

## SYNTHÈSE SPECTRALE DANS UNE CERTAINE LIMITE PROJECTIVE D'ALGÈBRES DE BEURLING

ELHASSAN ZEROUALI

**RÉSUMÉ.** On s'intéresse dans ce travail à la limite projective  $\mathbf{B}$  des algèbres de Beurling  $A_\omega(\Gamma)$  associées aux poids d'Atzmon.

On montre que les caractères de  $\mathbf{B}$  sont continus. On démontre aussi que  $\mathbf{B}$  est une algèbre régulière et on donne une relation entre les idéaux fermés de  $\mathbf{B}$  et leur adhérences dans  $A_\omega(\Gamma)$ ; ce qui nous permet de prouver que les seuls fermés de type  $ZA^+$  qui vérifient la synthèse spectrale dans  $\mathbf{B}$  sont les fermés dénombrables. La motivation de ce travail est le rôle joué par  $\mathbf{B}$  dans l'étude des idéaux fermés de  $A^+$ .

**ABSTRACT.** We consider here the projective limit  $\mathbf{B}$  of the Beurling algebras  $A_\omega(\Gamma)$  associated to Atzmon's weights. We show that all characters of  $\mathbf{B}$  are continuous. We show also that  $\mathbf{B}$  is a regular algebra and we describe closed ideals of  $\mathbf{B}$  in terms of their closures in the algebras  $A_\omega(\Gamma)$ . It follows from this discussion that the only closed  $ZA^+$ -sets which satisfy synthesis for  $\mathbf{B}$  are the closed countable sets. This work is motivated by the role played by  $\mathbf{B}$  in the discussion of closed ideals of  $A^+$ .

**1. Introduction.** On note  $\Gamma$  le cercle unité; une suite  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est appelée un *poids* si  $\omega_n \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\omega_{n+m} \leq \omega_n \cdot \omega_m$  ( $n, m \in \mathbb{Z}$ ).

Soit  $A_\omega(\Gamma)$  l'algèbre de Beurling

$$A_\omega(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma) \mid \|f\|_\omega < \infty\}$$

où

$$\|f\|_\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \omega_n$$

et où  $\hat{f}(n)$  est le  $n^{\text{e}}$  coefficient de Fourier de  $f$ ,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(e^{it}) dt.$$

Pour  $\omega_n \equiv 1$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) on retrouve l'algèbre de Wiener  $A(\Gamma)$ .

On note  $A^+ = \{f \in A(\Gamma) \mid \hat{f}(n) = 0, n < 0\}$ .

L'algèbre  $A_\omega(\Gamma)$  est une algèbre régulière [4, p. 118] pour les poids vérifiant :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(\omega_n)}{1+n^2} < \infty.$$

---

Reçu le 25 avril 1991 et, sous forme définitive, le 19 juillet 1991.

Les poids satisfaisant

$$\text{i) } \omega_n = 1, n \geq 0$$

$$\text{ii) } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \omega_{-n}}{\sqrt{n}} = 0$$

seront appelés *poids d'Atzmon*. Soit  $\mathbf{P}$  l'ensemble des poids d'Atzmon. Posons  $\mathbf{B} = \bigcap_{\omega \in \mathbf{P}} A_\omega(\Gamma)$ , munie de la topologie limite projective  $\mathfrak{T}$  définie par les  $A_\omega(\Gamma)$ .

$(\mathbf{B}, \mathfrak{T})$  est une algèbre localement multiplicativement convexe complète puisque c'est une limite projective d'algèbres de Banach (voir [5, p. 6]).

On a

$$\text{Sp}(\mathbf{B}) = \bigcup_{\omega \in \mathbf{P}} \text{Sp}(A_\omega(\Gamma)) = \Gamma$$

où  $\text{Sp}(\mathbf{B})$  désigne l'ensemble des caractères continus de  $\mathbf{B}$ . On étudie dans ce chapitre l'algèbre  $(\mathbf{B}, \mathfrak{T})$ , on démontrera en particulier que tous les caractères de  $\mathbf{B}$  sont continus. On étudiera aussi les questions de synthèse dans  $\mathbf{B}$ . On montre notamment que les seuls ensembles de type  $ZA^+$  qui soient de synthèse dans  $\mathbf{B}$  sont les ensembles dénombrables : il serait intéressant, si possible, de donner des ensembles de mesure nulle vérifiant la synthèse dans  $\mathbf{B}$ , car ces ensembles ne seraient évidemment pas des ensembles de type  $ZA^+$ .

