

CONTINUITÉ DES MODULES DÉRIVATIONS DANS LES ALGÈBRES DE FRÉCHET

M. AKKAR, E. ILLOUSSAMEN ET M. OUADADESS

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous étudions la continuité des dérivations dans les algèbres localement multiplicativement convexes (a.l.m.c.) de Fréchet. Nous montrons que si A est une a.l.m.c. de Fréchet dont les idéaux bilatères fermés vérifient certaines conditions, alors toute dérivation de A dans un A -module de Fréchet est continue (théorèmes I.9 et I.11). Ces deux résultats constituent des extensions aux a.l.m.c. de Fréchet du corollaire 3 de W. G. Badé et P. C. Curtis [1] et du théorème 2 de N. P. Jewell [3]. Nous appliquons ensuite les résultats obtenus à certaines a.l.m.c. de Fréchet à bases.

ABSTRACT. The purpose of this paper is to give, for Fréchet locally m-convex algebras, the analogues of two theorems on Banach algebras (see W. G. Badé and P. C. Curtis, Jr [1] and N. P. Jewell [3]). See the English extended abstract at the end of the paper.

Introduction. Dans [1], W. G. Badé et P. C. Curtis ont montré le résultat suivant :

Proposition ([1, corollaire 3]). *Soit A un algèbre de Banach vérifiant :*

- (i) *pour tout idéal bilatère fermé K de A de codimension infinie, il existe une suite $(x_n)_n \subseteq A$ telle que $x_n x_m = 0$ ($n \neq m$) et $x_n^2 \notin K$ ($\forall n$);*
- (ii) *tout idéal bilatère de codimension finie admet une unité approchée bornée (à gauche ou à droite).*

Alors toute dérivation de A dans un A -module de Banach est continue.

Signalons que les conditions (i) et (ii) ci-dessus sont satisfaites si A est une C^* -algèbre ou si A est l'algèbre $L^1(G)$ ou G est un groupe abélien localement compact.

Comme il existe plusieurs exemples d'algèbres de Fréchet qui admettent des dérivations et qui ne peuvent être munies d'une structure d'algèbre de Banach, il est tout à fait naturel de chercher à obtenir, pour de telles algèbres, un résultat analogue à celui de W. G. Badé et P. C. Curtis. Dans ce sens, nous montrons que si A est une algèbre localement multiplicativement convexe (a.l.m.c.) de Fréchet vérifiant (i) et (ii), alors toute dérivation de A dans un A -module de Fréchet est continue. Nous appliquons ce résultat à une classe d'a.l.m.c. de Fréchet à bases.

Nous examinons enfin un résultat de N. P. Jewell [3, théorème 2]. Nous montrons que celui-ci s'étend aux a.l.m.c. de Fréchet.

Preliminaires.

1. Soit A un espace localement convexe et soit $(\|\cdot\|_i)_i$ une famille de semi-normes croissante définissant la topologie de A . Si A est muni d'une structure d'algèbre telle que $\|x \cdot y\|_i \leq \|x\|_i \|y\|_i$ pour tous x, y et tout i , on dit que A est une *algèbre localement multiplicativement convexe* (en abrégé a.l.m.c.). Si de plus la famille des semi-normes $(\|\cdot\|_i)_i$ est dénombrable et si la topologie définie par ces semi-normes, est complète, alors A sera dite *de Fréchet*.

Signalons que dans tout ce qui suit les semi-normes $(\|\cdot\|_i)_i$ seront supposées croissantes.

2. Soit $(A, \|\cdot\|_i)_{i \geq 1}$ une a.l.m.c. de Fréchet et soit $(X, |\cdot|_i)_{i \geq 1}$ un espace localement convexe avec $|\cdot|_i \leq |\cdot|_j$ si $i \leq j$; X est dit un A -module de Fréchet à gauche s'il l'est au sens algébrique et si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $M_i > 1$ tel que

$$|ax_i| \leq M_i \|a\|_i |x|_i, \quad a \in A, x \in X.$$

3. Soit $(A, (\|\cdot\|_i)_i)$ une a.l.m.c. de Fréchet et soit $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une suite généralisée d'éléments de A . On dit que $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une *approche à gauche bornée* si, pour tout $a \in A$, $e_\lambda a$ converge vers a et si $\sup_\lambda \|e_\lambda\|_i \leq k_i$ ($i = 1, 2, \dots$), k_i étant une constante qui dépend de i .

