

LA FORMULE DE LERAY-SCHAUDER POUR L'INDICE D'UNE FONCTION MULTIVOQUE CONTINUËMENT DIFFÉRENTIABLE

GILLES FOURNIER ET DONALD VIOLETTE

RÉSUMÉ. Ce travail a pour but de démontrer la formule de Leray-Schauder pour le calcul de l'indice de point fixe en un point fixe isolé d'une fonction multivoque continûment différentiable. Toutefois, certaines conditions s'ajoutent à celles qui sont nécessaires pour le cas univoque: la stricte convexité de l'espace; la convexité de l'image de la fonction et des images de la différentielle au point fixe isolé.

ABSTRACT. The point of this work is to prove the Leray-Schauder formula giving the fixed point index of an isolated fixed point of a multivalued continuously differentiable map. Unfortunately, some conditions are added to those needed for the singlevalued case: the strict convexity of the space; the convexity of the image of the map and of the images of the differential at the isolated fixed point.

0. Introduction. Dans [5] les auteurs ont donné une définition d'application multivoque différentiable, différente de celles déjà considérées dans le passé [1, 2, 7, 10]. Nous y avons montré un théorème de la moyenne et, encore mieux, un théorème du reste pour ces fonctions différentiables. De plus ces fonctions continûment différentiables, si elles possèdent une décomposition acyclique et sont soit compactes, soit compactifiantes ou soit possèdent une itérée condensante, satisfont les conditions pour l'existence de l'indice de point fixe défini en [4].

Dans ce travail nous obtiendrons, pour ces applications, la formule de Leray-Schauder [8] pour le calcul de l'indice en un point fixe isolé, d'une fonction continûment différentiable. Toutefois, en plus d'une petite variation de la condition habituelle (que la différentielle au point fixe ne possède pas la valeur propre 1), nous devons exiger pour le cas multivoque la convexité de l'image de la fonction en x ainsi que des images de la différentielle en x . De plus, l'espace de Banach devra être strictement convexe.

1. Notation et préliminaires. Soient E et F deux espaces de Banach réels. Dans cet article, toutes les fonctions multivoques $T: E \rightarrow F$ sont telles que $T(x)$ est compact, $\forall x \in E$. On dit que T est *semi-continue supérieurement* (s.c.s.) dans E si pour tout ouvert V dans F , l'ensemble $T^{-1}(V) = \{x \in E \mid T(x) \subset V\}$ soit une partie ouverte de E . On dit que T est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) dans E si pour tout ouvert V dans F , l'ensemble $\{x \in E \mid T(x) \cap V \neq \emptyset\}$ est une partie ouverte de E . Si T est à la fois s.c.s. et s.c.i. dans E , alors elle est *continue* dans E .

Reçu le 30 mars 1989 et, sous forme révisée, le 3 avril 1990.

Ce travail fut appuyé financièrement par des subventions du CRSNG Canada, du F.C.A.R. Québec et du Conseil de la faculté des études supérieures et de la recherche de l'Université de Moncton.

©Association mathématique du Québec

PROPOSITION 1.1. Si $T: E \rightarrow F$ est s.c.s., l'image $T(K) = \bigcup_{x \in K} T(x)$ d'un compact K de E est aussi un ensemble compact.

DÉMONSTRATION: Voir [6]. $\square$

Soient $T: E \rightarrow F$ et $T': F \rightarrow F'$ deux fonctions multivoques s.c.s., la composée $T' \circ T$ est s.c.s.. Notons $T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}}$ la $n^{\text{ième}}$ itérée de $T: E \rightarrow E$. Un point $x \in E$ est appelé

un *point fixe* de T si $x \in T(x)$. Une fonction s.c.s. $T: E \rightarrow F$ est *acyclique* si pour chaque $x \in X$, $T(x)$ est *acyclique* par rapport au foncteur homologie de Čech H à coefficients rationnels, c'est-à-dire que $T(x)$ est non vide, $H_0(T(x)) \approx \mathbb{Q}$ et $H_q(T(x)) = 0$ quel que soit $q \geq 1$.

Une fonction $T: E \rightarrow F$ est dite *homogène* si $T(cx) = cT(x)$ quelque soit $x \in E$ et $c \in \mathbb{R}$. T est dite *demi-linéaire* positive si $T(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \subset \sum_{i=1}^n t_i T(x_i)$ quel que soit $x_i \in E$, $t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n t_i \leq 1$. Dans ce cas, $T(0) = 0$ et $T(\text{co } A) \subset \text{co } T(A)$ où $\text{co } A$ est l'enveloppe convexe de $A \subset E$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est une *valeur propre* de T s'il existe $x \in E$ (un vecteur propre associé à λ) tel que $\lambda x \in T(x)$. Soit $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble de toutes les parties fermées non-vides de E . Notons d_H la métrique de Hausdorff sur $\mathcal{F}(E)$. Nous écrivons $\|A\|$ au lieu de $d_H(A, 0) = \sup\{\|a\|: a \in A\}$. Nous avons les propriétés suivantes. Soient A, B, C, A_i et B_i des parties fermées et bornées de E .

$$(1.2) \quad d_H(tA, tB) = |t| d_H(A, B) = |t| d_H(A + C, B + C) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$$(1.3) \quad \text{Si } d_H(A_i, B_i) \leq \varepsilon \text{ quel que soit } i = 1, \dots, n, \text{ alors } d_H(\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i=1}^n B_i) \leq \varepsilon.$$

$$(1.4) \quad N_\varepsilon(\text{co } A_1) = \text{co } N_\varepsilon(A_1), \text{ quelque soit } \varepsilon > 0.$$

Mentionnons que dans cet article, nous utiliserons la notation $A \underset{\varepsilon}{\sim} B$ (A égale B à ε près) pour signifier que $d_H(A, B) \leq \varepsilon$.

