

UNE GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE DELSARTE DANS LES GRAPHE DE CAYLEY

ANDRÉ MONTPETIT

RÉSUMÉ. Delsarte a montré que si la matrice des distances d'un code additif Y a $s + 1$ lignes distinctes où s est le nombre de poids non nuls du dual de Y les translatés de Y forment un schéma d'association. On généralise ce résultat dans les graphes de Cayley pour les sous-groupes normaux en remplaçant la matrice des distances par la matrice des chemins.

ABSTRACT. Delsarte showed that if the distance matrix of an additive code Y has $s + 1$ distinct rows where s is the number of the nonzero weights of the dual of Y the cosets of Y give an association scheme. We generalize this result to the Cayley graphs for the normal subgroups by replacing the distance matrix by the path matrix.

1. Introduction. Soit Z un groupe abélien à q éléments. Sur le groupe Z^n on définit la *métrique de Hamming* comme suit: pour $x, y \in Z^n$ $d(x, y)$ est le nombre de composantes où x et y diffèrent. Le *poids* de x est le nombre $w(x)$ de composantes non nulles de x . Un *code* est une partie Y de Z^n munie de la métrique induite. Il est dit *additif* si Y est un sous-groupe. Dans ce cas $Y^\perp = \{y \in Z^n \mid \chi_y(x) = 1 \text{ pour tout } x \in Y\}$ est appelé le sous-groupe *dual* de Y où $y \mapsto \chi_y$ est un isomorphisme de Z^n vers son dual $(Z^n)^*$.

Considérons l'ensemble des relations $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_n\}$ définies par

$$(x, y) \in R_i \iff d(x, y) = i.$$

$\mathcal{R}$ a la propriété que $\text{card}\{z \in Z^n \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\} = p_{ij}^k$ ne dépend que de i, j et $k = d(x, y)$. $(Z^n, \mathcal{R})$ est donc un schéma d'association appelé *schéma de Hamming*. Puisque les relations sont définies en termes de la métrique de Hamming, le schéma est métrique ([5]) ce qui est équivalent à dire que $\Gamma = (Z^n, R_1)$ appelé *graphe de Hamming* est un graphe distance-régulier ([3]) c'est-à-dire qu'il existe des entiers a_i, b_i, c_i tels que

$$\text{card}\{z \mid d(x, z) = 1, d(z, y) = i\} = \begin{cases} a_i & \text{si } d(x, y) = i - 1; \\ b_i & \text{si } d(x, y) = i; \\ c_i & \text{si } d(x, y) = i + 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans [5], Delsarte introduit la *distance externe* s de Y qui est, si Y est un code additif, le nombre de poids non nuls de $Y^\perp$ et la matrice des distances de Y où la coordonnée en position (x, i) est le nombre $D_i(x)$ d'éléments de Y à distance i de x . Il obtient le théorème suivant.

Reçu le 22 septembre 1988 et, sous forme révisée, le 15 février 1990.

©Association mathématique du Québec

THÉORÈME 1 (DELSARTE [5]). Soit Y un code additif de Z^n de distance externe s . Si la matrice des distances de Y a $s + 1$ lignes distinctes, les translatés de Y forment un schéma d'association défini par

$$x + Y \sim y + Y \iff D_j(x) = D_j(y) \text{ quelque soit } j \leq n.$$

Le but de ce travail est de montrer que le théorème 1 est une conséquence d'un résultat général sur les graphes de Cayley. On remplace la matrice des distances par la matrice des chemins C_Y où la coordonnée en position (x, i) est le nombre de chemins de longueur i de x à Y .

Les résultats de cet article constituent une partie de la thèse de doctorat de l'auteur [6] écrite sous la direction de Bernard Courteau de l'Université de Sherbrooke et de Jacques Wolfmann de l'Université de Toulon et du Var.

2. Graphes de Cayley. Soit G un groupe fini de neutre ε et Ω une partie génératrice de G telle que

$$\varepsilon \notin \Omega; \quad x \in \Omega \implies x^{-1} \in \Omega. \quad (1)$$

Soit $\Gamma(G, \Omega)$ le *graphe de Cayley* où l'ensemble des sommets est G et $\{x, y\}$ est une arête si $y^{-1}x \in \Omega$. Si $G = Z^n$ et si $\Omega = \{x \in Z^n \mid w(x) = 1\}$, $\Gamma(G, \Omega)$ est le graphe de Hamming sur G .

