

INTÉGRALES DE SELBERG ET APPLICATIONS

LAURENT HABSIEGER

RÉSUMÉ. Nous donnons deux nouvelles applications de l'intégrale de Selberg. La première permet de calculer élémentairement les diamètres généralisés et transfinis d'un segment et d'un cercle dans le plan complexe. La deuxième permet de retrouver une expression classique pour les polynômes de Jacobi à partir d'une formule générale pour les polynômes orthogonaux.

ABSTRACT. We give two new applications of Selberg's integral. Firstly, we compute elementarily the generalized and transfinite diameters of a segment and a circle in the complex plane. Secondly we establish the connection between a general formula for orthogonal polynomials and an explicit expression for the Jacobi polynomials.

1. Intégrales de Selberg. Notons $V_n(t) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)$ le déterminant de Vander-Monde à n variables et posons $W_{n,x,y}(t) = \prod_{i=1}^n t_i^{x-1} (1-t_i)^{y-1}$. En 1944, Selberg [S] a calculé l'intégrale suivante qui fournit une généralisation à plusieurs variables de la fonction bêta:

$$I_n(x, y, z) = \int_{[0,1]^n} |V_n(t)|^{2z} W_{n,x,y}(t) dt = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(x+jz)\Gamma(y+jz)\Gamma((j+1)z+1)}{\Gamma(x+y+(n+j-1)z)\Gamma(z+1)}, \quad (1)$$

où dt désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^n$. En 1985, Aomoto [Ao] donna une nouvelle démonstration de (1) et montra que, pour $m \leq n$, on a:

$$\begin{aligned} I_{n,m}(x, y, z) &= \int_{[0,1]^n} t_1 \dots t_m |V_n(t)|^{2z} W_{n,x,y}(t) dt \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(x+(n-i)z+\chi(i \leq m))\Gamma(y+(n-i)z)\Gamma(iz+1)}{\Gamma(x+y+(2n+i-1)z+\chi(i \leq m))\Gamma(z+1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

où $\chi(A) = 1$ si A est vraie et $\chi(A) = 0$ sinon.

L'intégrale de Selberg possède un champ d'applications très étendu. Elle fut utilisée en statistiques par Bombieri et Selberg pour prouver une conjecture de Mehta [Me], en physique statistique [M-D], en analyse asymptotique [C-R, Re1, Re2], en équations différentielles [De1, De2], en analyse statistique [A-B-J], en combinatoire pour démontrer certains cas particuliers des conjectures de Macdonald [Ma, Mo, K1, K2, H1, H2, H3, Z]. De nombreuses extensions ont été proposées [As, Ra, E1, E2]; certaines sont reliées aux polynômes zonaux [F-K, Gi, T, Ri] ou polynômes de Jack [K2]. Nous nous proposons de donner ici deux nouvelles conséquences de (1) et (2), en théorie du potentiel et en théorie des polynômes orthogonaux. Premièrement nous utiliserons (1) pour calculer directement les diamètres généralisés et transfinis d'un segment et d'un cercle dans le plan complexe. Deuxièmement, nous utiliserons (2) pour retrouver une formule explicite pour les polynômes de Jacobi à partir d'une formule générale pour les polynômes orthogonaux.

Reçu le 17 août 1990.

2. Applications en théorie du potentiel. Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons (cf. [C] p. 37) le diamètre généralisé de K par:

$$d_n(K) = \sup_{z_1, \dots, z_n \in K} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \right)^{\frac{1}{\binom{n}{2}}}. \quad (3)$$

On définit aussi, [C], p. 37 et [L], p. 169, le diamètre transfini de K par

$$d_\infty(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(K). \quad (4)$$

On peut montrer que le diamètre transfini de K coïncide avec sa capacité logarithmique. On remarque aussi que les caractères isométrique et homothétique des formules (3) et (4) permettent de ramener le calcul des diamètres généralisés et transfinis d'un segment et d'un cercle quelconques du plan complexe au même calcul pour le segment $I = [0, 1]$ et le cercle C de centre 0 et de rayon 1.