Pour chaque $A \subset X$, la *mesure de non-compacité* $\gamma(A)$ de A (due à Kuratowski) est le nombre

$$\gamma(A) = \inf\{r > 0 \mid \text{il existe un recouvrement fini de } A \text{ par des parties dont le diamètre est inférieur ou égal à } r\}.$$

Pour les propriétés suivantes, on peut consulter [8].

$$(1.5) \quad 0 \leq \gamma(A) \leq \delta(A) \text{ où } \delta(A) \text{ est le diamètre de } A.$$

$$(1.6) \quad \text{Si } A \subset B \subset X, \text{ alors } \gamma(A) \leq \gamma(B).$$

$$(1.7) \quad \gamma(A \cup B) = \max\{\gamma(A), \gamma(B)\}, \gamma(A + B) \leq \gamma(A) + \gamma(B) \text{ et } \gamma(N_\varepsilon(A)) \leq \gamma(A) + 2\varepsilon.$$

$$(1.8) \quad \gamma(\text{co } A) = \gamma(A).$$

$$(1.9) \quad \gamma(A) = 0 \text{ si et seulement si } A \text{ est relativement compact.}$$

$$(1.10) \quad \text{Si } K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots \text{ où } K_n \text{ est fermé quel que soit } n \text{ et si } \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(K_n) = 0, \text{ alors } K_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty K_n \text{ est compact et pour chaque voisinage } V \text{ de } K_\infty, \text{ il existe un entier } n_V \text{ tel que } K_n \subset V \text{ quel que soit } n \geq n_V.$$

DÉFINITION 1.11. Une fonction multivoque s.c.s. $T: X \rightarrow X$, où X est un espace de Hausdorff, est *condensante* s'il existe $r < 1$ tel que $\gamma(T(A)) \leq r\gamma(A)$ quel que soit A une partie bornée de X . Si U est une partie ouverte de X , alors $T: U \rightarrow X$ est à *itérée condensante* s'il existe un entier n tel que $T^n: T^{-n+1}(X) \rightarrow X$ soit condensante.

DÉFINITION 1.12. Une *sélection* G d'une fonction multivoque $F: X \rightarrow Y$ est une fonction multivoque $G: X \rightarrow Y$ tel que $\forall x \in X$ on a $G(x) \subset F(x)$.

2. L'indice de point fixe pour les composées de fonctions multivoques acycliques dans des espaces de Banach. Les résultats de cette section ont été démontrés dans [4] en utilisant les résultats de Sieberg-Skordev [12] et en suivant des méthodes semblables à celles utilisées par Nussbaum [11].

Soit $f = (F_n, \dots, F_0)$ une suite de fonctions acycliques $F_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ où chaque X_i est un espace de Hausdorff quel que soit $i = 0, \dots, n$ et $X_0 = U$ est une partie ouverte de $X_{n+1} = X$. On dit que f est *admissible* si $\text{Fixe}(F) = \{x \in U \mid x \in F(x)\}$, où $F = F_n \circ \dots \circ F_0: U \rightarrow X$, est une partie compacte de U . La suite f est appelée une *décomposition acyclique* de F .

Soit CF la classe des réunions $X = \bigcup \{C_j \mid j \in J\}$ localement finies de convexes fermés C_j d'un espace de Banach E et soit CF_0 la sous classe de CF pour laquelle J est fini. Nous pouvons maintenant définir notre classe de fonctions dans des espaces de Banach pour lesquelles l'indice de point fixe est défini.

DÉFINITION 2.1. Une suite admissible de fonctions acycliques $F = (F_n, \dots, F_0)$ est *compactifiante* si et seulement s'il existe un ensemble ouvert W et une suite $\{K_n\}_{n \geq 1} \subset CF_0$ tels que

- (2.1.1) $\text{Fixe}(F) \subset W \subset \overline{W} \subset U$ où $F = F_n \circ \dots \circ F_0: U \rightarrow X$ et $X \in CF$;
- (2.1.2) $W \subset K_1 \subset X$;
- (2.1.3) $F(W \cap K_n) \subset K_{n+1} \subset K_n$ quel que soit $n \geq 1$;
- (2.1.4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(K_n) = 0$.

Il est clair que si $g = (G_n, \dots, G_0)$ et $G = G_n \circ \dots \circ G_0$ est une sélection de F , alors g est compactifiante si f l'est. Le prochain théorème est dû à R.D. Nussbaum [11] pour le cas univoque et à G. Skordev [13] pour les fonctions compactes.

THÉORÈME 2.2. Soit $f = (F_n, \dots, F_0)$ une suite compactifiante. Alors l'indice de point fixe de f , $\text{ind}(U, f, X)$, est défini.

Notons que cet indice est défini pour la suite f et non pour la fonction F . En effet, si $f' = (F'_n, \dots, F'_0)$ est une suite admissible et $F' = F'_n \circ \dots \circ F'_0 = F$, nous pouvons avoir $\text{ind}(U, f, X) \neq \text{ind}(U, f', X)$. Ainsi F peut avoir deux décompositions acycliques différentes avec indices différents. En revanche, nous avons la propriété suivante:

- (2.3) $\text{ind}(U, f, X) = \text{ind}(U, (F_n, \dots, F_{i+1}, F_i \circ F_{i-1}, \dots, F_0), X)$ si $F_i \circ F_{i-1}$ est une fonction acyclique. La démonstration de ce résultat est similaire à celle du lemme 3.8 dans [12].

L'indice a les propriétés suivantes:

- (2.4) (*Additivité*). Soit $U = U_1 \cup U_2$ où U_1, U_2 sont des parties ouvertes de U , tel que $\text{Fixe}(F) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, alors $\text{ind}(U, f, X) = \text{ind}(U_1, f, X) + \text{ind}(U_2, f, X)$.
- (2.5) (*Propriété du point fixe*). Si $\text{ind}(U, f, X) \neq 0$, alors $\text{Fixe}(F) \neq \emptyset$.
- (2.6) (*Excision*). Soit U_1 une partie ouverte de U telle que $\text{Fixe}(F) \subset U_1$, alors $\text{ind}(U, f, X) = \text{ind}(U_1, f, X)$.
- (2.7) (*Homotopie*). Soit $h = (H_n, \dots, H_0)$ une suite de fonctions acycliques $H_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ où $X_0 = U$ est une partie ouverte de $X \times I$ et $X_{n+1} = X \in F$. Si $\bar{h} = (\bar{H}_n, \dots, \bar{H}_0)$ est compactifiante, alors $\text{ind}(U, \bar{h}, X \times I) = \text{ind}(U, h, X)$ quel que soit $t \in I$, où $\bar{H}_0: U \rightarrow X_1 \times I$ est définie par $\bar{H}_0(x, t) = (H_0(x, t), t)$, $\bar{H}_i: X_i \times I \rightarrow X_{i+1} \times I$ est définie par $\bar{H}_i(x, t) = (H_i(x, t), t)$, $U_t = \{x \in X \mid (x, t) \in U\}$ et $h_t = (H_n, \dots, H_1, H_0)_t$.
- (2.8) (*Commutativité*). Soient $f = (F_n, \dots, F_0)$ et $g = (G_n, \dots, G_0)$ deux suites de fonctions acycliques telles que $F = F_n \circ \dots \circ F_0: U \rightarrow Y$ et $G = G_n \circ \dots \circ G_0: V \rightarrow X$