Ce travail a été motivé par le théorème 3.4 qui établit un lien entre les idéaux fermés de  $\mathbf{B}$  et les idéaux fermés de  $A^+$  sans facteur intérieur discret dont l'ensemble des zéros est inclus dans le cercle unité.

## 2. Continuité des caractères de $\mathbf{B}$ .

### Proposition 2.1.

- a)  $(\mathbf{B}, \mathfrak{T})$  est une algèbre régulière.
- b) Tous les caractères de  $\mathbf{B}$  sont continus.

*Démonstration.* a) Soit  $\omega$  le poids défini par

$$\omega_n = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ e^{\sqrt{-n}} & n < 0. \end{cases}$$

Alors  $A_\omega(\Gamma) \subset \mathbf{B}$  et l'injection est continue.

Comme  $A_\omega(\Gamma)$  est régulière sur  $\Gamma$ ,  $\mathbf{B}$  est aussi régulière sur  $\Gamma$ , donc  $\mathbf{B}$  est régulière.

b) Soit  $\chi$  un caractère de  $\mathbf{B}$ ; donc  $\chi|_{A_\omega(\Gamma)}$  est un caractère de l'algèbre de Banach  $A_\omega(\Gamma)$ .

Donc il existe  $\lambda_0 \in \Gamma$  tel que  $\chi(f) = f(\lambda_0)$  pour tout  $f \in A_\omega(\Gamma)$ .

Soit  $f \in \mathbf{B}$ . Posons  $a_n = \hat{f}(n)$  et  $f = f_1 + f_2$  où  $f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$  et  $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . On a  $f_2 \in A^+$  et  $\chi(f) = \chi(f_1) + \chi(f_2) = \chi(f_1) + f_2(\lambda_0)$ .

Posons

$$L_{\lambda_0}(f_1)(z) = \begin{cases} \frac{f_1(z) - f_1(\lambda_0)}{z - \lambda_0} & z \neq \lambda_0 \quad |z| = 1 \\ f_1'(\lambda_0) & z = \lambda_0. \end{cases}$$

Alors  $L_{\lambda_0}(f_1) \in \mathbf{B}$ . En effet pour  $z \neq \lambda_0$

$$\begin{aligned} L_{\lambda_0}(f_1)(z) &= \frac{f_1(z) - f_1(\lambda_0)}{z - \lambda_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left( \frac{z^{-n} - \lambda_0^{-n}}{z - \lambda_0} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -a_{-n} (z\lambda_0)^{-n} \left( \frac{z^n - \lambda_0^n}{z - \lambda_0} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_{-n} (z\lambda_0)^{-n} \sum_{p=0}^{n-1} z^p \lambda_0^{n-p-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -a_{-n} \left( \sum_{p=0}^{n-1} z^{-n+p} \lambda_0^{-p-1} \right). \end{aligned}$$

Or

$$\left\| \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^{-n+p} \lambda_0^{-p-1} \right\|_{\omega} = \sum_{p=0}^{n-1} \omega_{-n+p} \leq n\omega_{-n}.$$

où  $\alpha: z \mapsto z$ . Donc

$$\|L_{\lambda_0}(f_1)\|_{\omega} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n|a_{-n}| \omega_{-n}.$$

Posons

$$\omega'_n = \begin{cases} 2|n|\omega_n & n < 0 \\ \omega_n & n \geq 0. \end{cases}$$

On obtient alors un poids qui appartient à  $\mathbf{P}$  quand  $\omega \in \mathbf{P}$ . En effet

$$\limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{\log \omega_n}{\sqrt{-n}} = \limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{\log(2|n|\omega_n)}{\sqrt{-n}} = \limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{\log 2|n|}{\sqrt{-n}} + \limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{\log \omega_n}{\sqrt{-n}} = 0.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_{-n}| \omega_{-n} < \infty$$

et par conséquent  $L_{\lambda_0}(f_1) \in \mathbf{B}$ .