Soit A la *matrice d'adjacence* de $\Gamma(G, \Omega)$

$$A(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y^{-1}x \in \Omega; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit N l'ensemble des valeurs propres de A . On a que $v \in N$ et $N \subset \mathbb{R}$ puisque en vertu de (1) la matrice A est symétrique. Posons $n = \text{card } N - 1$. L'algèbre $A(\Gamma(G, \Omega))$ engendrée par la matrice d'adjacence A de $\Gamma(G, \Omega)$ est semi-simple et de dimension $n + 1$. L'algèbre $A(\Gamma(G, \Omega))$ possède donc une base $\{J_\alpha \mid \alpha \in N\}$ formée des matrices de projection orthogonale sur les sous-espaces propres W_α de A . Notons m_α la dimension de W_α . On a

$$J_\alpha = \prod_{\beta \in N \setminus \{\alpha\}} \frac{A - \beta I}{\alpha - \beta}. \quad (2)$$

Remarquons que, pour toute matrice $B \in A(\Gamma(G, \Omega))$ et pour tout x, y et $z \in G$, $B(xy, xz) = B(y, z)$ c'est-à-dire que la multiplication à gauche par x est un automorphisme du graphe $\Gamma(G, \Omega)$.

Une partie Y non vide de G est un *code* dans le graphe $\Gamma(G, \Omega)$. Il est *e-correcteur* s'il n'y a pas de chemin de longueur inférieure à $2e + 1$ entre deux éléments de Y . Posons Φ_Y le vecteur caractéristique de Y défini par

$$\Phi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in Y; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le vecteur $b_Y = (b_Y(\alpha))_{\alpha \in N}$ est la *distribution duale* de Y si

$$b_Y(\alpha) = \frac{\text{card } G}{(\text{card } Y)^2} \Phi_Y^t J_\alpha \Phi_Y = \frac{\text{card } G}{(\text{card } Y)^2} \|J_\alpha \Phi_Y\|^2.$$

On vérifie les propriétés suivantes:

- (1) Pour tout $\alpha \in N$, $b_Y(\alpha)$ est un réel non négatif et $b_Y(v) = 1$.
- (2) $\sum_{\alpha \in N} b_Y(\alpha) = (\text{card } G)/(\text{card } Y)$.
- (3) Si Y est un sous-groupe de G , $b_Y(\alpha) = (\text{card } G / \text{card } Y) \sum_{x \in Y} J_\alpha(x, \varepsilon)$.

L'ensemble $S_Y = \{\alpha \in N \mid b_Y(\alpha) \neq 0\}$ est l'ensemble annulateur de Y . Posons $s = \text{card}(S_Y \setminus \{v\})$, comme s correspond à la distance externe définie par Delsarte, on l'appellera de même. Le polynôme annulateur de Y est le polynôme

$$q(z) = \prod_{\alpha \in S_Y} (z - \alpha) = \sum_{i=0}^{s+1} \beta_i z^i.$$

La matrice des chemins associée à Y est la matrice C_Y telle que, pour tout $x \in G$, $C_Y(x, i)$ est le nombre de chemins de longueur i entre x et les sommets dans Y . D'où $C_Y(x, i) = \sum_{y \in Y} A^i(x, y)$. On montre que le rang de C_Y est $s + 1$ et que les coefficients du polynôme annulateur de Y fournissent une récurrence sur les colonnes de C_Y ([4],[6]).

La partition $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ de G est cohérente si, pour tout $i, j \in \{0, 1, \dots, r\}$, pour tout $x \in X_j$, le nombre de $y \in X_i$ tels que $x^{-1}y \in \Omega$ est un nombre σ_{ij} ne dépendant que de i et j . La matrice $\sigma = (\sigma_{ij})$ est dite matrice associée à π . On remarque la relation suivante

$$(\text{card } X_j) \sigma_{ij} = (\text{card } X_i) \sigma_{ji}. \quad (3)$$

Un exemple de telle partition est l'ensemble des orbites pour l'action sur G d'un sous-groupe de $\text{Aut}(\Gamma(G, \Omega))$ le groupe des automorphismes du graphe $\Gamma(G, \Omega)$.