où U est une partie ouverte de $X \in CF$ et V est une partie ouverte de $Y \in CF$.

Supposons que pour tout $x \in U$ et pour tout $y \in V$,

(2.8.1) si $y \in F(x)$, $x \in G(y)$ et ($x \in F^{-1}(V)$ ou $y \in G^{-1}(U)$), alors $y \in G^{-1}(U)$ et $x \in F^{-1}(V)$.

Alors $\text{Fixe}(G \circ F|_{F^{-1}(V)})$ est compact si et seulement si $\text{Fixe}(F \circ G|_{G^{-1}(U)})$ l'est.

Si l'un est compact et s'il existe une partie ouverte U_1 de U , V_1 une partie ouverte de V et une suite $\{K_n\}_{n \geq 1} \subset F_0$ telles que

(2.8.2) $G(\text{Fixe}(F \circ G|_{G^{-1}(U)}) \subset U_1 \subset K_1 \subset X$ et $F(\text{Fixe}(G \circ F|_{F^{-1}(V)}) \subset V_1 \subset K_2 \subset Y$;

(2.8.3) $F(U_1 \cap K_{2n+1}) \subset K_{2n+2} \subset K_{2n} \subset Y$ quel que soit $n \geq 0$ où $K_0 = Y$ et $G(V_1 \cap K_{2n}) \subset K_{2n+1} \subset K_{2n-1} \subset X$ quel que soit $n \geq 1$;

(2.8.4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(K_n) = 0$;

alors, $\text{ind}(F^{-1}(V), gf, X) = \text{ind}(G^{-1}(U), fg, Y)$.

(2.9) (*Modulo-p*). Soit p un nombre premier et soit $f = (F_n, \dots, F_0)$ une suite compactifiante. Soit V un ouvert tel que $V \subset F^{-p+1}(U)$ où $F = F_n \circ \dots \circ F_0$ et tel que

(2.9.1) si $y \in F^i(x)$, $x \in F^{p-i}(y)$, $i = 1, \dots, p-1$ et $x \in V$, alors $y \in V$.

Supposons $\text{Fixe}(F^p|_V)$ compact et $F^{p-1}(\text{Fixe}(F^p|_V)) \subset W$. Alors $\text{ind}(V, f, X) \equiv \text{ind}(V, f^p, X) \pmod{p}$.

Remarquez que dans les deux dernières propriétés, nous avons employé les notations suivantes: $fg = (F_n, \dots, F_0, G_m, \dots, G_0)$ où $f = (F_n, \dots, F_0)$ et $g = (G_m, \dots, G_0)$; $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_p$ et $F = (F)$ si F est acyclique, en particulier si F est univoque. De plus, la

condition (2.8.1) est automatiquement satisfaite si F est univoque et $G(V) \subset U$, ou si F et G sont univoques.

Avant de donner la propriété de normalité, nous allons rappeler la définition et les propriétés du nombre de Lefschetz d'une composée de fonctions acycliques ainsi que le concept d'attracteur compact. Nous utilisons l'homologie de Čech à support compact et à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels telle que définie par Gorniewicz [6] que nous noterons également H .

Soit $f = (F_n, \dots, F_0)$ une suite de fonctions acycliques $F_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ où chaque X_i est un espace de Hausdorff quel que soit $i = 0, \dots, n$ et $X_0 = X_{n+1} = X$. On définit $H(f): H(X) \rightarrow H(X)$ par $H(f) = f_* = F_{n*} \circ \dots \circ F_{0*}$ où chaque $F_{i*} = q_{i*} \circ p_{i*}^{-1}: H(X_i) \rightarrow H(X_{i+1})$ est l'homomorphisme induit par F_i , $i = 0, \dots, n$ avec $q_i: \Gamma(F_i) \rightarrow X_{i+1}$ et $p_i: \Gamma(F_i) \rightarrow X_i$ les projections naturelles du graphe $\Gamma(F_i)$ de F_i . Ceci est possible car p_{i*} est inversible puisqu'elle est Vietoris.

Notons $N(f_{*q}) = \{a \in H_q(X) \mid \text{il existe } n > 0 \text{ tel que } f_{*q}^n(a) = 0\}$ et $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)/N(f_{*q})$. Comme $f_{*q}^{-1}(N(f_{*q})) = N(f_{*q})$ alors f_{*q} induit un endomorphisme $\tilde{f}_{*q}: \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X)$. La trace généralisée de f_{*q} , notée Tr , est définie par $\text{Tr}(f_{*q}) = \text{tr}(\tilde{f}_{*q})$ si $\tilde{H}_q(X)$ est de dimension finie. Remarquons que si $H_q(X)$ est de dimension finie, $\text{Tr}(f_{*q}) = \text{tr}(f_{*q})$. Finalement si tous les $\tilde{H}_q(X)$ sont de dimension finie et si $\tilde{H}_q(X) \neq 0$ pour un nombre fini d'entre eux, alors le nombre de Lefschetz généralisé $\Lambda(f)$ de f est défini par

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= \Lambda(f_*: H(X) \rightarrow H(X)) \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \text{Tr}(f_{*q}: H_q(X) \rightarrow H_q(X)). \end{aligned}$$

Si f est homotope à g au sens de (2.7) avec $U = X$, alors $\Lambda(f) = \Lambda(g)$. De plus, si $f = hg$, alors en vertu de la commutativité de la trace généralisée on a que $\Lambda(f) = \Lambda(gh)$.