THÉORÈME 1. *On a les formules exactes suivantes:*

$$d_n(I) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{j^{2j}(j+1)^{j+1}}{(n+j-1)^{n+j-1}} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}}, \quad (5)$$

$$d_\infty(I) = \frac{1}{4}, \quad (6)$$

$$d_n(C) = n^{\frac{1}{n-1}}, \quad (7)$$

$$d_\infty(C) = 1. \quad (8)$$

DÉMONSTRATION: On peut interpréter le diamètre généralisé de K comme le maximum d'une fonction définie sur K^n . Plus précisément, définissons sur K^n la fonction $f(z)$ par

$$f(z) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \right)^{\frac{1}{\binom{n}{2}}},$$

de sorte que $d_n(K) = \|f\|_\infty$. Or il est bien connu, [Ru] p. 73, que:

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p. \quad (9)$$

Ainsi on se ramène au calcul des intégrales multiples $\|f\|_p$.

PREMIER CAS: $K = I$. On a alors, avec les notations introduites ci-dessus:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{\frac{p}{\binom{n}{2}}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(I_n(1, 1, \frac{p}{n(n-1)}) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1 + \frac{jp}{n(n-1)})^2 \Gamma(1 + \frac{(j+1)p}{n(n-1)})}{\Gamma(2 + \frac{(n+j-1)p}{n(n-1)}) \Gamma(1 + \frac{p}{n(n-1)})} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

en utilisant (1). Comme la formule de Stirling nous donne l'équivalence $\Gamma(s+1)^{1/s} \sim s/e$ lorsque s tend vers l'infini, nous avons donc, lorsque p tend vers l'infini:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\sim \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{jp}{n(n-1)e}\right)^{\frac{2j}{n(n-1)}} \left(\frac{(j+1)p}{n(n-1)e}\right)^{\frac{j+1}{n(n-1)}}}{\left(\frac{(n+j-1)p}{n(n-1)e}\right)^{\frac{n+j-1}{n(n-1)}} \left(\frac{p}{n(n-1)e}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}} \\ &\sim \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{j^{2j}(j+1)^{j+1}}{(n+j-1)^{n+j-1}} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi (5), grâce à (9). On en déduit aussi que:

$$\begin{aligned} \log(d_n(I)) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} [2j \log(j) + (j+1) \log(j+1) - (n+j-1) \log(n+j-1)] \\ &= \frac{\log(n!)}{n(n-1)} + \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{2j}{n} \log\left(\frac{j}{n}\right) + \frac{j}{n} \log\left(\frac{j+1}{n}\right) - \left(1 + \frac{j-1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{j-1}{n}\right) \right], \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log(d_n(I)) &= 0 + \int_0^1 (2x \log(x) + x \log(x) - (1+x) \log(1+x)) dx \\ &= 3 \left(\frac{x^2}{2} \log(x) - \frac{x^2-1}{4} \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^2}{2} \log(x) - \frac{x^2-1}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= -2 \log(2). \end{aligned}$$

On trouve ainsi $d_\infty(I) = \frac{1}{4}$.

DEUXIÈME CAS: $K = C$. Suivant la méthode et les notations précédentes on a:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{2\pi i \theta_j} - e^{2\pi i \theta_k}|^{\frac{p}{\binom{n}{2}}} d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or $|e^{2\pi i \alpha} - e^{2\pi i \beta}|^2 = (1 - e^{2\pi i(\alpha-\beta)})(1 - e^{2\pi i(\beta-\alpha)})$ nous donne:

$$\|f\|_{2p\binom{n}{2}} = \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{1 \leq j \neq k \leq n} (1 - e^{2\pi i(\theta_j - \theta_k)})^p d\theta \right)^{\frac{1}{2p\binom{n}{2}}}$$

pour p entier. Interprétons maintenant $\int_0^1 \varphi(e^{2\pi i \theta}) d\theta$ comme le terme constant CT_φ d'un polynôme de Laurent $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Ceci nous permet d'écrire:

$$\|f\|_{pn(n-1)} = \left(\text{CT} \prod_{1 \leq j \neq k \leq n} \left(1 - \frac{x_j}{x_k}\right)^p \right)^{\frac{1}{2p\binom{n}{2}}}.$$