$(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est dite *uniformément bornée* s'il existe une constante $k > 0$ telle que $\sup_\lambda \|e_\lambda\|_i \leq k$ ($i \geq 1$).

4. Soit S une application linéaire d'un espace de Fréchet X dans un espace de Fréchet Y . On appelle *espace séparateur* de S , et on note $\sigma(S)$, l'ensemble

$$\sigma(S) = \{y \in Y : \exists (x_n)_n \subset X \text{ telle que } x_n \rightarrow 0 \text{ et } S(x_n) \rightarrow y\}.$$

Signalons que S est continue si et seulement si $\sigma(S) = \{0\}$ (cf. [6]).

I. Continuité des modules-dérivations dans les algèbres de Fréchet. Soit $(A, \|\cdot\|_i)_i$ une a.l.m.c. de Fréchet et soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. $(X, \|\cdot\|)$ est dit A -module de Banach s'il est un A -module au sens algébrique et si les applications $(a, x) \rightarrow a \cdot x$ et $(x, a) \rightarrow x \cdot a$ sont continues. Cette continuité est exprimée par :

$$\|ax\| \leq K \|a\|_{i_0} \|x\| \quad \text{et} \quad \|xa\| \leq K \|a\|_{i_0} \|x\|$$

pour un certain i_0 et une constante $K > 1$.

Définition 1.1. Soit D une dérivation de A dans X et soit $a \in A$. Posons $N(a) = K(\|a\|_{i_0} + \|D(a)\|)$. On définit

$$I_L = \{a \in A : b \rightarrow N(ab) \text{ est continue}\}$$

$$I_R = \{a \in A : b \rightarrow N(ba) \text{ est continue}\}.$$

Proposition 1.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $a \in I_L$;
- (ii) $b \rightarrow D(ab)$ est continue de A dans X ;
- (iii) $b \rightarrow aD(b)$ est continue de A dans X .

Preuve. Puisque $D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b$, (ii) est équivalent à (iii). (i) implique (ii) découle de l'inégalité $\|D(ab)\| \leq N(ab)$. Enfin, si $b \rightarrow D(ab)$ est continue, alors $b \rightarrow K(\|a\|_{i_0} + \|D(a)\|) = N(a, b)$ l'est aussi, d'où (iii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

Remarques.

- (1) On a des propriétés similaires pour I_R .
- (2) Soit S une application linéaire continue de A dans A , alors SD est continue si et seulement si, $S(\sigma(D)) = \{0\}$ (cf. [6] ou [8]). En particulier, si $S(x) = ax$, alors $a \in I_L$ si et seulement si $a\sigma(D) = \{0\}$.

Proposition 1.3. *Les sous-ensembles I_L et I_R sont des idéaux bilatères fermés.*

Preuve. Il est clair que N est une semi-norme d'algèbre. Soit $a \in I_L$, comme l'application $b \rightarrow N(ab)$ est continue, il existe k_a et $i \in N$, tels que $N(ab) \leq k_a\|b\|_i$, pour tout $b \in A$. Donc pour tout $z \in A$, on a $N(zab) \leq N(z)N(ab) \leq N(z)k_a\|b\|_i$. D'où $b \rightarrow N(zab)$ est continue, ce qui donne $za \in I_L$. De même on a $N(azb) \leq k_a\|z\|_i\|b\|_i$ ($b \in A$), d'où $az \in I_L$. Par conséquent I_L est un idéal bilatère.

Soit maintenant $a \in A$ et soit l'application linéaire S_a définie par $S_a = aD(b)$ ($b \in A$). Soit $(a_n)_n$ une suite de I_L telle que $a_n \rightarrow a$. Comme $a_n \in I_L$, S_{a_n} est continue ($n = 1, 2, \dots$). De plus on a

$$\lim_n S_{a_n}(b) = \lim_n a_n D(b) = (\lim_n a_n) D(b) = aD(b) = S_a(b),$$

pour tout $b \in A$. Donc S_a est limite d'une suite d'applications linéaires continues et d'après le théorème de Banach–Steinhaus S_a est continue. D'où $a \in I_L$. $\square$

Définition 1.4. I_L (resp. I_R) est appelé idéal de continuité à gauche (resp. à droite). Si A est commutative, alors $I_L = I_R$ et dans ce cas l'idéal est appelé idéal de continuité.

