \|y\| = 1$ ou que $1 = \sigma(x, y) \leq \rho'_+(z, -y) \leq \|z\| \cdot \| -y \| = 1$ et donc que $\rho'_+(z, y) = 1$ ou que $\rho'_+(z, -y) = 1$. Inversement, choisissons $x, y, z \in \mathcal{S}$ tels que $x \perp y$ et $z \in \mathcal{Z}(x, y)$ et supposons que $\rho'_+(z, y) = 1$ ou que $\rho'_+(z, -y) = 1$. Admettons que $\rho'_+(z, y) = 1$. Alors $1 \leq (\|z + ty\| - \|z\|)/t \leq (1 + t - 1)/t = 1, \forall t > 0$. Ainsi $\|z + ty\| = 1 + t, \forall t > 0$. Si l'on pose $t = 1$ on obtient que $\|z + y\| = 2 = \|z\| + \|y\|$. Puisque l'espace $\mathcal{B}$ est strictement convexe alors $z = \lambda y$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $y \perp x$. L'autre cas se traite façon similaire. L'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur cet espace est donc bien symétrique. $\square$

En vertu du théorème 6.1 de [16], pour que la norme d'un espace de Banach $\mathcal{B}$ de dimension ≥ 3 soit issue d'un produit scalaire, il faut et il suffit que $\mathcal{B}$ soit strictement

convexe et que l'orthogonalité soit symétrique. On en déduit alors la caractérisation suivante des espaces de Hilbert :

Corollaire 4. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe de dimension algébrique supérieure ou égale à 3. Les conditions suivantes sont alors équivalentes.*

- (1) *Pour tout triplet de vecteurs $x, y, z \in \mathcal{S}$ tels que $x \perp y$ et $z \in \mathcal{Z}(x, y)$ on a toujours que $\rho'_+(z, y) = 1$ ou que $\rho'_+(z, -y) = 1$.*
- (2) *La norme sur $\mathcal{B}$ est issue d'un produit scalaire.*

L'exemple suivant montre que, dans le théorème 2 ci-dessus, il est impossible d'affaiblir la condition de stricte convexité imposée à l'espace $\mathcal{B}$.

Exemple 1. Soit $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2$ muni de la norme suivante :

$$\|(x, y)\| = |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Soit $x, y, z \in \mathcal{S}$. Posons $y = (y_1, y_2)$ et $z = (z_1, z_2)$. On peut facilement calculer que

$$\begin{aligned} \rho'_+(z, y) &= y_1 \cdot \begin{cases} \text{signe}(z_1) & \text{si } z_1 \neq 0, \\ \text{signe}(y_1) & \text{si } z_1 = 0 \end{cases} + y_2 \cdot \begin{cases} \text{signe}(z_2) & \text{si } z_2 \neq 0, \\ \text{signe}(y_2) & \text{si } z_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \rho'_+(z, -y) &= y_1 \cdot \begin{cases} -\text{signe}(z_1) & \text{si } z_1 \neq 0, \\ \text{signe}(y_1) & \text{si } z_1 = 0 \end{cases} + y_2 \cdot \begin{cases} -\text{signe}(z_2) & \text{si } z_2 \neq 0, \\ \text{signe}(y_2) & \text{si } z_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Considérons deux cas. *Premier cas :* $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$. Supposons que $z_1, z_2 > 0$. Les autres cas sont traités par symétrie. Alors

$$\rho'_+(z, y) = y_1 + y_2 \quad \text{et} \quad \rho'_+(z, -y) = -y_1 - y_2.$$

Seuls deux vecteurs de $\mathcal{S}$ ($x_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $x_2 = -x_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$) sont transversaux au vecteur z . Par conséquent, les seuls vecteurs de $\mathcal{S}$ qui soient transversaux aux vecteurs x_1 et x_2 sont $y_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $y_2 = -y_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Donc $\rho'_+(z, y_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ou encore $\rho'_+(z, -y_1) = \rho'_+(z, y_2) = -(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = 1$. *Deuxième cas :* $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$. Supposons que $z_1 = 0$ et que $z_2 > 0$. Les autres cas sont traités par symétrie. Alors

$$\rho'_+(z, y) = |y_1| + y_2 \quad \text{et} \quad \rho'_+(z, -y) = |y_1| - y_2.$$