À toute partition cohérente on associe aussi la matrice M définie par

$$M(x, i) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in X_i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que

$$AM = M\sigma \quad (4)$$

$$M^t M = \text{diag}(\text{card } X_0, \text{card } X_1, \dots, \text{card } X_r) \quad (5)$$

$$\sigma u = \alpha u \iff AMu = \alpha Mu. \quad (6)$$

Le code Y admet la partition cohérente $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ s'il est réunion de classes X_i . L'ensemble des partitions cohérentes admises par Y muni de la relation " $\pi_1 \leq \pi_2 \iff \pi_1$ est plus fine que π_2 " possède un plus grand élément appelée partition modulo Y et notée π_Y . Parmi toutes les partitions cohérentes admises par Y π_Y est celle qui a le moins d'éléments.

PROPOSITION 2. Soit $Y \subseteq G$ et C_Y la matrice des chemins associée. Si Y admet la partition cohérente $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ de matrice associée σ alors

- (1) Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, r\}$, $x, y \in X_i$, $j \in \mathbb{N}$, $C_Y(x, j) = C_Y(y, j)$.
- (2) Les nombres $C_{ij}^* = C_Y(x, j)$ pour $x \in X_i$ satisfont à la récurrence linéaire

$$C_{ij}^* = \sum_{k=0}^r \sigma_{ki} C_{k,j-1}^*. \quad (7)$$

- (3) Le nombre de lignes distinctes de C_Y est au plus $r + 1$.
- (4) $s \leq r$.

La partition η_Y définie par la relation d'équivalence " $x \equiv y \iff C_Y(x, j) = C_Y(y, j)$ pour tout j " est appelée partition par les chemins relativement à Y . D'après la proposition 2, elle est moins fine que toute partition cohérente admise par Y . Dans [8], on montre le résultat suivant.

PROPOSITION 3. Soit $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ une partition cohérente de matrice associée σ alors l'ensemble des valeurs propres de σ est $\bigcup_{i=0}^r S_{X_i}$ où S_{X_i} est l'ensemble annulateur de X_i .

3. Partition cohérente admise par le neutre de G . Soit ε l'élément neutre du groupe G , $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ une partition cohérente de $\Gamma(G, \Omega)$ admise par $\{\varepsilon\}$, σ sa matrice associée et $C_{\{\varepsilon\}}$ la matrice des chemins associée à $\{\varepsilon\}$. On a que $S_{\{\varepsilon\}} = N$ car, pour tout $\alpha \in N$, $m_\alpha = \text{tr } J_\alpha = (\text{card } G)J_\alpha(\varepsilon, \varepsilon) = b_{\{\varepsilon\}}(\alpha)$. Donc N est l'ensemble des valeurs propres de σ par la proposition 3. Posons A_i définie par

$$A_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^{-1}y \in X_i; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8)$$

D'après la proposition 2, il existe, pour tout $i, j \in \{0, 1, \dots, r\}$ un entier k_{ij} tel que si $A_i(x, y) = 1$ alors

$$A^j(x, y) = A^j(y^{-1}x, \varepsilon) = C_{\{\varepsilon\}}(y^{-1}x, j) = k_{ij}$$

et donc

$$A^j = \sum_{i=0}^r k_{ij} A_i.$$

D'où $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ engendre un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}(G, G)$ contenant $A(\Gamma(G, \Omega))$. En particulier $r \geq n$ où $n = \text{card } N - 1$.

Il arrive que le sous-espace engendré par $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ soit $A(\Gamma(G, \Omega))$. Par exemple, pour $\Gamma(\mathbb{Z}_6, \{2, 3, 4\})$, la partition modulo $\{0\}$ est

$$\pi_{\{0\}} = \{\{0\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$$

et les matrices A_i sont alors

$$\begin{aligned} A_0 &= I, & A_1 &= \frac{1}{5}(A^3 + A^2 - 7A - 6I), \\ A_2 &= -\frac{1}{5}(A^3 - 3A^2 - 41A + 3I), & A_3 &= \frac{1}{5}(2A^3 - 3A^2 - 9A + 3I). \end{aligned}$$

De même, si $\Gamma(G, \Omega)$ est distance-régulier, alors $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ où $X_i = \{x \mid d(\varepsilon, x) = i\}$ est une partition cohérente. Sa matrice associée est

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

et

$$A_i(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } d(x, y) = i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les matrices $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ forment une base de $A(\Gamma(G, \Omega))$ si et seulement si le graphe est distance-régulier ([9]).