DÉFINITION 2.10. Soit une fonction multivoque $F: X \rightarrow X$ où X est un espace de Hausdorff. Un ensemble $A \subset X$ est *stable* par F si $F(A) \subset A$. Une partie compacte non vide $M \subset X$ est appelée un *attracteur compact* pour F si M est stable par F et si pour chaque partie compacte K de X et pour chaque voisinage ouvert V de M , il existe un entier n_K tel que $F^n(K) \subset V$ quel que soit $n \geq n_K$.

2.11 (*Normalité*). Soit $f = (F_n, \dots, F_0)$ une suite compactifiante. Supposons que $F(U) \subset U$ et que $F = F_n \circ \dots \circ F_0: U \rightarrow U$ possède un attracteur compact M tel que $M \subset W$. Alors $\text{ind}(U, f, U) = \Lambda(f_U)$, où $f_U = (G_n, \dots, G_0)$ et où $G_0: U \rightarrow (F_n \circ \dots \circ F_1)^{-1}(U)$, $G_i: (F_n \circ \dots \circ F_i)^{-1}(U) \rightarrow (F_n \circ \dots \circ F_{i+1})^{-1}(U)$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$ et $G_n: F_n^{-1}(U) \rightarrow U$, sont les contractions correspondantes des F_i , pour $i = 0, \dots, n$.

2.12 (*Théorème de Lefschetz*). Soit $f = (F_n, \dots, F_0)$ une suite compactifiante. Supposons que $F(U) \subset U$ et que $F = F_n \circ \dots \circ F_0: U \rightarrow U$ possède un attracteur compact M tel que $M \subset W$. Alors $\Lambda(f_U)$ est défini et $\Lambda(f_U) \neq 0$ implique que F a un point fixe dans U .

3. Fonctions multivoques différentiables. Les résultats de cette section ont été démontrés dans [5]. Soient E, F des espaces de Banach réels et U une partie ouverte de E .

DÉFINITION 3.1. Soit $T: U \rightarrow F$ une fonction multivoque. Supposons $T(x)$ compact quel que soit $x \in U$. T est *différentiable* au point $x \in U$ s'il existe une fonction multivoque s.c.s.

$$\begin{aligned} S_x: T(x) \times E &\rightarrow F \\ (z, h) &\mapsto S_x(z, h) \end{aligned}$$

telle que la fonction $S_{x,z}: E \rightarrow F$, définie par $S_{x,z}(h) = S_x(z, h)$, soit s.c.s., homogène et demi-linéaire positive et telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, x) > 0$ tel que si $\|h\| < \delta$, alors

$$T(x+h) \cap \bigcup_{z \in T(x)} (z + S_x(z, h)) \neq \emptyset.$$

La fonction S_x est appelée une *différentielle* de T au point x . Si T est différentiable en tout point de U , on dit que T est *différentiable* dans U . Notons que l'on a pas nécessairement l'unicité de la différentielle en un point.

Soient $T, L: E \rightarrow F$ deux fonctions multivoques s.c.s. et homogènes. Posons $d(T, L) = \sup_{\|h\|=1} d_H(T(h), L(h))$, alors d est une métrique sur l'espace des fonctions multivoques s.c.s. et homogènes de E dans F .

DÉFINITION 3.2. Soit $T: U \rightarrow F$ une fonction multivoque différentiable dans U . On dit que T est *continûment différentiable* dans U s'il existe une fonction $(x, z) \mapsto S_{x,z}$ telle que S_x est une différentielle de T en x et la fonction est continue dans l'ensemble $\bigcup_{x \in U} \{x \times T(x)\}$, c'est-à-dire que quels que soient $x \in U$ et $z \in T(x)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x - y\| < \delta$ et $\|z - z'\| < \delta$ impliquent $d(S_{x,z}, S_{y,z'}) < \varepsilon$ pour tout $y \in U$ et pour tout $z' \in T(y)$.

Les fonctions multivoques différentiables possèdent les propriétés suivantes.

- (3.3) Soit $T: U \rightarrow F$ une fonction multivoque différentiable au point $x \in U$. Alors il existe $\delta > 0$ et il existe $k > 0$ tel que $\|S_x(z, h)\| \leq k\|h\|$ pour $\|h\| < \delta$ et pour tout $z \in T(x)$.
- (3.4) Si $T: U \rightarrow F$ est une fonction multivoque différentiable au point $x \in U$, alors elle est continue en ce point.

Soit $T: U \rightarrow F$ une fonction multivoque, soit $x \in U$ et soit $S: T(x) \times E \rightarrow F$ une fonction homogène. Posons

$$\|S\| = \inf\{k > 0 \mid \|S(z, h)\| \leq k\|h\|, z \in T(x), h \in E\},$$

(voir (3.3)), alors

$$\|S\| = \sup_{z \in T(x)} \sup_{\|h\|=1} \|S(z, h)\|$$

et ainsi

$$\|S(z, h)\| \leq \|S\| \|h\|, \quad \forall h \in E.$$

Nous allons énoncer maintenant un théorème de la moyenne et un théorème du reste.

THÉORÈME 3.5 (*Théorème de la moyenne*). Soit $T: U \rightarrow F$ une fonction multivoque différentiable dans $J = \text{co}(x, x+h) \subset U$ où x et $x+h$ sont deux points de E . Alors

$$T(x+h) \widetilde{\|h\|_{k'}} T(x)$$

où $k' = \sup_{y \in J} \|S_y\|$.

THÉORÈME 3.6 (*Théorème du reste*). Soit $T: U \rightarrow F$ une fonction multivoque différentiable dans $J = \text{co}(x, x+h) \subset U$ où x et $x+h$ sont deux points de E . Alors

$$T(x+h) \widetilde{\|h\|_{k_{x,h}}} \bigcup_{z \in T(x)} (z + S_x(z, h))$$

où $k_{x,h} = \inf_{r>0} k_{x,h,r}$ avec

$$k_{x,h,r} = \sup_{(y,z,z') \in A_{J,r}} d(S_{x,z'}, S_{y,z'}),$$

$$A_{J,r} = \{(y, z, z') \mid z \in T(x), z' \in T(y), y \in J, \|z - z'\| < (k_J + r)\|h\|\}$$

et $k_J = \sup_{y \in J} \|S_y\|$.