Remarque. Une dérivation n'est pas nécessairement continue sur I_L (cf. [1, exemple 1]). Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition 1.5. *Si I_L possède une unité approchée à gauche (ou à droite) uniformément bornée, alors D est continue sur I_L .*

Preuve. Soit $(a_n)_n$ une suite de I_L telle que $a_n \rightarrow 0$, d'après le corollaire 4.2 de [2], il existe une suite $(b_n)_n$ d'éléments de I_L tendant vers 0 et un élément $c \in I_L$, tels que $a_n = cb_n$, $n = 1, 2, \dots$. Ainsi $D(a_n) = D(cb_n)$, or $c \in I_L$, donc $D(cb_n) \rightarrow 0$. D'où $D(a_n) \rightarrow 0$. $\square$

Nous donnons maintenant une propriété fondamentale des idéaux de continuité d'une dérivation.

Théorème 1.6. *Soient $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ deux suites d'éléments de A vérifiant $y_n z_m = 0$ ($n \neq m$). Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $y_n z_n \in I_L$ pour tout $n \geq N$.*

Preuve. Supposons que pour tout entier k il existe $n \geq k$ tel que $y_n z_n \notin I_L$. Nous obtenons alors deux sous-suites $(y_{n_k})_k$ et $(z_{n_k})_k$ telles que $(y_{n_k})_k$ est orthogonale à

$(z_{n_k})_k$ et $y_{n_k} \cdot z_{n_k} \notin I_L$. L'application $b \rightarrow N(y_n z_n b)$ est discontinue ($n = 1, 2, \dots$), donc il existe $x_n \in A$ tel que

$$\|x_n\|_n = 1 \quad \text{et} \quad N(y_n z_n x_n) \geq n 2^n N(y_n)(\|z_n\|_n + 1).$$

Soit

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n x_n}{n 2^n (\|z_n\|_n + 1)}$$

z est bien défini. En effet, pour toute semi-norme $\|\cdot\|_i$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|z_n x_n\|_i}{n 2^n (\|z_n\|_n + 1)} = \sum_{n=1}^i \frac{\|z_n x_n\|_i}{n 2^n (\|z_n\|_n + 1)} + \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{\|z_n x_n\|_i}{n 2^n (\|z_n\|_n + 1)}$$

et

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{\|z_n x_n\|_i}{n 2^n (\|z_n\|_n + 1)} \leq \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{\|z_n\|_i}{n 2^n (\|z_n\|_n + 1)} \quad \text{car} \quad \|x_n\|_i \leq 1 \quad (n \geq i).$$

Et vu que $\|z_n\|_i \leq \|z_n\|_n$ ($n \geq i$), on a

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{\|z_n\|_i}{n 2^n (\|z_n\|_n + 1)} \leq \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Par suite, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n x_n}{n 2^n (\|z_n\|_n + 1)}$$

converge dans A . Soit maintenant $p \in N$. Alors on a

$$y_p z = \frac{y_p z_p x_p}{2^p (\|z_p\|_p + 1)}.$$

Donc

$$N(y_p)N(z) \geq N(y_p z) = \frac{N(y_p z_p x_p)}{2^p (\|z_p\|_p + 1)} \geq p N(y_p).$$

Comme $y_p z_p \notin I_L$, $y_p \notin I_L$. Donc $N(y_p) \neq 0$ car sinon $b \rightarrow N(y_p b)$ serait continue et par suite $y_p \in I_L$ ce qui est inexact. Nous obtenons alors

$$N(z) \geq p$$

et ce pour tout $p \in N$, ce qui donne une contradiction. $\square$

Remarque. Par un raisonnement analogue, on montre le même résultat pour I_R .

Nous donnons maintenant le résultat fondamental de cette section.

