

UN PROBLÈME DE MINIMISATION EN NOMBRES ENTIERS

JEAN SAVOIE

RÉSUMÉ. Dans cet article nous définissons une classe de fonctions et construisons un procédé permettant d'obtenir une borne qui accélère la solution de certains problèmes de minimisation en nombres entiers que l'on peut trouver par exemple dans des méthodes comme METRIC et MOD-METRIC qui solutionnent des problèmes d'inventaires. De plus, une application à un problème simple est considérée pour illustrer la méthode.

ABSTRACT. In this paper, we define a class of functions and build a method which accelerate the solution of some minimisation problems. Some of these problems can be found in methods solving inventory problems like METRIC or MOD-METRIC. Furthermore, to illustrate the method we analyse a simple example.

1. Introduction. Dans certaines méthodes solutionnant des problème d'inventaires comme Metric [5] ou Mod-Metric [2], nous rencontrons des problèmes en nombres entiers qui peuvent se ramener à un problème de type suivant:

$$(P) \quad \begin{cases} Z(M) = \min\{W(n_0, \vec{n}) = \sum_{i=1}^k W_i(n_0, n_i)\} \\ \text{sujet à } \sum_{i=0}^k n_i = M, n_i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où les fonctions W_i satisfont aux conditions suivantes:

- E1. $W_i : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et décroissante dans sa deuxième variable.
- E2. W_i est convexe et décroissante dans sa première variable lorsque $n_0 \geq K$ où $K \geq 0$ est une constante indépendante de la deuxième variable.
- E3. Lorsque $n_0 \geq K$, $\nabla_0 \nabla_1 W_i(n_0, n_i) > 0$.
- E4. $\lim_{n_i \rightarrow \infty} W_i(n_0, n_i) = 0$.

où $\vec{n} = (n_1, \dots, n_k)$ et où ∇_i (Δ_i) sont les opérateurs de différences finies ascendantes (descendantes), c'est-à-dire, pour $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x = (x_0, \dots, x_m)$,

$$\nabla_i f(x) = f(x_0, \dots, x_i + 1, \dots, x_m) - f(x),$$

$$\Delta_i f(x) = f(x) - f(x_0, \dots, x_i - 1, \dots, x_m).$$

On peut trouver explicitement dans [4] des exemples où les conditions E sont vérifiées. Dans [3], page 384, le problème considéré faisant partie de la méthode METRIC possède les propriétés E.

Reçu le 10 avril 1990 et, sous forme révisée, le 6 septembre 1990.

©Association mathématique du Québec

Le problème P peut être résolu par la solution de $M + 1$ problèmes de la forme

$$(P_2) \quad \begin{cases} Z2(M, n_0) = \min\{W(n_0, \vec{n})\} \\ \text{sujet à } \sum_{i=1}^k n_i = M - n_0, \end{cases}$$

en posant $Z(M) = \min_{0 \leq n_0 \leq M} Z2(M, n_0)$.

Puisque pour n_0 fixé, W est une somme de fonctions convexes décroissantes d'une variable, il est facile de résoudre le problème P_2 par l'algorithme 2 donné en appendice. En fait cet algorithme est basé sur le résultat suivant démontré lui aussi en appendice.

THÉORÈME 1. $\vec{n}^* = (n_1^*, \dots, n_k^*)$ est une solution optimale du problème P_2 si et seulement si

- (1) $\sum_{i=1}^k n_i^* = M - n_0$,
- (2) $\max_{1 \leq i \leq k} -\nabla_1 W_i(n_0, n_i^*) \leq \min_{1 \leq i \leq k} -\Delta_1 W_i(n_0, n_i^*)$.

Dans cet article, nous montrons qu'il est possible d'améliorer cette façon de procéder en trouvant une borne $B(M) \leq M$ où $Z(M) = \min_{0 \leq n_0 \leq B(M)} Z2(M, n_0)$ et donnons une façon de l'obtenir rapidement. Ainsi lorsque M est grand, nous pouvons réduire de beaucoup la recherche du n_0 optimal dans bien des cas.

Dans la section 3, nous abordons un problème simple pour illustrer les résultats obtenus et quelques résultats numériques sont présentés. Pour des applications à des problèmes d'inventaires voir [4].