COROLLAIRE 3.7. Soit $T: U \rightarrow F$ une fonction multivoque continûment différentiable dans U et soit $x_0 \in U$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s > 0$ tel que si $N_{2s}(x_0) \subset U$, alors $k_{x,h} < \varepsilon$ pour $\|h\| < s$ et pour tout $x \in N_s(x_0)$.

PROPOSITION 3.8. Soit $T: U \rightarrow F$ une fonction multivoque continûment différentiable dans U avec $S_{x,z}$ comme différentielle continue et soit K une partie compacte de U . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ et il existe un voisinage ouvert V de K tel que

$$T(x+h) \widetilde{\varepsilon\|h\|} \bigcup_{z \in T(x)} (z + S_x(z, h))$$

pour $\|h\| < \alpha$ et pour tout $x \in V$.

4. Le théorème de point fixe. Dans cette section, nous verrons que notre classe de fonctions multivoques continûment différentiables et à itérée condensante a un indice de point fixe tel que défini dans la section 2.

THÉORÈME 4.1. Soit $g = (G_n, \dots, G_0)$ une suite admissible de fonctions acycliques $G_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ où chaque X_i est un espace de Hausdorff et $X_0 = U$ est une partie ouverte de $X_{n+1} = X \in \text{CF}$. Si $G = G_n \circ \dots \circ G_0: U \rightarrow X$ est une sélection de $F: U \rightarrow X$ où F est continûment différentiable dans U et est à itérée condensante, alors g est compactifiante et ainsi $\text{ind}(U, g, X)$ est défini. De plus, pour tout compact K stable par F tel que $\text{Fixe}(F) \subset K \subset U$, on peut choisir W et $\{K_n\}_{n \geq 1}$ satisfaisant aux conditions de (2.1) avec $K \subset W$.

THÉORÈME 4.2 (Théorème de Lefschetz). Soit $g = (G_n, \dots, G_0)$ une suite de fonctions acycliques $G_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ où chaque X_i est Hausdorff et $X = X_0 = X_{n+1}$ est une partie ouverte d'un élément de CF. Si $G = G_n \circ \dots \circ G_0: X \rightarrow X$ est une sélection de $F: X \rightarrow X$ où F est continûment différentiable dans X et est à itérée condensante, alors $\Lambda(g)$ est défini et $\Lambda(g) \neq 0$ implique que G possède un point fixe.

THÉORÈME 4.3. Si dans (4.2), l'espace X est une partie acyclique (en particulier un convexe) d'un espace de Banach, alors G a un point fixe.

5. Le résultat principal. Nous aurons besoin du résultat suivant pour prouver le résultat principal de cet article.

PROPOSITION 5.1. Soit $F: U \rightarrow X$ une application multivoque continûment différentiable dans U et à itérée condensante avec $S_{x,z}$ satisfaisant à la condition qui rend F continûment différentiable dans U . Alors la fonction $S_{x,x}$ est à itérée condensante.

DÉMONSTRATION: Puisque F est à itérée condensante, alors il existe un entier positif m tel que $\gamma(F^m) < 1$. Comme F est continûment différentiable, alors la fonction $x \mapsto \|S_x\|$ est continue et donc $k = \sup_{x \in K} \|S_x\| + 1$ existe car $K = \bigcup_{i=1}^n F^i(x)$ est compact grâce à la compacité de l'ensemble $F(x)$ et à la proposition 1.1. L'ensemble $U' = \{x \in U \mid \|S_x\| < k\}$ est un ouvert contenant K car si $x \in K$, $\|S_x\| < k$ d'où $x \in U'$. Comme F est différentiable dans U , alors elle l'est en $x \in U$ et donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|h\| < \delta$, alors

$$F(x+h) \widetilde{\varepsilon \|h\|} \bigcup_{z \in F(x)} (z + S_{x,z}(h))$$

et par suite

$$x + S_{x,x}(h) \subset \bigcup_{z \in F(x)} (z + S_{x,z}(h)) \subset N_{\varepsilon \|h\|}(F(x+h)).$$

Puisque K est compact, $d = d(K, X \setminus U') > 0$ et $N_d(K)$ est un voisinage de K tel que $N_d(K) \subset U'$ et $k \geq \sup_{x \in N_d(K)} \|S_x\|$. De plus, comme F^n est s.c.s., il existe $0 < \delta' < \delta$ tel que $n\varepsilon \|h\| k^{n-1} < \frac{d}{2}$, $2m\varepsilon k^{m-1} < 1 - \gamma(F^m)$ et $F^n(x+h) \subset N_{d/2}(F^n(x))$ quel que soit $n \leq m$ dès que $\|h\| < \delta'$. Notons $S_{x,x}(h) = S(h)$. Montrons par récurrence finie sur n que

$$x + S^n(h) \subset N_{n\varepsilon \|h\| k^{n-1}}(F^n(x+h))$$

dès que $\|h\| < \delta'$. Le cas $n=1$ est déjà fait. Supposons le résultat vrai pour n et montrons-le pour $n+1$.