Théorème 1.7. Soit A une a.l.m.c. de Fréchet vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) pour tout idéal bilatère fermé K de A de codimension infinie, on peut trouver deux suites $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ dans A telles que $y_n z_m = 0$ ($n \neq m$) et $y_n z_n \notin K$ ($n = 1, 2, \dots$);
- (ii) tout idéal bilatère fermé de A de codimension finie admet une unité approchée à gauche (ou à droite) uniformément bornée.

Alors toute dérivation de A dans un A -module de Banach X est continue.

Preuve. Soit $D: A \rightarrow X$ une dérivation. Comme A vérifie (i), I_L est de codimension finie (théorème 1.6). Par conséquent I_L admet une unité approchée à gauche (ou à droite) uniformément bornée. Et d'après la proposition 1.5, D est continue sur I_L . Par suite D est continue dans A . $\square$

Dans ce qui suit, nous reprenons une technique utilisée dans [4], qui va nous permettre d'étendre le théorème précédent au cas d'une dérivation D d'une a.l.m.c. de Fréchet dans un A -module de Fréchet X .

Soit $(| \cdot |_i)_{i \geq 1}$ la famille des semi-normes définissant la topologie de X . On pose $N_i = \{x \in X : |x|_i = 0\}$. Soit $X_i = X/N_i$; c'est un espace normé, avec $|x + N_i|_i = |x|_i$. $(X_i, | \cdot |_i)$ est alors un A -module normé.

On désigne par $\hat{X}_i$ son complété. Soit l'application L de X dans $\prod \hat{X}_i$ définie par $L(x) = \{(x + N_i)_i\}$; L est un morphisme injectif continu. Désignons par π_i la projection de $\prod \hat{X}_i$ dans $\hat{X}_i$. On a ainsi

$$A \xrightarrow{D} X \xrightarrow{L} \prod \hat{X}_i \xrightarrow{\pi_i} \hat{X}_i.$$

On vérifie facilement que $\pi_i \circ L \circ D$ est une dérivation de A dans $\hat{X}_i$ qui est un A -module de Banach.

Supposons maintenant que toute dérivation de A dans un A -module de Banach est continue. Nous obtenons alors que $L \circ D$ est continue puisque $\pi_i \circ L \circ D$ est continue pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $\sigma(L \circ D) = L(\sigma(D))$ (cf. [6, p. 8]), on a alors que $L(\sigma(D)) = \{0\}$. Ce qui donne $\sigma(D) = \{0\}$ car L est injective. D'où D est continue. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.8. Soit A une a.l.m.c. de Fréchet. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (1) Toute dérivation de A dans un A -module de Banach est continue.
- (2) Toute dérivation de A dans un A -module de Fréchet est continue.

Théorème 1.9. Soit A une a.l.m.c. de Fréchet vérifiant les conditions (i) et (ii) du théorème 1.7. Alors toute dérivation de A dans un A -module de Fréchet est continue.

Preuve. Ce résultat découle du théorème 1.7 et de la proposition 1.8. $\square$

Nous donnons maintenant un résultat analogue au théorème 2 de [3]. Pour cela, nous commençons par un lemme.

Lemme 1.10. Soient X un espace de Fréchet et Y un espace de Banach et soient $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite d'applications linéaires continues sur X , S une application linéaire

de X dans Y , $(R_n)_{n \geq 1}$ et $(U_n)_{n \geq 1}$ deux suites d'applications linéaires continues sur Y telles que :

- $ST_n - R_n S$ est continue pour tout $n \geq 1$ et
- $U_n R_1 \cdots R_n \sigma(S) = \{0\}$ pour tout $n \geq 1$

Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_n R_1 \cdots R_{n-1} \sigma(S) = \{0\}$ pour tout $n \geq N$.

Preuve. D'après le lemme de stabilité ([8, Lemme 1.1a]), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(R_1 \cdots R_n \sigma(S))^- = (R_1 \cdots R_N \sigma(S))^-$ pour tout $n \geq N$. Donc $(R_1 \cdots R_n \sigma(S))^- = (R_1 \cdots R_{n-1} \sigma(S))^-$ si $n > N$. Or U_n est continue, donc $U_n(R_1 \cdots R_n \sigma(S))^-$ est contenu dans $(U_n R_1 \cdots R_n \sigma(S))^- = \{0\}$, par suite $(U_n R_1 \cdots R_{n-1} \sigma(S))^- = \{0\}$. $\square$

Théorème 1.11. Soit A une a.l.m.c. de Fréchet vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i') pour tout idéal bilatère fermé K de A de codimension infinie, il existe $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ deux suites de A telles que $c_n b_1 \cdots b_{n-1} \notin K$ et $c_n b_1 \cdots b_n \in K$ ($n \geq 2$);
- (ii') tout idéal bilatère de A de codimension finie admet une unité approchée à gauche (ou à droite) uniformément bornée.