Comme

$$L_{\lambda_0}(f_1)(\alpha - \lambda_0) = f_1 - f_1(\lambda_0)$$

on obtient

$$\chi(L_{\lambda_0}f_1)(\chi(\alpha) - \lambda_0) = \chi(f_1) - f_1(\lambda_0)$$

$\chi(\alpha) - \lambda_0 = 0$  donc  $\chi(f_1) = f_1(\lambda_0)$ ,  $\chi(f) = f(\lambda_0)$  et tous les caractères de  $\mathbf{B}$  sont donc continus.  $\square$

**3. Idéaux de  $\mathbf{B}$  et synthèse.** Soit  $I$  un idéal fermé de  $\mathbf{B}$ . On pose

$$h(I) = \{z \in \Gamma \mid f(z) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}.$$

Pour  $\omega \in \mathbf{P}$ , notons par  $I^{\omega}$  l'adhérence de  $I$  dans  $(A_{\omega}(\Gamma), \|\cdot\|_{\omega})$ . Un idéal fermé  $I$  d'une algèbre topologique  $A$  sera dit *non trivial* si  $I \neq \{0\}$  et  $I \neq A$ .

**Lemme 3.1.** *Si  $I$  est un idéal fermé non trivial de  $\mathbf{B}$ , alors  $I^\omega$  est un idéal fermé non trivial de  $A_\omega(\Gamma)$ . En particulier  $h(I) \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Le fait que  $I^\omega$  soit un idéal provient de la densité de  $\mathbf{B}$  dans  $A_\omega(\Gamma)$  et  $I^\omega \neq \{0\}$  si  $I \neq \{0\}$ . Supposons que  $1 \in I^\omega$ . Il existe alors une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'éléments de  $I$  telle que

$$\|f_n - 1\|_\omega \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En particulier il existe  $f$  dans  $I$  inversible dans  $A_\omega(\Gamma)$ . Donc  $f$  ne s'annule pas sur  $\Gamma = \text{Sp}(A_\omega(\Gamma))$  pour tout  $\omega' \in \mathbf{P}$ . D'où  $f$  est inversible dans  $A_{\omega'}(\Gamma)$  pour tout  $\omega' \in \mathbf{P}$ . Par suite  $f$  est inversible dans  $\mathbf{B}$ , ce qui montre que  $1 \in I$ . Cette contradiction prouve le lemme 3.1.  $\square$

La proposition suivante résulte des propriétés classiques des topologies limites projectives.

**Proposition 3.2.** *Soit  $I$  un idéal fermé de  $\mathbf{B}$ , alors*

$$I = \bigcap_{\omega \in \mathbf{P}} I^\omega.$$

*Démonstration.* Posons  $\tilde{I} = \bigcap_{\omega \in \mathbf{P}} I^\omega$ . Il est clair que  $I \subset \tilde{I}$ .

Pour montrer que  $\tilde{I} \subset I$ , il suffit de voir que  $I^\perp \subset (\tilde{I})^\perp$  où

$$I^\perp = \{g \in \mathbf{B}^* \mid \langle g, f \rangle = 0 \text{ pour tout } f \in I\},$$

$\mathbf{B}^*$  désignant le dual de  $\mathbf{B}$ .

Comme  $\mathbf{B}$  est limite projective des algèbres  $A_\omega(\Gamma)$  ( $\omega \in \mathbf{P}$ ) on a

$$\mathbf{B}^* = \bigcup_{\omega \in \mathbf{P}} A_\omega^*(\Gamma)$$

(voir [5, p. 290]).