2. Construction d'une borne. Pour $x, y \in \mathbb{N}^k$, nous définissons $|x| = \sum_{i=1}^k x_i$ et dirons que $x < y$ lorsque pour tout i , $1 \leq i \leq k$, on a $x_i < y_i$. De plus, pour i , $1 \leq i \leq k$, nous définissons les fonctions F_i par

$$F_i(n_i) = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} -\nabla_1 W_i(n_0, n_i) \quad (2.1)$$

et $T_n: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^k$, $n \geq K$ sont des opérateurs où pour $y = T_n(x)$ on a que y_i est le plus petit entier positif tel que

$$F_i(y_i) \leq -\Delta_0 W(n, x).$$

Nous noterons par TB_n l'ensemble $\{x \in \mathbb{N}^k \mid T_n(x) \leq x\}$.

REMARQUE 1. Par E3, nous avons $F_i(n_i) < -\nabla_1 W_i(n_0, n_i)$ pour $n_0 \geq K$. Ainsi $F_i(l) \leq -\nabla_1 W_i(K, l)$ et par E4, $\lim_{l \rightarrow \infty} F_i(l) = 0$ et T_n est par conséquent bien défini.

Nous pouvons motiver les définitions précédentes. Si $(n_0^*, \vec{n}^*)$ où $\vec{n}^* = (n_1^*, \dots, n_k^*)$ est une solution optimale au problème P , nous devons avoir

$$-\nabla_1 W_i(n_0^*, n_i^*) \leq -\Delta_0 W(n_0^*, \vec{n}^*)$$

avec $1 \leq i \leq k$, car sinon $W(n_0^* - 1, n_1^*, \dots, n_i^* + 1, \dots, n_k^*)$ est une meilleure solution. Ainsi $F_i(n_i^*) \leq -\Delta_0 W(n_0^*, \vec{n}^*)$ lorsque $n_0^* \geq K$ par la remarque 1. Donc

$$T_{n_0^*}(\vec{n}^*) \leq \vec{n}^* \quad (2.2)$$

et $\vec{n}^*$ est ainsi un élément de l'ensemble $TB_{n_0^*}$. Dans cette section nous démontrons que chaque ensemble TB_n non vide, $n \geq K$, possède un plus petit élément qui sera L_n et qui

peut être construit comme un point fixe de T_n . Cela nous permettra de trouver la borne $B(M)$ puisque les L_n sont croissants et

$$|L_{n_0^*}| \leq |\vec{n}^*| = M - n_0^*.$$

LEMME 2. Si $x \leq y, x, y \in \mathbb{N}^k$, alors

- (1) pour $i \geq 1, \nabla_i W(n_0, x) < 0$,
- (2) $-\nabla_0 W(n_0, y) \leq -\nabla_0 W(n_0, x)$ lorsque $n_0 \geq K$.

DÉMONSTRATION:

- (1) Par E1.
- (2) Nous avons par E3,

$$\nabla_0 W_i(n_0, l+p) = \nabla_0 W_i(n_0, l) + \sum_{j=0}^{p-1} \nabla_1 \nabla_0 W_i(n_0, l+j) > \nabla_0 W_i(n_0, l).$$

De cela nous obtenons le résultat car $\nabla_0 W = \sum_{i=1}^k \nabla_0 W_i$. $\square$

THÉORÈME 3. Si $x, y \in \mathbb{N}^k$ et $x \leq y$ alors pour $n \geq K$, nous avons

- (1) $0 \leq T_n(0)$,
- (2) $T_n(x) \leq T_n(y)$,
- (3) $T_n(x) \leq T_{n+1}(x)$,
- (4) $T_n^l(0) \leq T_{n+1}^{l+1}(0)$,
- (5) $T_n^l(x) \leq T_{n+1}^l(x)$,

où $T_n^{l+1} = T_n^l \circ T_n$.

DÉMONSTRATION:

- (1) Evident par la définition de T_n .
- (2) Par la définition de T_n et par le lemme (2.2), nous obtenons $T_n(y) \geq T_n(x)$ puisque

$$F_i(T_n(y)_i) \leq -\Delta_0 W(n, y) \leq -\Delta_0 W(n, x).$$

- (3) $F_i(T_{n+1}(x)_i) \leq -\Delta_0 W(n+1, x) \leq -\Delta_0 W(n, x)$ par convexité dans la première variable. Donc $T_{n+1}(x) \geq T_n(x)$.
- (4) Evident par (1) et (2).
- (5) Supposons que $T_n^l(x) \leq T_{n+1}^l(x)$, alors par la partie (2) et (3) nous avons que $T_n^{l+1}(x) \leq T_n T_{n+1}^l(x) \leq T_{n+1} T_{n+1}^l(x)$. $\square$

Par le théorème (3.4), le vecteur $L_n = \lim_{l \rightarrow \infty} T_n^l(0)$ est bien défini pour $n \geq K$. Notons $R(n) = |L_n| + n$.