En vertu du théorème de la moyenne, $F(x + S^n(h)) \subset N_{n\varepsilon \|h\| k^n}(F^{n+1}(x+h))$: en effet, si $b \in x + S^n(h)$, alors par l'hypothèse de récurrence, il existe $a \in F^n(x+h)$ tel que $\|a-b\| < n\varepsilon \|h\| k^{n-1}$ d'où $a \in N_{d/2}(F^n(x))$ et $J = \text{co}(a, b) \subset N_d(F^n(x)) \subset U'$ et ainsi

$F(b) \subset N_{n\varepsilon\|h\|k^n}(F(a))$. Si $h' \in S^n(h)$, alors $\|h'\| \leq \|S^n(h)\| \leq \|S\|^n\|h\| \leq k^n\|h\|$ et on a déjà $F(x + h') \subset N_{n\varepsilon\|h\|k^n}(F^{n+1}(x + h))$. Donc

$$x + S(h') \subset N_{\varepsilon\|h'\|}(F(x + h')) \subset N_{\varepsilon\|h\|k^n}(F(x + h')) \subset N_{(n+1)\varepsilon\|h\|k^n}(F^{n+1}(x + h)).$$

Comme ceci est vrai quel que soit $h' \in S^n(h)$, alors

$$x + S^{n+1}(h) \subset N_{(n+1)\varepsilon\|h\|k^n}(F^{n+1}(x + h)).$$

Ainsi, $x + S^m(h) \subset N_{m\varepsilon\|h\|k^{m-1}}(F^m(x + h))$ pour $\|h\| < \delta'$. Soit $y \in A \subset N_{\delta'}(0)$, on a $S^m(A) \subset S^m(A - y) + S^m(y)$ car S est demi-linéaire positive et ainsi

$$\begin{aligned} \gamma(S^m(A)) &\leq \gamma(S^m(A - y)) + 0 \\ &= \gamma(x + S^m(A - y)) \\ &\leq \gamma(N_{m\varepsilon\delta(A)k^{m-1}}(F^m(x + A - y))) \\ &\leq \gamma(F^m(x + A - y)) + 2m\varepsilon\delta(A)k^{m-1} \\ &\leq \gamma(F^m)\gamma(A) + 2m\varepsilon\delta(A)k^{m-1} \\ &\leq (\gamma(F^m) + 2m\varepsilon k^{m-1})\delta(A) \\ &= k'\delta(A) \end{aligned}$$

où $k' = \gamma(F^m) + 2m\varepsilon k^{m-1} < 1$. Ainsi, si $A = \cup_{i=1}^r A_i$ est tel que $\delta(A_i) < \gamma(A)\frac{2}{k'+1}$, car $k' + 1 < 2$, on a alors

$$\begin{aligned} \gamma(S^m(A)) &\leq \max_{i=1,\dots,r} \gamma(S^m(A_i)) \\ &\leq \max_{i=1,\dots,r} k'\delta(A_i) \\ &\leq \frac{2k'}{k'+1} \gamma(A) \end{aligned}$$

où $\frac{2k'}{k'+1} < 1$, c'est-à-dire $\gamma(S^m) < 1$ sur $N_{\delta'}(0)$ et par suite $\gamma(S^m) < 1$ car S^m est homogène. Ceci achève la démonstration. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce travail. Dans le cas des fonctions univoques il est dû à Eells-Fournier [3] et dans sa preuve nous suivrons avec beaucoup de modifications le cheminement de ce dernier article.

Notons qu'ici, pour des raisons techniques, nous avons dû ajouter les conditions (5.2.2) et (5.2.3). De plus la condition habituelle sur la différentielle devient la condition (5.2.5) et (5.2.6). La condition (5.2.4) doit être ajoutée comme le montre la remarque (5.3). Finalement, pour des raisons techniques, nous devons ajouter la condition que E soit un espace de Banach strictement convexe (c'est-à-dire si $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ alors il existe $z \in E$ tel que $x = \lambda z$ et $y = \gamma z$).

THÉOREME 5.2. Soit $f = (F_n, \dots, F_0)$ une suite admissible de fonctions acycliques $F_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ où chaque X_i est un espace de Hausdorff quel que soit $i = 0, 1, \dots, n$ et $X_0 = U$ est une partie ouverte de $X_{n+1} = X \in \text{CF}$, un sous espace d'un espace de Banach strictement convexe E . Soit $F = F_n \circ \dots \circ F_0: U \rightarrow X$ continûment différentiable dans U et à itérée condensante avec $S_{x,z}$ satisfaisant à la condition qui rende F continûment différentiable dans U . Si

(5.2.1) $\{x\} = N \cap \text{Fixe}(F)$ où N est un voisinage de x dans U .

(5.2.2) $F(x)$ est convexe.

(5.2.3) $S_{x,x}(h)$ est convexe, $\forall h$.

(5.2.4) $\exists d > 0$ tel que $d(t(F(x) + x), (S_{x,x}(h) - h)) \geq d, \forall \|h\| = 1, \forall t > 1$ (c'est-à-dire $x + h \notin N_{dr}(F(x) + S_{x,x}(h)), \forall \|h\| = r$).

(5.2.5) $1 \notin \text{co } P(h), \forall h \in E \setminus \{0\}$ où $P(h) = \{\lambda \mid \lambda h \in S_{x,x}(h)\}$.

(5.2.6) $\lambda v \in S_{x,x}(v) \implies \lambda > 1$ pour toute combinaison linéaire de vecteurs propres généralisés correspondant à des valeurs propres > 1 .

Alors $\text{ind}(N, f, X) = (-1)^{\alpha(x)}$, où $\alpha(x)$ est la somme des multiplicités des valeurs propres de $S_{x,x}$ contenues dans $(1, \infty)$.

Le Théorème 5.2 est une conséquence immédiate des propositions qui suivent. Pour ces propositions voir [3].

REMARQUE 5.3. L'hypothèse (5.2.4) est nécessaire car pour obtenir que $d(x + th, z + S_x(s, th)) \geq tk$ on ne peut supposer, comme dans le cas univoque, que $S_x(x, h) \neq h, \forall h \in E$, comme le montre l'exemple suivant:

Si $F(x) = \overline{B_1(0)}$ et $x = (0, 1)$ et pour un h on a que $S_x(x, h) - h = (0, 1)$, alors, $\forall t \exists z_t$ tel que $d(x + th, z_t + S_x(x, th)) \leq \sqrt{t^2 + 1} - 1, \forall t < 1$; donc un tel k ne peut exister sinon

$$tk + 1 \leq \sqrt{t^2 + 1},$$

$\forall t < 1$, c'est-à-dire

$$2kt \leq t^2(1 - k^2),$$

$\forall t < 1$, ce qui est impossible pour $k > 0$.

Pour des raisons d'exposition, les lemmes qui serviront à démontrer une proposition, suivront cette dernière, mais n'utilisent que des définitions ou notations contenues dans la preuve de cette proposition.