Alors toute dérivation de A dans un A -module de Fréchet est continue.

Preuve. Il suffit de montrer que toute dérivation de A dans un A -module de Banach est continue (cf. proposition 1.8). Soit alors D une dérivation de A dans un A -module de Banach X . Si I_L est de codimension infinie, alors il existe $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ deux suites dans A vérifiant $c_n b_1 \cdots b_{n-1} \notin I_L$ et $c_n b_1 \cdots b_n \in I_L$. Soient $T_n: A \rightarrow A$ définie par $T_n(a) = b_n a$ et $R_n, U_n: X \rightarrow X$ définies par $R_n(x) = b_n x$ et $U_n(x) = c_n x$. On a $DT_n - R_n D$ est continue ($n \in \mathbb{N}^*$) puisque $DT_n - R_n D(a) = D(b_n a)$. De plus $U_n R_1 \cdots R_n \sigma(D) = \{0\}$ pour tout n puisque $c_n b_1 \cdots b_n \in I_L$ mais on n'a pas $U_n R_1 \cdots R_{n-1} \sigma(D) = \{0\}$ ce qui contredit le lemme 1.10. Donc I_L est de codimension finie. Et comme il est à unité approchée à gauche uniformément bornée (d'après (ii')) D est continue sur I_L (cf. proposition 1.5). Par suite D est continue sur A . $\square$

Remarque. En analysant la preuve du théorème précédent, on remarque qu'il est possible de l'étendre aux algèbres localement convexes métrisables et complètes (non nécessairement m -convexes).

2. Applications aux a.l.m.c. à bases. En appliquant le théorème 1.7 nous obtenons :

Proposition 2.1. Soit A une a.l.m.c. de Fréchet admettant une base $(e_i)_{i \geq 0}$ telle que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i \in A \quad \text{pour toute suite complexe } (\alpha_i)_{i \geq 0}. \quad (*)$$

Alors toute dérivation de A dans un A -module de Fréchet est continue.

Preuve. Montrons que les conditions (i) et (ii) du théorème 1.7 sont satisfaites. Soit I un idéal fermé de A de codimension infinie. Si tous les e_i sont dans I sauf un nombre fini, alors la codimension de I serait finie. Donc il existe une infinité d'éléments de la base $(e_i)_{i \geq 0}$ qui ne sont pas dans I . Et comme $(e_i)_{i \geq 0}$ est orthonormale, nous obtenons une suite (une sous-suite de $(e_i)_{i \geq 0}$) dont le carré n'appartient pas à I . Donc la condition (i) du théorème 1.7 est vérifiée. Montrons maintenant que la condition (ii) est également vérifiée. En fait, nous allons même montrer que tout idéal fermé de codimension finie est unitaire.

Soit J un tel idéal et soit $F = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots\}$ l'ensemble de tous les éléments de la base $(e_i)_{i \geq 0}$ qui sont dans J (de tels éléments existent). Considérons $e = \sum_{e_k \in F} e_k$; cette série est convergente puisque A vérifie (*) et comme J est fermé, $e \in J$. Montrons que e est l'unité de J . En effet soit $x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i \in J$, on a $x e_k = \alpha_k e_k$, donc si $e_k \notin J$ nécessairement $\alpha_k = 0$. Il s'ensuit alors que $ex = xe = x$ pour tout $x \in J$. $\square$

Proposition 2.2. Soit A une a.l.m.c. de Fréchet à base $(e_i)_{i \geq 0}$ vérifiant :

- (1) $e_i e_j = e_j$ si $i \leq j$;
- (2) $p_i(e_i) \neq 0$ et $p_i(e_{i+1}) = 0$ où $(p_i)_{i \geq 0}$ est la famille des semi-normes définissant la topologie de A .