Supposons que $y_2 \geq 0$. Alors $\rho'_+(z, y) = |y_1| + y_2 = |y_1| + |y_2| = \|y\| = 1$. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $y_2 \leq 0$, on a que $\rho'_+(z, -y) = |y_1| - y_2 = |y_1| + |y_2| = \|y\| = 1$. Ainsi, pour tout triplet de vecteurs $x, y, z \in \mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ tels que $x \perp y$ et $x \top z$ on a toujours que $\rho'_+(z, y) = 1$ ou $\rho'_+(z, -y) = 1$. En revanche, la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur cet espace n'est pas symétrique (en effet, $k(\mathcal{B}) = 2$).

English extended abstract. In 1965, Schäffer [21] showed that the following inequalities hold:

$$1 \leq \underbrace{\limsup_{\alpha[x,y] \rightarrow 0^+} \frac{\alpha[x,y] \max\{\|x\|, \|y\|\}}{\|x-y\|}}_{s(\mathcal{B})} \leq 2,$$

where x and y are vectors belonging to a given real Banach space $\mathcal{B}$ and $\alpha[x, y]$ is the so-called “Clarkson angle” [5] between x and y . In 1974, Thele [23] found that the Lipschitz constant of the radial projection $r: \mathcal{B} \rightarrow B(\mathcal{O}; 1)$ defined by the formula

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{if } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{if } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

has the following representation:

$$k(\mathcal{B}) = \sup \left\{ \frac{\|y\|}{\|x - \lambda y\|} \in \mathbb{R} \mid x \perp y, y \neq \mathcal{O}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Furthermore, $1 \leq k(\mathcal{B}) \leq 2$. Other representations can be found in [2, 8, 22]. The aim of this paper is to show that in finite dimensional Banach spaces the following equality holds:

$$s(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B})$$

(Theorem 1). This result will be used to generalize a theorem due to Schäffer [21] and another one due to Papini [19] (Corollaries 2 and 3). We then give a two-dimensional characterization of the symmetry of Birkhoff-Jame’s orthogonality in Banach spaces (Theorem 2 and Corollary 4).

Definition 6. Let $\mathcal{B}$ be a real Banach space. The radial projection is the function $r: \mathcal{B} \rightarrow B(\mathcal{O}; 1)$ defined by the formula

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{if } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{if } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

The Thele’s constant of the space $\mathcal{B}$, noted $k(\mathcal{B})$, is the smallest Lipschitz constant of the projection r , that is the smallest real number $k(\mathcal{B})$ such that

$$\|r(x) - r(y)\| \leq k(\mathcal{B})\|x - y\|$$

for all $x, y \in \mathcal{B}$.

Let $\alpha[x, y]$ be the “Clarkson angle” [5] between the vectors x and y , that is

$$\begin{aligned} \alpha[x, y] &= \|\text{signe}(x) - \text{signe}(y)\| \\ &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \end{aligned}$$

for all $x, y \in \mathcal{B} \setminus \{\mathcal{O}\}$. Furthermore, let the function ψ be defined by the formula

$$\psi(x, y) = \frac{\|x - y\|}{\alpha[x, y] \max\{\|x\|, \|y\|\}}$$

for all $x, y \in \mathcal{B} \setminus \{\mathcal{O}\}$ and $\alpha[x, y] \neq 0$. Schäffer showed that

Proposition 5 (Schäffer [21, p. 272]).