Soit  $g \in I^\perp$ . Il existe donc  $\omega \in \mathbf{P}$  tel que  $g \in A_\omega^*(\Gamma)$ . Ceci entraîne que  $g \in (I^\omega)^\perp$ , car  $I$  est dense dans  $I^\omega$  pour la norme  $\|\cdot\|_\omega$  et  $g$  est continue. Or  $\tilde{I} \subset I^\omega$ , donc  $g \in (\tilde{I})^\perp$ . Finalement  $\tilde{I} = I$ .  $\square$

Soit  $E$  un fermé du cercle unité. On pose

$$I(E) = \{f \in \mathbf{B} \mid f|_E = 0\},$$

$$J_0(E) = \{f \in \mathbf{B} \mid \text{supp } f \cap E = \emptyset\},$$

où  $\text{supp } f = \{z \in \Gamma \mid f(z) \neq 0\}^-$ . Soit  $J(E)$  l'adhérence de  $J_0(E)$  dans  $(\mathbf{B}, \mathfrak{T})$ . Une fonction  $f$  de  $\mathbf{B}$  est dite *de synthèse dans  $\mathbf{B}$  pour  $E$*  si  $f \in J(E)$ .

D'autre part soit  $I$  un idéal fermé de  $\mathbf{B}$  tel que  $h(I) = E$  et soit  $g \in J_1(E)$ . Posons

$$K = \{f \in \mathbf{B} \mid fg \in I\}.$$

On a  $I \subset K$  donc  $h(K) \subset h(I) = E$ . Si  $x \in E$ , il existe, puisque  $\mathbf{B}$  est régulière, une fonction  $f \in \mathbf{B}$  telle que  $f(x) = 1$  et  $fg = 0$ . Donc  $f \in K$ ,  $h(K) = \emptyset$  et  $K = \mathbf{B}$  d'après le lemme 3.1. Donc  $g \in I$  et  $J(E) \subset I \subset I(E)$ .

Un fermé  $E$  du cercle unité sera dit *de synthèse dans  $\mathbf{B}$*  s'il existe un seul idéal  $I$  de  $\mathbf{B}$  tel que  $h(I) = E$ , ce qui est équivalent à  $J(E) = I(E)$ . On dit que  $E$  est *de type  $ZA^+$*  s'il existe  $f \in A^+$  non nulle telle que  $f|_E = 0$ .

**Théorème 3.3.** Soit  $E$  un fermé de  $\Gamma$  de type  $ZA^+$ . Alors  $E$  est de synthèse dans  $B$  si et seulement si  $E$  est dénombrable.

*Démonstration.* Soit  $E$  de synthèse dans  $B$  et  $f \in I^+(E) = I(E) \cap A^+$ . Alors  $f$  est de synthèse dans  $B$ , donc  $f$  est de synthèse dans  $A_\omega(\Gamma)$  pour tout les poids d'Atzmon;  $E$  est alors au plus dénombrable d'après [7, th. 3-1].

D'après [6] (voir aussi [7]),  $E$  est de  $\omega$ -synthèse pour tous les poids d'Atzmon; il existe alors un seul idéal  $I$  de  $A_\omega(\Gamma)$  vérifiant  $h(I) = E$ .

Comme  $B$  et  $A_\omega(\Gamma)$  sont des algèbres régulières

$$h((I(E))^\omega) = h((J(E))^\omega) = E.$$

Donc  $(I(E))^\omega = (J(E))^\omega$  puisque  $E$  est de synthèse dans l'algèbre de Banach  $A_\omega(\Gamma)$ . D'après la proposition 3.2 on a

$$I(E) = \bigcap_{\omega \in P} (I(E))^\omega = \bigcap_{\omega \in P} (J(E))^\omega = J(E)$$

et  $E$  est de synthèse dans  $B$ .  $\square$

*Remarque.* Le raisonnement ci-dessus prouve que, si  $E$  est de synthèse dans les  $A_\omega(\Gamma)$  pour tout  $\omega \in P$ , alors  $E$  est de synthèse dans  $B$ .