Cependant, il se peut aussi que $A(\Gamma(G, \Omega))$ soit un sous-espace propre de l'espace engendré par les matrices A_i pour toutes les partitions cohérentes admises par $\{\varepsilon\}$. Par exemple, si on considère $\Gamma(\mathbb{Z}_{12}, \{1, 2, 6, 10, 11\})$, la partition modulo $\{0\}$ est

$$\pi_{\{0\}} = \{\{0\}, \{1, 11\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{6\}\}.$$

Donc toute partition cohérente admise par $\{0\}$ a au moins 7 classes. Comme l'ensemble des matrices A_i est linéairement indépendant, il engendre un espace de dimension au moins 7 alors que $\dim(A(\Gamma(\mathbb{Z}_{12}, \{1, 2, 6, 10, 11\}))) = 6$ puisque A a 6 valeurs propres distinctes 5, $\sqrt{3}$, 1, -1 , $-\sqrt{3}$, -3 . Notons que 1 est toujours valeur propre de la matrice σ de multiplicité au moins 2.

PROPOSITION 4. Soit $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ une partition cohérente du graphe $\Gamma(G, \Omega)$ admise par $\{\varepsilon\}$ et soit σ sa matrice associée. Les énoncés suivants sont équivalents

- (1) $r = n$.
- (2) $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ est une base de $A(\Gamma(G, \Omega))$.
- (3) Les valeurs propres de σ sont simples.
- (4) La matrice $C_{\{\varepsilon\}}$ a $n + 1$ lignes distinctes.

Si ces énoncés sont vérifiés, alors

- (5) $\pi = \pi_{\{\varepsilon\}} = \eta_{\{\varepsilon\}}$
- (6) le groupe G muni des relations définies par

$$x \sim y \iff C_{\{\varepsilon\}}(x, j) = C_{\{\varepsilon\}}(y, j) \text{ quelque soit } j \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

est un schéma d'association à n classes.

DÉMONSTRATION: (1 $\Rightarrow$ 2) $A(\Gamma(G, \Omega))$ est un sous-espace de dimension n de l'espace engendré par $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$. Comme $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ est indépendant et que $r = n$, $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ est une base de $A(\Gamma(G, \Omega))$. (2 $\Rightarrow$ 3) La matrice σ est une matrice $r \times r$ ayant n valeurs propres distinctes. Comme $r = n$ toutes les valeurs propres de σ sont simples. (3 $\Rightarrow$ 4) Le nombre de lignes distinctes de $C_{\{\varepsilon\}}$ est au plus $r + 1$, d'après la proposition 2, et au moins $s + 1$ puisque le rang de $C_{\{\varepsilon\}}$ est $s + 1$. Comme $r = n$ par l'énoncé 3 et que $s = n$ par un argument plus haut, le résultat découle. (4 $\Rightarrow$ 1) Comme le nombre de lignes distinctes est $n + 1$, on a, d'après la proposition 2, $r \leq n$. D'autre part $r \geq n$ puisque $A(\Gamma(G, \Omega))$ est un sous-espace de dimension n de l'espace engendré par $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ qui est de dimension r .