Généralisons analytiquement la notion d'intégrale aux polynômes de Laurent en convenant que $\int_0^1 t^{m-1} dt = \frac{1}{m}$ pour $m \in \mathbb{C}^*$. Avec ces notations on vérifie que $\text{CT}_\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^1 t^{\varepsilon-1} \varphi(t) dt$, pour tout polynôme de Laurent φ . Ainsi on a:

$$\begin{aligned} \text{CT} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^p &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^n t_i^{\varepsilon-1} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \left(1 - \frac{t_i}{t_j}\right)^p dt \\ &= (-1)^{p \binom{n}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^n t_i^{\varepsilon-(n-1)p-1} V_n(t)^{2p} dt \\ &= (-1)^{p \binom{n}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n I_n(\varepsilon - (n-1)p, 1, p) \\ &= (-1)^{p \binom{n}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\varepsilon - (n-1-j)p) \Gamma(1+jp) \Gamma((j+1)p+1)}{\Gamma(1+jp) \Gamma(p+1)}, \end{aligned}$$

car la formule (1) s'étend analytiquement à des valeurs complexes de x . Comme on sait que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \Gamma(\varepsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc:

$$\text{CT} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^p = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{((j+1)p)!}{(jp)!p!} = \frac{(pn)!}{p!^n}.$$

Cette dernière formule est un cas particulier de la conjecture de Dyson [Dy] démontrée par Good [Go]:

$$\text{CT} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i} = \frac{(a_1 + \cdots + a_n)!}{a_1! \cdots a_n!}.$$

Toutefois notre preuve ne s'étend pas pour démontrer la conjecture de Dyson car on ne connaît pas de généralisation utilisable de l'intégrale de Selberg.

On a donc prouvé que

$$\|f\|_{p^{n(n-1)}} = \left(\frac{(pn)!}{p!^n} \right)^{\frac{1}{pn(n-1)}}.$$

En utilisant à nouveau la formule de Stirling pour p tendant vers l'infini on trouve $\|f\|_\infty = n^{\frac{1}{n-1}}$. La formule (7) est donc valide et la formule (8) s'en déduit trivialement. $\square$

3. Application aux polynômes orthogonaux. Soit C une forme linéaire sur l'espace des polynômes à coefficients complexes, définie par ses moments $C_n = C(X^n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & \cdots & C_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_n = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

On sait (cf. [Sz], p. 25-27) que si D_n est non nul pour tout n , il existe une unique suite orthonormale de polynômes $\{P_n(X)\}_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par les formules

$$P_n(X) = (D_n D_{n-1})^{-\frac{1}{2}} D_n(X), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

De plus, en utilisant (10) et en y interprétant les C_i comme des moments, on a

$$D_n(X) = \frac{1}{n!} C \left(\prod_{i=1}^n (X - x_i) V_n^2(x) \right), \quad (12)$$

où on a étendu C par linéarité à $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ en convenant que $C(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}) = C_{\alpha_1} \dots C_{\alpha_n}$.

Plaçons-nous maintenant dans le cadre particulier où C est définie par

$$C(f) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 f(x) x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx. \quad (13)$$

On vérifie sans peine à l'aide de (13) et de la formule d'Euler pour la fonction bêta, que les moments sont donnés par la formule

$$C_n = \frac{(\alpha)_n}{(\alpha + \beta)_n},$$

où on a utilisé la notation de Pochhammer $(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$. On sait aussi que les polynômes de Jacobi $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille de polynômes orthogonaux pour C . On rappelle une définition des polynômes de Jacobi:

$$P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{X^{1-\alpha}(1-X)^{1-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dX^n} [X^{n+\alpha-1}(1-X)^{n+\beta-1}]. \quad (14)$$

On peut alors se demander quelles relations existent entre les polynômes $P_n(X)$, $V_n(X)$ et $P_n^{(\alpha, \beta)}(X)$. La réponse est fournie par le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Les formules suivantes sont valides:*

$$D_n(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{(\alpha)_{n-i}(\beta)_{n-i}!}{(\alpha + \beta)_{2n-i}} P_n^{(\alpha, \beta)}(X), \quad (15)$$

$$D_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_j(\beta)_j j!}{(\alpha + \beta)_{n+j-1}}, \quad (16)$$

$$P_n(X) = (-1)^n n! \frac{(\alpha + \beta)_{n-1}}{(\alpha + \beta)_{2n-1}} \left((n-1)! \frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha + \beta)_{n-2}}{(\alpha + \beta)_{2n-2}(\alpha + \beta)_{2n-3}} \right)^{\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}(X). \quad (17)$$