Soit  $I$  un idéal fermé de  $A^+$ . On note  $\mathfrak{S}_I$  le *facteur intérieur* de  $I$ , c'est-à-dire, le plus grand diviseur commun des facteurs intérieurs  $\mathfrak{S}(f)$  des éléments non nuls de  $I$  [3, p. 82]. On a  $\mathfrak{S}_I = BJ$  où  $B$  est un produit de Blaschke et où

$$J: z \mapsto \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu_I(t)$$

est la fonction intérieure définie par une mesure singulière positive  $\mu_I$ . On note

$$\delta(I) = \sum_{z \in \Gamma} \mu(\{z\}) \delta_z$$

(où  $\delta_z$  est la mesure de Dirac en  $Z$ ) la *partie discrète* de  $\mu_I$ . On a alors le théorème suivant :

**Théorème 3.4.** Soit  $I$  un idéal fermé de  $A^+$  vérifiant

- i)  $h(I) \subset \Gamma$ ,
- ii)  $\delta(I) = 0$ ,

alors il existe un idéal fermé  $J$  de  $B$  tel que  $I = J \cap A^+$ .

*Démonstration.* Soit  $\pi$  la surjection canonique de  $A^+$  sur  $A^+/I$

$$\begin{aligned} \pi: A^+ &\longrightarrow A^+/I \\ f &\longmapsto \pi(f) \end{aligned}$$

On a  $\text{Sp}(\pi(\alpha)) = h(I) \subset \Gamma$ , donc  $\pi(\alpha)$  est inversible.

On a  $\delta(I) = 0$ , donc d'après [2],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|\pi(\alpha)^n\|}{\sqrt{-n}} = 0.$$

Posons, pour  $f \in \mathbf{B}$ ,  $\tilde{\pi}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \pi(\alpha^n)$ . Alors  $\tilde{\pi}$  est continue. Notons  $J = \ker \tilde{\pi}$ . Comme  $\tilde{\pi}|_{A^+} = \pi$ , on obtient

$$I = \ker \pi = \ker \tilde{\pi} \cap A^+ = J \cap A^+. \quad \square$$

Ce résultat était la motivation de ce chapitre car on voit que les idéaux fermés de  $\mathbf{B}$  permettent de décrire les idéaux de  $A^+$  vérifiant les conditions ci-dessus.

**English extended abstract.** We denote by  $\Gamma$  the unit circle and by  $A_\omega(\Gamma)$  the Beurling algebra of functions  $f \in C(\Gamma)$  satisfying  $\|f\|_\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \omega_n < +\infty$  where  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  is a regular weight. We say that  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  is a *Atzmon's weight* if

- i)  $\omega_n = 1, n \geq 1$ ,
- ii)  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \omega_{-n}}{\sqrt{n}} = 0$ .

Let  $\mathbf{P}$  be the set of Atzmon's weights and  $(\mathbf{B}, \mathfrak{T})$  be the projective limit of Beurling algebras  $A_\omega(\Gamma)$  for all  $\omega \in \mathbf{P}$ . It is clear that  $(\mathbf{B}, \mathfrak{T})$  is a complete locally multiplicatively convex algebra and that the set of continuous characters of  $\mathbf{B}$  is  $\Gamma$ . We show that continuity holds for characters of  $\mathbf{B}$  and that  $(\mathbf{B}, \mathfrak{T})$  is a regular algebra.

We give a description of closed ideals  $I$  of  $\mathbf{B}$  in terms of their closure  $I^\omega$  in  $(A_\omega, \|\cdot\|_\omega)$  for  $\omega \in \mathbf{P}$ . We describe closed ideals of  $A^+ = \{f \in \mathbf{B} \mid \hat{f}(n) = 0, n \geq 0\}$  such that

- i)  $h(I) = \{z \in \overline{\mathbf{D}} \mid f(z) = 0 \text{ for every } f \in I\}$ ,
- ii)  $\delta(I) = 0$ ,

where  $\delta(I)$  is the discrete part of the singular measure associated to  $I$ .

A closed set  $E \subset \Gamma$  is said to be a  $ZA^+$ -set if there exists a nonzero  $f \in A^+$  vanishing on  $E$ . We show that a  $ZA^+$ -set is the synthesis in  $\mathbf{B}$  if and only if it is a countable set.

### Proposition 2.1.

- a)  $(\mathbf{B}, \mathfrak{T})$  is a regular algebra.
- b) All characters in  $\mathbf{B}$  are continuous.