Si ces énoncés sont vérifiés, on a que la partition π est la partition par les chemins $\eta_{\{\varepsilon\}}$ car elle sont comparables et ont le même nombre de classes. Puisque $\eta_{\{\varepsilon\}}$ est cohérente, $\eta_{\{\varepsilon\}} = \pi_{\{\varepsilon\}}$. De plus, les matrices A_i sont les matrices d'adjacence d'un schéma d'association sur G par le théorème 2.1 de [5] puisqu'elles engendrent une algèbre commutative formée de matrices symétriques. Comme $\pi = \eta_{\{\varepsilon\}}$, il existe un i tel que $A_i(x, y) = 1 \iff C_{\{\varepsilon\}}(x, j) = C_{\{\varepsilon\}}(y, j)$ quelque soit $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Tout comme dans [7],

$$\sigma_{ij} = \sum_{X_l \subseteq \Omega} p_{lj}^i$$

où les p_{lj}^i sont les nombres d'intersection de ce schéma d'association c'est-à-dire

$$p_{lj}^i = \text{card}\{z \in G \mid x^{-1}z \in X_l, z^{-1}y \in X_j\} \quad x^{-1}y \in X_i.$$

Il n'est pas nécessaire que les énoncés (1)–(4) de la proposition 4 soient satisfaits pour que les conclusions (5)–(6) soient vérifiés: considérons le graphe $\Gamma(\mathbb{Z}_{12}, \{1, 2, 6, 10, 11\})$ on a

$$\eta_{\{0\}} = \pi_{\{0\}} = \{\{0\}, \{1, 11\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{6\}\}.$$

De plus, l'ensemble $\{A_0, A_1, \dots, A_6\}$ engendre une algèbre commutative formée de matrices symétriques. C'est donc une base de l'algèbre de Bose-Mesner d'un schéma d'association ([5, théorème 2.1]) qui sera aussi défini par l'équation (9).

REMARQUE. Beezer [1] a défini les graphes orbites-polynômiaux qui sont reliés de près aux graphes pour lesquels les énoncés de la proposition 4 sont vérifiés. Soit $\Gamma = (X, E)$ un graphe. Soit $\{C_0, C_1, \dots, C_r\}$ la partition de $X \times X$ en orbites pour l'action de $\text{Aut}(\Gamma)$. Soit $\{B_0, B_1, \dots, B_r\}$ les matrices définies par

$$B_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in C_i; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un graphe est *orbite-polynômial* si $\{B_0, B_1, \dots, B_r\}$ est une base de $A(\Gamma)$. Dans le cas où $\Gamma = \Gamma(G, \Omega)$ est un graphe de Cayley

$$(x, y) \equiv (z, t) \iff (y^{-1}x, \varepsilon) \equiv (t^{-1}z, \varepsilon)$$

Donc $y^{-1}x$ et $t^{-1}z$ sont dans la même orbite X_i pour l'action sur G du stabilisateur de ε dans $\text{Aut}(\Gamma(G, \Omega))$. Alors les matrices B_i sont les matrices A_i définies par l'équation (8) puisque $\{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ est une partition cohérente. Les graphes orbites-polynômiaux sont donc, si on se restreint aux graphes de Cayley, les graphes pour lesquels les énoncés de la proposition 4 sont vérifiés et, en plus, la partition $\pi_{\{\varepsilon\}}$ est fournie par les orbites du stabilisateur de $\{\varepsilon\}$ dans $\text{Aut}(\Gamma(G, \Omega))$. Beezer ([1]) a caractérisé le cas où le degré du graphe est 3. Il a montré ([2]), de plus, que si $\text{card } G = p$ avec p un nombre premier alors $\Gamma(G, \Omega)$ est orbite-polynômial. Peut-on trouver un graphe de Cayley $\Gamma(G, \Omega)$ tel que les énoncés de la proposition 4 soient vérifiés sans que le graphe soit orbite-polynômial?

4. Partition cohérente admise par un sous-groupe normal de G . Pour pouvoir généraliser le théorème 1, nous allons maintenant remplacer $\{\varepsilon\}$ dans la section précédente par un sous-groupe normal H de G et utiliser le groupe G/H dans la proposition 4. Soit xH le translaté de H contenant x .

PROPOSITION 5. Soit H un sous-groupe normal de G . Les éléments du groupe quotient G/H sont les classes d'une partition cohérente de $\Gamma(G, \Omega)$.

Si σ_H est la matrice associée à la partition G/H , elle est symétrique d'après l'équation (3) et du fait que toutes les classes de la partition ont même cardinalité. De plus, la ligne d'indice xH de la matrice σ_H associée à G/H est obtenue de celle d'indice H par la permutation de G/H $yH \mapsto xyH$. Tous les éléments de la diagonale de σ_H sont égaux à $\text{card}(H \cap \Omega)$.