DÉMONSTRATION: En développant $\prod_{i=1}^n (X - x_i)$ dans (12) et en utilisant (13) on trouve pour $D_n(X)$ la représentation intégrale suivante:

$$\begin{aligned} D_n(X) &= \sum_{k=0}^n X^k \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \binom{n}{k} \left[\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right]^n \int_0^1 \dots \int_0^1 x_1 \dots x_{n-k} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} V_n^2(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n X^k \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \left[\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right]^n I_{n, n-k}(\alpha, \beta, 1). \end{aligned}$$

Utilisons maintenant (2) pour calculer $I_{n,n-k}(\alpha, \beta, 1)$:

$$\begin{aligned}
 D_n(X) &= \sum_{k=0}^n X^k \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + n + i + \chi(i \leq n-k))\Gamma(\beta + n - i)\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n - i - 1 + \chi(i \leq n-k))\Gamma(2)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\
 &= (-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{(\alpha)_{n-i}(\beta)_{n-i}i!}{(\alpha + \beta)_{2n-i}} \sum_{k=0}^n \frac{(-X)^k}{k!(n-k)!} \prod_{i=n-k+1}^n (\alpha + \beta + 2n - i - 1) \prod_{i=1}^{n-k} (\alpha + n - i).
 \end{aligned}$$

Il reste donc à prouver que la somme écrite ci-dessus coïncide avec les polynômes de Jacobi tels que définis par (14). Développons (14) suivant la formule de Leibniz:

$$\begin{aligned}
 P_n^{(\alpha, \beta)}(X) &= \frac{X^{1-\alpha}(1-X)^{1-\beta}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \binom{n+\alpha-1}{n-k} (n-k)! \\
 &\quad \times \binom{n+\beta-1}{k} k! X^{k+\alpha-1} (1-X)^{n+\beta-1+k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha-1}{n-k} \binom{n+\beta-1}{k} (-X)^k (1-X)^{n-k} \\
 &= \text{CT } t^{-n} (1+t(1-X))^{n+\alpha-1} (1-tX)^{n+\beta-1} \\
 &= \text{CT } t^{-n} (t+1-tX)^{n+\alpha-1} (1-tX)^{n+\beta-1} \\
 &= \text{CT } t^{-n} \sum_{k \geq 0} \binom{n+\alpha-1}{k} t^k (1-tX)^{2n+\alpha+\beta-2-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha-1}{n-k} \binom{n+k+\alpha+\beta-2}{k} (-X)^k.
 \end{aligned}$$

Cette dernière expression de $P_n^{(\alpha, \beta)}(X)$ est bien celle recherchée, ce qui prouve (15). D'après (10), D_{n-1} représente le coefficient de X^n dans $D_n(X)$. En utilisant (15) et la dernière expression de $P_n^{(\alpha, \beta)}(X)$ on trouve:

$$\begin{aligned}
 D_n &= (-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{(\alpha)_{n-i}(\beta)_{n-i}i!}{(\alpha + \beta)_{2n-i}} (-1)^n \binom{2n+\alpha+\beta-2}{n} \\
 &= \prod_{j=0}^{n-1} n \frac{(\alpha)_j(\beta)_j j!}{(\alpha + \beta)_{n+j}} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha + \beta + n + j - 1),
 \end{aligned}$$

ce qui donne (16). La formule (17) se déduit alors aisément de (15), (16) et (11). $\square$

On remarque que (17) fournit la constante de normalisation des polynômes de Jacobi.