To prove this proposition we establish that for  $f_1 \in \mathbf{B}$  such that  $\hat{f}_1(n) = 0$  ( $n \geq 0$ ) we have:  $L_\lambda(f_1) \in \mathbf{B}$  for  $\lambda \in \overline{\mathbf{D}}$  where

$$L_\lambda(f_1)(z) = \begin{cases} \frac{f_1(z) - f_1(\lambda)}{z - \lambda} & z \neq \lambda \quad |z| = 1 \\ f_1'(\lambda_0) & z = \lambda_0. \end{cases}$$

For  $I$  a closed ideal in  $\mathbf{B}$ , we set  $h(I) = \{z \in \overline{\mathbf{D}} \mid f(z) = 0 \text{ for all } f \in I\}$ .

**Lemma 3.1.** *If  $I$  is a nontrivial closed ideal of  $\mathbf{B}$  (i.e.  $I \neq \{0\}$ ,  $I \neq \mathbf{B}$ ) then  $I^\omega$  is nontrivial in  $(A_\omega, \|\cdot\|_\omega)$  and  $h(I) = h(I^\omega)$ .*

The following proposition arises from standard properties of the dual of a projective limit.

**Proposition 3.2.** *Let  $I$  be a closed ideal in  $\mathbf{B}$ , then*

$$I = \bigcap_{\omega \in \mathbf{P}} I^\omega.$$

Let  $I$  be a closed ideal of  $A^+$ . We denote by  $\sigma_I$  the inner factor of  $I$ , by  $\mu_I$  the singular measure associated to  $\sigma_I$ , and by  $\delta_I$  the discrete part of  $\mu_I$ . By using [2] we obtain:

**Theorem 3.4.** *Let  $I$  be a closed ideal in  $A^+$  such that*

- i)  $h(I) \subset \Gamma$ ,
- ii)  $\delta(I) = 0$ .

*Then there exists a closed ideal  $J$  of  $\mathbf{B}$  such that  $I = J \cap A^+$ .*

For a closed set  $E \in \Gamma$  we set

$$I(E) = \{f \in \mathbf{B} \mid f|_E = 0\},$$

$$J_0(E) = \{f \in \mathbf{B} \mid \text{supp } f \cap E = \emptyset\},$$

where  $\text{supp}(f) = \{z \in \Gamma \mid f(z) \neq 0\}^-$ . We denote by  $J(E)$  the closure of  $J_0(E)$  in  $(\mathbf{B}, \mathfrak{T})$ . A closed set is said to be of *synthesis* in  $\mathbf{B}$  if  $I(E) = J(E)$ , which means that there exists only one closed ideal  $I \subset \mathbf{B}$  such that  $h(I) = E$ .

**Theorem 3.3.** *Let  $E \in \Gamma$  be a  $ZA^+$ -set of  $\Gamma$ . Then  $E$  is of synthesis in  $\mathbf{B}$  if and only if  $E$  is countable.*

*Remark.* It follows from the proof of the theorem that if  $E$  is of synthesis in  $(A_\omega(\Gamma), \|\cdot\|_\omega)$  for all  $\omega \in \mathbf{P}$ ,  $E$  is of synthesis in  $\mathbf{B}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. Esterle, *Distributions on some Kronecker sets and closed ideals of  $A^+$* , (à paraître).
2. J. Esterle, E. Strouse et F. Zouakia, *Closed ideals of  $A^+$* , (à paraître).
3. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
4. Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Wiley, New York, 1968.
5. G. Kothe, *Topological vector spaces I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.
6. M. Zarabi, *Problèmes de synthèse spectrale dans certaines algèbres à poids sur la droite et le cercle et applications*, thèse, Université de Bordeaux I, 1990.
7. ———, *Synthèse spectrale dans certaines algèbres de Beurling sur le cercle unité*, Bull. Soc. Math. France **118** (1990), 241–249.
8. F. Zouakia, *Ideaux fermés de  $A^+$  et de  $L^1(R)$  et propriétés asymptotiques des contractions et des semi-groupes contractants*, thèse, Université de Bordeaux I, 1990.

ELHASSAN ZEROUALI  
U. F. R. DE MATHÉMATIQUES  
UNIVERSITÉ BORDEAUX I  
351 COURS DE LA LIBÉRATION  
33405 TALENCE FRANCE