Le graphe de Cayley $\Gamma(G/H, \Omega_H)$ où $\Omega_H = \{xH \mid x \in \Omega \setminus H\}$ s'obtient aussi par $\{xH, yH\} \in E \iff xH \neq yH, \sigma_H(xH, yH) \neq 0$. Supposons que la matrice σ_H engendre l'algèbre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$. Ce qui est vrai, en particulier, si le sous-groupe H est 1-correcteur, car alors $A^* = \sigma_H$ où A^* est la matrice d'adjacence de $\Gamma(G/H, \Omega_H)$. En effet, supposons que $\sigma_H(xH, yH) \neq 0$ et que $y_1, y_2 \in \{y' \in yH \mid x^{-1}y' \in \Omega\}$ alors il existe $h_1, h_2 \in H$ tels que $y_1 = yh_1$ et $y_2 = yh_2$ alors

$$h_1^{-1}h_2 = h_1^{-1}y^{-1}yh_2 = y_1^{-1}y_2 = y_1^{-1}xx^{-1}y_2 = (x^{-1}y_1)^{-1}(x^{-1}y_2)$$

comme $(x^{-1}y_1)^{-1}, (x^{-1}y_2) \in \Omega$ il y a un chemin dans $\Gamma(G, \Omega)$ de longueur 2 entre h_1 et h_2 . Puisque H est 1-correcteur, $h_1 = h_2$ et donc $y_1 = y_2$. Donc $\sigma_H(xH, yH) = 1$.

Si σ_H engendre l'algèbre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$, elle a, parmi toutes les matrices de cette algèbre, le nombre maximal de valeurs propres distinctes et il existe une bijection ψ entre les valeurs propres de σ_H et de A^* telle que les espaces propres associés à α et $\psi(\alpha)$ soient identiques.

PROPOSITION 6. *Soit H un sous-groupe normal de G . Supposons que la matrice σ_H engendre l'algèbre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$. Alors, pour tout $\alpha \in N$, $b_H(\alpha)$ est la multiplicité de α comme valeur propre de la matrice σ_H . La dimension de $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$ est $s + 1$ où s est la distance externe de H .*

DÉMONSTRATION: Il existe une matrice M telle que $AM = M\sigma_H$. D'après l'équation (5) $\sigma_H = (\text{card } H)^{-1} M^t A M$ et, par induction, $\sigma_H^i = (\text{card } H)^{-1} M^t A^i M$ quelque soit $i \in \mathbb{N}$. Comme σ_H engendre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$

$$A(\Gamma(G, \Omega)) \mapsto A(\Gamma(G/H, \Omega_H)) : Q \mapsto M^t Q M$$

est une transformation linéaire bien définie et surjective. Donc $M^t J_\alpha M \in A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$ pour tout $\alpha \in N$. Pour tout β valeur propre de A^* , soit J_β^* la matrice de projection sur l'espace propre de A^* associé à β . Soit $\alpha \in N$ et u un vecteur propre de σ_H . Si $\sigma_H u = \alpha u$ alors

$$\begin{aligned} (M^t J_\alpha M)u &= M^t M u = (\text{card } H)u. \\ J_{\psi(\alpha)}^* u &= u. \end{aligned}$$

Si $\sigma_H u = \beta u$, $\alpha \neq \beta$ alors $(M^t J_\alpha M)u = 0 = J_{\psi(\alpha)}^* u$. On a donc l'égalité

$$M^t J_\alpha M = (\text{card } H) J_{\psi(\alpha)}^*.$$

Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$, $r = \text{card } G/H$, pour tout $\alpha \in N$, on a

$$\begin{aligned} M^t J_\alpha M(i, i) &= \sum_{x, y \in G} M(x, i) J_\alpha(x, y) M(y, i) \\ &= \sum_{x, y \in zH} J_\alpha(x, y) \quad \text{pour un certain } z \in G \\ &= \sum_{x, y \in H} J_\alpha(x, y) = \frac{(\text{card } H)^2}{(\text{card } G)} b_H(\alpha). \end{aligned}$$