LEMME 4. Si $n \geq K$ et $R(n) = \infty$, alors pour tout $i, 1 \leq i \leq k, (L_n)_i = \infty$.

DÉMONSTRATION: Supposons le contraire. Soit i tel que $(L_n)_i < \infty$. Alors $-\Delta_0 W_i(n, (L_n)_i) > 0$ par E2. Considérons r_j , des entiers tels que

$$F_j(r_j) \leq -\Delta_0 W_i(n, (L_n)_i) \leq -\Delta_0 W(n, L_n). \quad (2.3)$$

Alors par le lemme (2.2), pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$F_j(r_j) \leq -\Delta_0 W(n, T_n^l(0)) \quad (2.4)$$

et ainsi $r \geq T_n^{l+1}(0)$ et $R(n) \leq |r| + n < \infty$ $\square$

Pour calculer les valeurs L_n pour $n \geq K$ ou une borne $B(M)$ rapidement, le lemme suivant est utile.

LEMME 5. Si $n \geq K$, alors

- (1) $L_n \leq L_{n+1}$,
- (2) si $S \in \mathbb{N}^k$ et $S \leq L_n$, alors $\lim_{l \rightarrow \infty} T_n^l(S) = L_n$,
- (3) $R(n) \leq R(n+1)$ et l'inégalité est stricte lorsque $R(n) < \infty$.

DÉMONSTRATION:

- (1) Par le théorème (3.5).
- (2) Puisque $0 \leq S$, on a par le théorème (3.2) que $T_n^l(0) \leq T_n^l(S)$ et ainsi $L_n \leq \lim_{l \rightarrow \infty} T_n^l(S)$. Si $|L_n| = \infty$, par le lemme (3), $(L_n)_i = \infty$ pour tout $i, 1 \leq i \leq k$, ainsi $L_n = \lim_{l \rightarrow \infty} T_n^l(S)$ dans ce cas. Si $|L_n| < \infty$ alors $S \leq T_n^j(0)$ à partir d'un certain j , donc $T_n^l(S) \leq T_n^{l+j}(0)$ et $\lim_{l \rightarrow \infty} T_n^l(S) \leq L_n$.
- (3) Evident. $\square$

Ainsi la suite des vecteurs L_n est croissante et ces vecteurs peuvent être calculés de la façon suivante

$$L_n = \begin{cases} \lim_{l \rightarrow \infty} T_K^l(0), & \text{si } n = K, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} T_n^l(L_{n-1}), & \text{si } n > K \text{ et } |L_{n-1}| < \infty, \\ L_{n-1}, & \text{si } n > K \text{ et } |L_{n-1}| = \infty. \end{cases} \quad (2.5)$$

LEMME 6. Si TB_n est non vide et $n \geq K$ alors L_n est le plus petit élément de TB_n .

DÉMONSTRATION: Si x est un élément de TB_n alors $T_n(x) \leq x$. Puisque $0 \leq x$ nous avons par le théorème 3.2 et par la dernière inégalité que pour tout $l \geq 0$,

$$T_n^l(0) \leq T_n^l(x) \leq x.$$

Ainsi, $L_n \leq x$ et le résultat est obtenu. $\square$

Maintenant énonçons le théorème principal

THÉORÈME 7.

$$Z(M) = \min_{0 \leq n_0 \leq B(M)} Z2(M, n_0)$$

où $B(M) = \min\{l, M\}$ et l est le plus petit entier plus grand ou égal à K où $M < R(l+1)$.

DÉMONSTRATION: Soit $(n_0^*, \vec{n}^*)$ où $\vec{n}^* = (n_1^*, \dots, n_k^*)$ est une solution optimale au problème P . Par le lemme 6 et (2.2) lorsque $n_0^* \geq K$ nous devons avoir que

$$|L_{n_0^*}| \leq |\vec{n}^*|.$$

Ainsi, nous avons $R(n_0^*) \leq M$ et par la croissance des $R(n)$ lorsque n croît nous avons le résultat. $\square$

La borne $B(M)$ peut être calculée par l'algorithme 1 de la page suivante.