Alors toute dérivation de A dans un A -module de Fréchet est continue.

Preuve. Pour tout i , considérons $u_i = e_i - e_{i+1}$. Il est clair que $(u_i)_{i \geq 0}$ est une famille orthonormale; de plus, en utilisant (2), on vérifie facilement que pour toute suite $(\alpha_i)_{i \geq 0}$ de C , $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u_i \in A$. Soit maintenant $x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i$, alors on montre que $x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i \right) u_k$ d'où $(u_i)_{i \geq 0}$ est une base de A ; par suite la proposition 2.1 permet de conclure. $\square$

Exemple. Soit $A = C^N$, l'algèbre de toutes les suites complexes. On munit A des opérations:

$$(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$$

$$(x_n)_n (y_n)_n = (x_n y_n)_n$$

$$\lambda (x_n)_n = (\lambda x_n)_n.$$

On munit A de la topologie définie par la famille des semi-normes $(p_i)_{i \geq 0}$

$$p_i((x_n)_n) = |x_i|.$$

Pour tout $i \geq 0$, considérons

$$e_i = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i \text{ termes}}, 1, 1, \dots).$$

Alors A est une a.l.m.c. de Fréchet à base $(e_i)_{i \geq 0}$ et qui vérifie (1) et (2) de la proposition 2.2.

English extended abstract. In this paper we extend to Fréchet locally m-convex algebras (l.m.c.a.) Corollary 3 of W. G. Badé and P. C. Curtis, Jr [1] and Theorem 2 of N. P. Jewell [3] concerning the continuity of derivations. We obtain the following results:

Theorem 1. Let A be a Fréchet l.m.c.a. satisfying the following conditions:

- (i) if K is a closed bi-ideal of infinite codimension in A , then there exist sequences $(y_n)_n, (z_n)_n$ in A satisfying $y_n z_m = 0$ ($n \neq m$), and $y_n z_n \notin K$, $n = 1, 2, \dots$
- (ii) every closed bi-ideal of finite codimension in A has a uniformly bounded left (or right) approximate identity.

Then every derivation from A into a Fréchet A -module is continuous.

Theorem 2. *Let A be a Fréchet l.m.c.a. satisfying the condition(ii) of Theorem 1 and the following condition:*

- (i') *if K is a closed bi-ideal of finite codimension in A , then there exist sequences $(b_n)_n, (c_n)_n$ in A such that $c_n b_1 \cdots b_{n-1} \notin K$ and $c_n b_1 \cdots b_n \in K$ ($n \geq 2$).*

Then every derivation from A into a Fréchet A -module is continuous.

For the proof of Theorem 1 we essentially use properties of the left (or right) continuity ideal, while the proof of Theorem 2 relies on the properties of the separating space of derivations.

In the second section of the paper we apply our results in the context of some Fréchet l.m.c.a. with bases.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. G. Badé et P. C. Curtis Jr, *The continuity of derivations of Banach algebras*, J. Funct. Anal. **16** (1974), 372–387.
2. P. G. Dixon, *Automatic continuity of positive functionals on topological involution algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. **23** (1981), 265–281.
3. N. P. Jewell, *Continuity of module and higher derivations*, Pacific J. Math. **68** (1977), 91–98.
4. S. I. Ouzomgi, *Factorization and automatic continuity for an algebra of infinitely differentiable functions*, J. London Math. Soc. (2) **30** (1984), 265–280.
5. J. R. Ringrose, *Automatic continuity of derivations of operator algebras*, J. London Math. Soc. (2) **5** (1972), 432–438.
6. A. M. Sinclair, *Automatic continuity of linear operators*, London Mathematical Society Lectures Notes **21**, University Press, Cambridge, 1976.
7. ———, *Homomorphism from $Co(R)$* , J. London Math. Soc. (2) **11** (1975), 165–174.
8. M. P. Thomas, *Automatic continuity for linear functions intertwining continuous linear operators on Fréchet spaces*, Canad. J. Math. **3** (1978), 518–530.

M. AKKAR

U. F. R. DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
33405 TALENCE CEDEX FRANCE

E. ILLOUSSAMEN ET M. OUDADESS
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE TAKADDOUN
AVENUE OUED AKREUCH
B. P. 5118 RABAT (MAROC)