D'où

$$(\text{card } H) b_H(\alpha) = \text{tr}(M^t J_\alpha M) = (\text{card } H) \text{tr}(J_{\psi(\alpha)}^*) = (\text{card } H) m_{\psi(\alpha)}^*$$

où $m_{\psi(\alpha)}^*$ est la multiplicité de $\psi(\alpha)$ comme valeur propre de A^* c'est-à-dire la multiplicité de α comme valeur propre de σ_H . Donc $b_H(\alpha) = m_{\psi(\alpha)}^*$ et $s + 1$ est le nombre de valeurs propres distinctes de σ_H qui est le degré du polynôme minimal de σ_H . On en déduit que la dimension de l'algèbre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$ est $s + 1$ puisque par hypothèse σ_H engendre cette algèbre. $\square$

COROLLAIRE 7. Soit H, K deux sous-groupes normaux de G tels que $H \subset K$. Supposons que les matrices associées aux partitions G/H et G/K engendrent les algèbres $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$ et $A(\Gamma(G/K, \Omega_K))$ respectivement. Alors, pour tout $\alpha \in N$, $b_H(\alpha) \geq b_K(\alpha)$.

PROPOSITION 8. Soit $Y \subseteq G/H$ et $Y' = \bigcup_{xH \in Y} xH$. Soit $b_{Y'}$ la distribution duale de Y' dans $\Gamma(G, \Omega)$ et b_Y la distribution duale de Y dans $\Gamma(G/H, \Omega_H)$. Si σ_H engendre l'algèbre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$, pour tout $\alpha \in S_H$, $b_{Y'}(\alpha) = b_Y(\psi(\alpha))$.

DÉMONSTRATION:

$$\begin{aligned} b_Y(\psi(\alpha)) &= \frac{\text{card } G/H}{(\text{card } Y)^2} \sum_{xH, yH \in Y} J_{\psi(\alpha)}^*(xH, yH) \\ &= \frac{(\text{card } G/H)}{(\text{card } Y)^2} \sum_{xH, yH \in Y} (\text{card } H)^{-1} M^t J_\alpha M(xH, yH) \\ &= \frac{\text{card } G}{(\text{card } Y')^2} \sum_{xH, yH \in Y} \sum_{\substack{x' \in xH \\ y' \in yH}} J_\alpha(x', y') = \frac{\text{card } G}{(\text{card } Y')^2} \sum_{x', y' \in Y'} J_\alpha(x', y') = b_{Y'}(\alpha). \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSITION 9. Soit H un sous-groupe normal de G , C_H la matrice des chemins de $\Gamma(G, \Omega)$ associée à H et $C_{\{H\}}$ la matrice des chemins de $\Gamma(G/H, \Omega_H)$ associée à $\{H\}$. Si σ_H engendre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$ alors le nombre de lignes distinctes de C_H et de $C_{\{H\}}$ est le même.

DÉMONSTRATION: Il existe a_{ij} , $0 \leq i \leq s$, $j \in \mathbb{N}$ tels que

$$(A^*)^j = \sum_{i=0}^s a_{ij} \sigma_H^i = (\text{card } H)^{-1} M^t \left(\sum_{i=0}^s a_{ij} A^i \right) M.$$

D'où

$$\begin{aligned} C_{\{H\}}(xH, j) &= (A^*)^j(xH, H) = \sum_{i=0}^s a_{ij} \sigma_H^i(xH, H) = (\text{card } H)^{-1} \sum_{\substack{h \in H \\ u \in \sigma_H H}} \sum_{i=0}^s a_{ij} A^i(z, h) \\ &= (\text{card } H)^{-1} \sum_{h_1, h_2 \in H} \sum_{i=0}^s a_{ij} A^i(h_1, xh_2) = (\text{card } H)^{-1} \sum_{h_1, h_2 \in H} \sum_{i=0}^s a_{ij} A^i(h_1 h_2^{-1}, x) \\ &= \sum_{h \in H} \sum_{i=0}^s a_{ij} A^i(h, x) = \sum_{i=0}^s a_{ij} C_H(x, i) \end{aligned}$$

Si on se restreint aux $s+1$ premières colonnes de $C_{\{H\}}$, la matrice (a_{ij}) est inversible. Le vecteur $(C_{\{H\}}(xH, i))_{0 \leq i \leq s}$ est déterminé par $(C_H(x, i))_{0 \leq i \leq s}$ et inversement. Comme les $s+1$ premières colonnes de ces deux matrices sont des bases de leurs espaces colonnes on a le résultat. $\square$