3. Application à un problème simple. Dans cette section nous allons tout d'abord donner une méthode solutionnant le problème $(\tilde{Q})$ suivant pour ensuite lui ajouter une contrainte d'intégrité et une translation pour obtenir le problème (Q) . Ce dernier problème a été choisi seulement dans le but d'illustrer la méthode décrite dans cet article et non pour une éventuelle application. Pour des exemples plus concrets voir [4].

$$(\tilde{Q}) \quad \begin{cases} Z_R(M) = \min \sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i} \left(1 + \frac{A_i}{x_0} \right) \\ \text{sujet à } \sum_{i=0}^N x_i = M, x_i \geq 0, \end{cases}$$

-
- 1) Si $M \leq K$ alors $B(M) := M$; stop.
 - 2) $B := K + 1$, $\vec{n}^1 := (0, \dots, 0)$ et $total_1 := 0$.
 - 3) Trouver $\vec{n}^2 = (n_1^2, \dots, n_k^2)$ où n_i^2 est le plus petit entier tel que $F_i(n_i^2) \leq -\Delta_0 W(B, \vec{n}^1)$.
 - 4) $total_2 := \sum_{i=1}^k n_i^2 + B$.
 - 5) Si $(total_2 > M)$ alors $B(M) := B - 1$; stop.
 - 6) Si $(total_2 = total_1)$ alors $B := B + 1$.
 - 7) $total_1 := total_2$, $\vec{n}^1 := \vec{n}^2$; aller à 3.
-

Algorithme 1: Calcul de la borne $B(M)$

où $A_i > 0$. Pour avoir une solution optimale, elle doit être strictement à l'intérieur du domaine et doit satisfaire pour un certain λ les conditions de Kuhn-Tucker suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_i^2} \left(1 + \frac{A_i}{x_0} \right) &= \lambda, \\ \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{x_i x_0^2} &= \lambda, \\ \sum_{i=1}^N x_i &= M. \end{aligned}$$

En éliminant λ et les x_i , $i \geq 1$, nous obtenons

$$x_0 + x_0^2 f(x_0) = M \tag{3.1}$$

où

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{1 + \frac{A_i}{x}}}{\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\sqrt{1 + \frac{A_i}{x}}}}.$$

La fonction $f(x)$ est décroissante et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1/\sum A_i$. Montrons maintenant qu'il existe une seule valeur x_0^* vérifiant (3.1). Construisons une suite de nombres u_k telle que $u_0 = \infty$ et u_{k+1} , $k \geq 0$ est défini comme l'unique racine positive de l'équation

$$u_{k+1}^2 + u_{k+1} f(u_k) = M.$$

Alors il est facile de vérifier que les u_k sont décroissants puisque

$$u_{k+1} = \frac{2M}{1 + \sqrt{1 + 4Mf(u_k)}}.$$

De plus, en transformant l'équation (3.1), nous obtenons

$$x_0 + x_0 h(x_0) = M$$

où

$$h(x) = \frac{\sum \sqrt{x + A_i}}{\sum \frac{A_i}{\sqrt{x + A_i}}}$$

avec $h(x)$ croissante. Ainsi il n'existe qu'une seule valeur x_0^* solution de (3.1) et

$$M = u_{k+1} + u_{k+1}^2 f(u_k) \leq u_{k+1} + u_{k+1}^2 f(u_{k+1}).$$

Par conséquent $x_0^* = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ et l'unique solution optimale peut être calculée. Maintenant modifions le problème ($\tilde{Q}$) en ajoutant la condition que les $x_i \in \mathbb{N}$ et en translatant les variables de l'objectif de 1. Ainsi, il est facile de vérifier que les conditions E sont satisfaites et que le problème devient

$$(Q) \quad \begin{cases} Z(M) = \min \sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i + 1} \left(1 + \frac{A_i}{x_0 + 1} \right) \\ \text{sujet à } \sum_{i=0}^N x_i = M, x_i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour utiliser les algorithmes 1 et 2, nous devons calculer les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} -\Delta_0 W(x_0, x) &= \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{x_0(x_0 + 1)(x_i + 1)}, \\ -\nabla_1 W_i(x_0, x_i) &= \frac{1}{(x_i + 1)(x_i + 2)} \left(1 + \frac{A_i}{x_0 + 1} \right), \\ F_i(x_i) &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} -\nabla_1 W_i(x_0, x_i) = \frac{1}{(x_i + 1)(x_i + 2)}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant ce problème lorsque $N = 20$ et $A_i = 2^j$ avec $i = 5j + r$ et $r < 5$. Nous obtenons les résultats suivants pour diverses valeurs de M .