La proposition suivante est la réduction du calcul de l'indice à celui de la différentielle de F en x . C'est ici que nous utilisons la condition de stricte convexité pour obtenir l'existence des projections sur un sous ensemble convexe compact: en effet, si K est convexe compact, $\rho: E \rightarrow K$ est défini par $\rho(x) = \text{"l'élément de } K \text{ le plus près de } x\text{"}$; un tel élément existe car K est compact; il est unique car si $\|x - y\| = \|x - z\| = d(x, K)$ alors, comme $(y + z)/2 \in K$, on a que $\|x - (y + z)/2\| = d(x, K)$ et ainsi $\|(x - y)/2 + (x - z)/2\| = \|(x - y)/2\| + \|(x - z)/2\|$, d'où par stricte convexité que $x - y = x - z$ et $y = z$; finalement, elle est continue car si $x \in K$ et $\varepsilon > 0$ alors $d = d(x, K \setminus N_\varepsilon(\rho(x))) > d(x, K)$ et si $\delta < (d - d(x, K))/2$ on a pour tout $y \in N_\delta(x)$ que $\|y - \rho(x)\| < \delta + d(x, K)$ d'où $\|y - \rho(y)\| < \delta + d(x, K)$ et $\|x - \rho(y)\| < 2\delta + d(x, K) < d$, ce qui implique que $\rho(y) \in N_\varepsilon(\rho(x))$.

PROPOSITION 5.4 (VOIR [3]). *Sous les hypothèses (5.2.1) à (5.2.4) il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\text{ind}(f|_{N_\epsilon(x)}) = \text{ind}(S_{x,x})$$

où $f|_{N_\epsilon(x)} = (F_n, \dots, F_0|_{N_\epsilon(x)})$.

DÉMONSTRATION:

a) Considérons l'homotopie G définie par la formule

$$G(x + h, t) = (H_h(F(x + h), t), t)$$

où $H_h(y, t) = H(y, h, t) = (1 - t)y + t\rho_h(y)$ et ρ_h est la projection sur le convexe compact $F(x) + S_{xx}(h)$. Notons que $\rho_h(y)$ est continue en (h, y) car S_{xx} est continue en h . Elle a pour décomposition acyclique, si $G_0(x + h) = F_0(x + h) \times \{h\}$,

$$(H \times 1_{[0,1]}, F_n \times 1_E \times 1_{[0,1]}, \dots, F_1 \times 1_E \times 1_{[0,1]}, G_0 \times 1_{[0,1]}).$$

Par le lemme (5.5), G est sans point fixe sur $\partial N_\epsilon(0)$ et est compactifiante, d'où par (2.3) et (2.7)

$$\text{ind}(f|_{N_\epsilon(x)}) = \text{ind}((\rho, F_n \times 1_E, \dots, F_1 \times 1_E, G_0|_{N_\epsilon(x)}).$$

b) Considérons l'homotopie

$$G'(x + h, t) = (1 - t)\rho_h(F(x + h)) + t(x + S_{x,x}(h)) \subset F(x) + S_{x,x}(h),$$

elle n'a qu'un point fixe et c'est x . De plus $F(x) + S_{x,x}(h)$ est compactifiante avec pour seul point fixe x , par (5.2.4) et (5.9). Elle a comme décomposition acyclique $(L, F_n \times 1_E, \dots, F_1 \times 1_E, G_0)$ où $L(y, h) = (1 - t)\rho_h(y) + t(x + S_{x,x}(h))$; on a donc, par (2.3) et (2.7) et (2.6), que

$$\begin{aligned} \text{ind}((\rho, F_n \times 1_E, \dots, F_1 \times 1_E, G_0|_{N_\epsilon(x)}) \\ &= \text{ind}(x + S_{xx}, F_n \times 1_E, \dots, F_1 \times 1_E, G_0|_{N_\epsilon(x)}) \\ &= \text{ind}(x + S_{xx}, F_{n-1} \times 1_E, \dots, F_1 \times 1_E, G_0|_{N_\epsilon(x)}) \\ &= \text{ind}(x + S_{xx}|_{N_\epsilon(x)}) \\ &= \text{ind}(x + S_{xx}). \end{aligned}$$

c) Par commutativité $\text{ind}(x + S_{x,x}) = \text{ind}(S_{x,x})$ (les deux fonctions sont $G_x(h) = x + h$ et $F'(x + h) = S_{x,x}(h)$). $\square$

LEMME 5.5. *Sous les hypothèses (5.2.1) à (5.2.4), G défini en (5.4.a) est compactifiante.*

DÉMONSTRATION: Montrons que T est compactifiante, où

$$\begin{aligned} T(x + h) &= \pi_1 \left(\bigcup_{t \in [0,1]} H_h(F(x + h), t) \right) \\ &= \bigcup_{t \in [0,1]} \bigcup_{y \in F(x + h)} ((1 - t)y + t\rho_h(y)) \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

et π_1 est la projection sur la première composante (on obtiendra évidemment que G est compactifiante).

- a) Choisissons W et K_1 . Comme par le lemme 5.1, $S_{x,x}$ est à itérée condensante soit donc n et k tels que $k' = \gamma((S_{x,x})^n) < k < 1$. Soit $L \geq \|S_{x,x}\|$ tel que $L \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $2\varepsilon < d$ et

$$8\varepsilon(1 + \dots + L^{n-1}) + k' < k.$$

Soient R, r et M des nombres donnés par les lemmes 5.6 et 5.7. On peut de plus supposer que

$$(\varepsilon + M)4r < R$$

et

$$8rL < R.$$

Choisissons $W = N_s(x)$, où $s < r/2$ et est tel que si $y \in \overline{N_s(x)}$ alors $F(y) \subset N_{r/8}(F(x))$. Choisissons $K_1 = \bigcup_{i=1}^m \overline{N_{r/4}(x_i)}$ où $\bigcup_{i=1}^m N_{r/8}(x_i) \supset F(x)$. On a, $\forall y \in \overline{N_r(x)}, F(y) \subset N_{r/8}(F(x)) \subset K_1$.