BIBLIOGRAPHIE

- [A-B-J] Andersson S.A., Brøns W. et Jensen S.T., *Distribution of eigenvalues in multivariate statistical analysis*, Ann. Statist. **11** (1983), 392–415.
- [Ao] Aomoto K., *Jacobi polynomials associated with Selberg integrals*, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), 545–549.
- [As] Askey R., *Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews*, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), 938–951.
- [C] Carleson L., "Selected problems on exceptional sets," Van Nostrand Mathematical Studies #13, Van Nostrand Company, Inc., 1967.
- [C-R] Cohen P. et Regev A., *Asymptotics of combinatorial sums and the central limit theorem*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 1204–1215.
- [De1] Debiard A., *Système différentiel hypergéométrique de type BC_p* , C.R. Acad. Sc. Paris, série 1, **13 304** (1987), 363–366.
- [De2] ———, *Partie radiale des opérateurs invariants des espaces symétriques de type BC_p : intégrale première d'un hamiltonien à symétrie BC_p* , C.R. Acad. Sc. Paris, série 1, **14 304** (1987), 79–80.
- [Dy] Dyson F.J., *Statistical theory of the energy levels of complex systems I*, J. Math. Phys. **3** (1962), 140–156.
- [E1] Evans R.J., *Identities for products of Gauss sums over finite fields*, L'Enseignement Mathématique **27** (1981), 197–209.
- [E2] ———, *Character sums analogs of constant term identities for root systems*, Israël J. Math. **46** (1983), 189–196.
- [F-R] Faraut J. et Koranyi A., *Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains*, CUNY (1987).
- [Gi] Gindikin S.G., *Analysis on homogeneous domains*, Uspehi Mat. Nauk. **19** (1965), 3–92. (en russe); Russian Math. Surveys, **19** (1964), pp. 1–90 (en anglais).
- [Go] Good I.J., *Short proof of a conjecture of Dyson*, J. Math. Phys. **11** (1970), 1884.
- [H1] Habsieger L., *Une q -conjecture d'Askey*, C.R. Acad. Sc. Paris, série 1, **17 302** (1986), 615–618.
- [H2] ———, *La q -conjecture de Macdonald-Morris pour G_2* , C.R. Acad. Sc. Paris, série 1, **6 303** (1986), 211–214.
- [H3] ———, *Une q -intégrale de Selberg-Askey*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 1475–1489.
- [K1] Kadell K.W.J., *A proof of Askey's conjectured q -analog of Selberg's integral and a conjecture of Morris*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 969–986.
- [K2] ———, *The Selberg-Jack symmetric functions*, prépublication.
- [L] Landkof N.S., "Foundations of modern potential theory," Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 180, Springer-Verlag, 1972.
- [Ma] Macdonald I., *Some conjectures for root systems*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 988–1007.
- [Me] Mehta M.L., "Random matrices and statistical theory of Energy levels," Academic Press, New York, 1967.
- [M-D] Mehta M.L. et Dyson F.J., *Statistical theory of the energy levels of complex systems V*, J. Math. Phys. **4** (1963), 713–719.
- [Mo] Morris W., "Constant term identities for finite and affine root systems, conjectures and theorems," Ph.D. Thesis, Univ. of Wisconsin, Madison, Wisconsin, 1982.
- [Ra] Rahman M., *Another conjectured q -Selberg integral*, SIAM J. Math. Anal. **17** (1986), 1267–1279.
- [Re1] Regev A., *Asymptotic values for degrees associated with Young diagrams*, Adv. Math. **41** (1981), 115–136.
- [Re2] ———, *Combinatorial sum, identities and trace identities of the 2×2 matrices*, Adv. Math. **46** (1982), 30–240.
- [Ri] Richards D.St.P., "Analogues and extensions of Selberg's integral," IMA Volumes in Mathematics and its applications **18**, q -series and partitions, Springer-Verlag, pp. 109–137.
- [Ru] Rudin W., "Real and complex Analysis," 2nd edition, TMH edition, 1974.
- [S] Selberg A., *Bemærkninger om et multiplikt integral*, Norsk. Mat. Tidsskr. **26** (1944), 81–94.
- [Sz] Szegő G., "Orthogonal Polynomials," AMS Colloquium Publications vol XXIII, AMS, Providence, Rhode Island, 1939.
- [T] Takeuchi, *Polynomial representations associated with symmetric bounded domains*, Osaka J. Math. **10** (1973), 441–475.

- [Z] Zeilberger D., *A proof of the G_2 case of Macdonald's root system-Dyson conjecture*, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), 987–1033.

L. Habsieger
Centre de Recherche en Math. de Bordeaux
(URA CNRS no. 226) Université de Bordeaux 1
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
France