Soit $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ une partition cohérente de $\Gamma(G, \Omega)$ admise par H moins fine que G/H , σ sa matrice associée et $C_{\{H\}}$ la matrice des chemins de $\Gamma(G/H, \Omega_H)$ associée à $\{H\}$. Posons A_i la matrice définie par

$$A_i(xH, yH) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x^{-1}y)H \subset X_i; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En identifiant le sous-ensemble xH de G et élément xH de G/H , la partition π peut être assimilée à une partition cohérente de $\Gamma(G/H, \Omega_H)$ admise par $\{H\}$. Les matrices A_i sont celles définies à l'équation (8) pour cette partition et $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ engendre un sous-espace vectoriel de $C(G/H, G/H)$ qui contient l'algèbre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$. En regroupant les propositions 4, 5, 6 et 9 on obtient le théorème suivant qui est le but de cet article.

THÉORÈME 10. Soit H un sous-groupe normal de G tel que l'algèbre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$ soit engendrée par σ_H . Soit $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ une partition cohérente admise par H moins fine que G/H et soit σ sa matrice associée. Les énoncés suivants sont équivalents

- (1) $r = s$.
- (2) $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ est une base de $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$.
- (3) Les valeurs propres de σ sont simples.
- (4) La matrice $C_{\{H\}}$ a $s + 1$ lignes distinctes.
- (5) La matrice C_H a $s + 1$ lignes distinctes.

Si ces énoncés sont vérifiés, alors

- (6) $\pi = \pi_H = \eta_H$
- (7) le groupe G/H muni des relations définies par

$$xH \sim yH \iff C_H(x, j) = C_H(y, j) \text{ quelque soit } j \in \mathbb{N}.$$

est un schéma d'association à s classes.

Si $\Gamma(G, \Omega)$ est distance-régulier, Camion et al [4] ont montré que l'espace-colonne de la matrice des chemins associée à H est égal à l'espace-colonne de la matrice des distances de H et donc

$$C_H(x, j) = C_H(y, j) \text{ quelque soit } j \in \mathbb{N} \iff D_j(x) = D_j(y) \text{ quelque soit } j \leq n.$$

On obtient donc le théorème 1 comme corollaire du théorème 10.

COROLLAIRE 11. Soit $\Gamma(G, \Omega)$ un graphe distance-régulier et soit H est un sous-groupe normal de G tel que σ_H engendre $A(\Gamma(G/H, \Omega_H))$. Si la matrice des distances de H a $s + 1$ lignes distinctes alors les translatés de H forment un schéma d'association défini par

$$xH \sim yH \iff D_j(x) = D_j(y) \text{ quelque soit } j \leq n.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Beezer R.A., *Trivalent Orbit Polynomial Graphs*, Linear Algebra and Appl. **73** (1986), 133-146.
2. ———, *Orbit Polynomial Graphs of Prime Order*, Discrete Math. **67** (1987), 139-149.
3. Biggs N., "Algebraic Graph Theory," Cambridge Tracts in Mathematics, **67**, Cambridge Univ. Press, Londres/New York, 1974.
4. Camion P., Courteau B. et Delsarte P., *On r -Partition Designs in Hamming Spaces*, Rapport de Recherche INRIA **626** (1987).
5. Delsarte P., *An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973).
6. Montpetit A., "Codes dans les graphes réguliers," Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, 1987.
7. ———, *Determination of the P-Matrix of the Coset Scheme of an Uniform Additive Code*, (soumis à Discrete Math.).
8. ———, *Codes et partitions cohérentes dans les graphes réguliers*, Ann. sc. math. Québec **14** (1990), 183-191.

9. Weichsel P.M., *On Distance-Regularity in Graphs*, J. Comb. Theory, Series B **32** (1982), 156-161.

A. Montpetit

Département de Mathématiques et d'Informatique

Université du Québec à Montréal

Montréal, Québec, H3C 3P8

Département de Mathématiques et d'Informatique

Université de Sherbrooke

Sherbrooke, Québec, J1K 2R1