M	$B(M)$	$Z(M)$
10	10	26.38
20	11	18.37
30	11	13.41
40	14	10.83
50	14	8.931
60	16	7.603
70	16	6.606
80	18	5.797
90	18	5.203
100	20	4.686
110	20	4.277
120	20	3.924

Il est à remarquer que la borne $B(M)$ croît beaucoup moins vite que M , ainsi la recherche du x_0 optimal est restreinte de beaucoup. De plus, en enlevant la condition d'intégrité au problème (Q) lorsque $M = 120$ le minimum calculé est de 3.912 ce qui est près de la valeur 3.924 observée dans le tableau. En fait, la solution entière de ce problème est $x_i = 5$ pour tout i , $1 \leq i \leq 18$ et $x_{19} = x_{20} = 6$, tandis que la solution réelle est $x_i = v_j$ où j est défini comme ci-dessus, $v_1 = 4.722$, $v_2 = 4.862$, $v_3 = 5.132$ et $v_4 = 5.640$.

4. Appendice.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1: Supposons qu'il existe i, j tel que $\nabla_1 W_i(n_0, n_i^*) < \Delta_1 W_j(n_0, n_j^*)$. Alors,

$$\begin{aligned} W(n_0, n_1^*, \dots, n_i^* + 1, \dots, n_j^* - 1, \dots, n_k^*) \\ = W(n^*) + \nabla_1 W_i(n_0, n_i^*) - \Delta_1 W_j(n_0, n_j^*) < W(n^*). \end{aligned}$$

Ceci contredit les conditions d'optimalité et ainsi les conditions sont nécessaires. Maintenant, soit $\vec{n} = (n_1, \dots, n_k)$ satisfaisant aux deux conditions et $(n_1^*, \dots, n_k^*)$ une solution optimale de P_2 qui est à la plus petite distance K de $\vec{n}$ où

$$K = \sum_{i=1}^k |n_i - n_i^*|.$$

Supposons que $K \neq 0$. Alors il existe i, j avec $n_i^* \geq n_i + 1$ et $n_j^* \leq n_j - 1$. Par le théorème 4, on obtient

$$\begin{aligned} \nabla_1 W_i(n_0, n_i) &= \Delta_1 W_i(n_0, n_i + 1) \\ &\leq \Delta_1 W_i(n_0, n_i^*) \\ &\leq \nabla_1 W_j(n_0, n_j^*) \\ &= \Delta_1 W_j(n_0, n_j^* + 1) \\ &\leq \Delta_1 W_j(n_0, n_j). \end{aligned}$$

Ainsi par la condition 2 nous devons avoir $\nabla_1 W_i(n_0, n_i) = \Delta_1 W_j(n_0, n_j)$ et $\nabla_1 W_i(n_0, n_i^*) = \Delta_1 W_j(n_0, n_j^*)$. Maintenant définissons le vecteur $\vec{n}^{**} = (n_0, n_1^{**}, \dots, n_k^{**})$ où

$$n_k^{**} = \begin{cases} n_i^* - 1 & \text{si } k = i, \\ n_j^* + 1 & \text{si } k = j, \\ n_k^* & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\vec{n}^{**}$ est optimal avec

$$\sum_{i=1}^k |n_i - n_i^{**}| < K,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc $K = 0$ et la démonstration est terminée. $\square$

De plus, du théorème précédent, il est facile de construire un algorithme donnant la solution au problème P_2 (voir l'algorithme 2).

- 1) $t := 0$ et $n_i := 0$, pour tout $1 \leq i \leq k$.
- 2) Si $(t = M - n_0)$ alors stop.
- 3) Trouver i tel que $-\nabla_1 W_i(n_0, n_i) = \max -\nabla_1 W_l(n_0, n_l)$.
- 4) $n_i := n_i + 1$, $t := t + 1$; aller à 2.

Algorithme 2: Solution du problème P_2

BIBLIOGRAPHIE

1. Graves S., *A multi-echelon inventory model for a repairable item with one-for-one replenishment*, Management Science **31** (1985), 1247-1256.
2. Muckstadt J., *A model for a multi-item, multi-echelon, multi-indenture inventory system*, Management Sciences **20** (1973), 472-481.
3. ———, *Some approximation in multi-item, multi-echelon inventory systems for recoverable items*, Naval Research Logistic Quartely **25** (1978), 377-393.
4. Savoie J., "A useful integral form for solving exactly a two echelon inventory problem," Rapport interne, Collège militaire royal de St-Jean, 1989.
5. Sherbrooke C., *Metric: A multi-echelon technique for recoverable item control*, Operations Research **16** (1968), 122-141.
6. ———, *Vari-metric: improved approximations for multi-indenture, multi-echelon availability models*, Operations Research **34** (1985), 311-319.
7. Svoronos A., "A general framework for multi-echelon inventory and production control problems," Ph.D. Thesis, Columbia University, 1986.

J. Savoie
Département de Mathématiques
Collège militaire royal de Saint-Jean
Saint-Jean-sur-Richelieu
Québec, Canada
J0J 1R0