$$\frac{1}{2} \leq \liminf_{\alpha[x,y] \rightarrow 0^+} \psi(x, y) \leq 1.$$

Definition 7. Let $\mathcal{B}$ be a real Banach space. The *Schäffer's constant* of the space $\mathcal{B}$, noted $s(\mathcal{B})$, is defined by

$$s(\mathcal{B}) = \limsup_{\alpha[x,y] \rightarrow 0^+} \frac{1}{\psi(x, y)} = \limsup_{\alpha[x,y] \rightarrow 0^+} \frac{\alpha[x, y] \max\{\|x\|, \|y\|\}}{\|x - y\|}.$$

The main theorem is based on the following lemmas:

Lemma 6. Let $\mathcal{B}$ be a real Banach space. Then the value of the Thele's constant for $\mathcal{B}$ is not greater than the value the Schäffer's constant for the same space, that is

$$k(\mathcal{B}) \leq s(\mathcal{B}).$$

Lemma 7. Let $\mathcal{E}$ a finite dimensional subspace of a real Banach space $\mathcal{B}$. Then the value of the Schäffer's constant of the subspace $\mathcal{E}$ is not greater than the value of the Thele's constant for the whole space, that is

$$s(\mathcal{E}) \leq k(\mathcal{B}).$$

Lemmas 6 and 7 yield the following:

Theorem 1. Let $\mathcal{B}$ a real finite dimensional Banach space. Then the values of the Schäffer's constant and of the Thele's constant of the space $\mathcal{B}$ are equal, that is

$$s(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B}).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1986.
2. M. Baronti, *Su alcuni parametri degli spazi normati*, Boll. Un. Mat. Ital. B (5) **18** (1981), 1065–1085.
3. M. Baronti et L. Papini, *Projections, skewness and related constants in real normed spaces*, Prépublication.
4. G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J. **1** (1935), 169–172.
5. J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396–414.
6. D. G. DeFigueiredo et L. A. Karlovitz, *On the radial projection in normed spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 364–368.
7. M. Del Rio et C. Benitez, *The rectangular constant for two-dimensional spaces*, Jour. Approx. Theory **19** (1977), 15–21.
8. J. Desbiens, *Constante rectangle et biais d'un espace de Banach*, Bull. Austral. Math. Soc. **42** (1990), 465–482.
9. J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces – Selected Topics*, Springer Verlag, Berlin, 1975.
10. C. F. Dunkl et K. S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly **71** (1964), 53–54.
11. R. Fortet, *Remarques sur les espaces uniformément convexes*, Bull. Soc. Math. France **67–69** (1939–41), 23–46.
12. C. Franchetti, *Approximation Theory III*, Academic Press, New York, 1980.

13. ———, *Projections onto Hyperplanes in Banach Spaces*, Jour. Approx. Theory **38** (1983), 319–333.
14. ———, *The Norm of the Minimal Projection onto Hyperplanes in $L[0, 1]$ and the Radial Constant*, Boll. Un. Mat. Ital. B-4 **7** (1990), 803–821.
15. J. R. Giles, *Classes of Semi-Inner-Product Spaces* (1967), 436–446.
16. R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 265–292.
17. ———, *Inner products in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 559–566.
18. J. L. Joly, *Caractérisation d'espace hilbertien au moyen de la constante rectangle*, Jour. Approx. Theory **2** (1969), 301–311.
19. P. L. Papini, *Inner Products and Norm Derivatives*, Jour. Math. Anal. Appl. **91** (1983), 592–598.
20. W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Gill, New York, 1973.
21. J. J. Schäffer, *Another characterization of Hilbert spaces*, Studia Math. **25** (1965), 271–276.
22. M. A. Smith, *On the Norms of Metric Projections*, Jour. Approx. Theory **31** (1981), 224–229.
23. R. L. Thele, *Some results on the radial projection in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), no. 2, 483–486.

JOCELYN DESBIENS

DÉP. D'INFORMATIQUE ET D'INGÉNIERIE

COLLÈGE MILITAIRE ROYAL DE SAINT-JEAN

SAINT-JEAN-SUR-RICHELIEU (QUÉBEC) CANADA

J0J 1R0

E-mail address: desbiens@cmr.ca