- b) Montrons que T est sans point fixe sur ∂W . Par le lemme 5.8, avec $A = \{h\}$ et $r_0 = 0$, $\forall h \in W$, on a que $\|h\| = r$ et que

$$\begin{aligned} T(x+h) \cap \overline{N_r(x)} &\subset F(x) + N_{2\varepsilon r}(S_{xx}(h)) \\ &\subset N_{2\varepsilon r}(F(x) + S_{xx}(h)) \\ &\subset N_{dr}(F(x) + S_{xx}(h)) \end{aligned}$$

qui ne contient pas h , par l'hypothèse (5.2.4) et le choix de ε .

- c) Choisissons K_i par tranches de n à la fois. Rappelons que $K_1 = K_{11} \cup \dots \cup K_{1m}$ où $K_{1i} \cap \overline{N_s(x)} = \emptyset$, $\forall i \leq m'$, et $K_{1m'+1}, \dots, K_{1m} \subset \overline{N_r(x)}$. Posons $A = \overline{N_s(0)}$. Par le lemme 5.9,

$$\begin{aligned} T(x+A) \cap \overline{N_r(x)} &\subset K'_A + N_{4\varepsilon s}(S_{xx}(A)) \\ &\subset \bigcup_{i=m'}^{m_2} y_{2i} + \text{co } N_{8\varepsilon s}(S_{xx}(A)) \\ &= \bigcup_{i=m_1}^{m_2} Y_{2i} \end{aligned}$$

pour certains $y_{21}, \dots, y_{2m_2} \in K'_A$, un compact. Posons

$$K_2 = \bigcup_{i=1}^{m'} K_{1i} \cup \left[\bigcup_{i,j > m'} K_{1j} \cap Y_{2i} \right] \quad (*)$$

Comme $T(x+A) \subset K_1$, on a que $T(x+A) \subset K_2$, d'où $T(K_1 \cap \overline{N_s(x)}) \subset K_2 \subset K_1$. De même

$$\begin{aligned} T(K_2 \cap \overline{N_s(x)}) \cap \overline{N_r(x)} &\subset K'_2 + N_{8\varepsilon s}(S_{xx}(\text{co } N_{8\varepsilon s}(S_{xx}(A)))) \\ &\subset \bigcup_{i=m'}^{m_3} y_{2i} + \text{co } N_{8\varepsilon s(1+L)}(S_{xx}^2(A)) \\ &= \bigcup_{i=m'}^{m_3} Y_{2i}. \end{aligned}$$

On reprend maintenant la formule (*) remplaçant 2 par 3 et K_{1j} par K_{2j} , ainsi de suite jusqu'à

$$T(K_n) \cap \overline{N_r(x)} \subset \bigcup_{i=m'}^{m_{n+1}} y_{ni} + \text{co } N_{8\epsilon s(1+L+\dots+L^{n-1})}(S_{xx}^n(A))$$

donc

$$\begin{aligned} \gamma(T(K_n) \cap \overline{N_r(x)}) &\leq 16\epsilon s(1 + \dots + L^{n-1})\gamma(S_{xx}^n(A)) \\ &\leq (8\epsilon(1 + \dots + L^{n-1}) + k')2s < 2ks. \end{aligned}$$

On a donc

$$T(K_n \cap \overline{N_s(x)}) \cap \overline{N_r(x)} \subset \bigcup_{i=m''}^{m_{n+1}} K_{n+1i}$$

où K_{n+1i} est convexe de diamètre inférieur à $2ks$ et est inclus dans un K_{1j} avec $j > m'$. Complétons $K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{m_{n+1}} K_{n+1,i}$ tel que $T(K_n \cap \overline{N_s(x)}) \subset K_{n+1}$ et les $\delta(K_{n+1,j}) \leq \gamma(T(K_n \cap \overline{N_s(x)})) + \frac{1}{n+1}$ et $K_{n+1,j}$ est convexe et inclus dans un K_{1j} avec $j \leq m'$. On répète le procédé remplaçant A par chacun des $K_{n+1,i}$ avec $i > m'$. On obtiendra donc

$$\gamma(K_{in+1} \cap \overline{N_r(x)}) \leq k^i 2s \rightarrow 0.$$

d) Montrons que $\gamma(K_i) \rightarrow 0$. Comme les K_{in+1} sont emboîtées, $K_\infty = \bigcap_{i=1}^\infty (K_{in+1} \cap \overline{N_r(x)})$ est compact et donc $T(K_\infty)$ l'est aussi. De plus $\forall \epsilon' > 0$ il existe $\delta' > 0$ et i_0 tels que $K_{in+1} \cap \overline{N_r(x)} \subset N_{\delta'}(K_\infty)$, $\forall i \geq i_0$ et

$$T(K_{in+1} \cap \overline{N_r(x)}) \subset N_\epsilon(T(K_\infty)).$$

Ainsi, comme $K_{in+n} \subset K_{in+1}$ on obtient que

$$\gamma(T(K_{in+n} \cap \overline{N_s(x)})) \leq 2\epsilon$$

si $i \geq i_0$. On aura donc $\gamma(K_{in+n+1}) \leq 2\epsilon + 1/(in + n + 1)$. D'où $\gamma(K_{in+n+1}) \rightarrow 0$ si $i \rightarrow \infty$. Comme les K_i sont emboîtées on obtient la conclusion. $\square$

LEMME 5.6. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que si $a, y \in N_R(x)$, $z \in F(a)$, $z' \in F(y)$ et $\|z - z'\| < R$ alors $d(S_{a,z}, S_{y,z'}) \leq \epsilon$.

DÉMONSTRATION: Comme $S_{y,z}$ est continue, alors $g(x, z, y, z') = d(S_{a,z}, S_{y,z'})$ est aussi continue et donc est uniformément continue sur $(x, z, y, z') \in \{x\} \times F(x) \times \{x\} \times F(x) = C$ qui est compact. Ainsi, $\exists t > 0$ tel que si $\|z - z'\| \leq t$ et $z, z' \in F(x)$ alors $g(x, z, x, z') < \epsilon/2$ (c'est-à-dire que g est bornée par $\epsilon/2$ sur le compact $C' = \{(x, z, x, z') \in C \mid \|z - z'\| \leq t\}$). Donc g est borné par $2\epsilon/3 < \epsilon$ dans un voisinage V de C' sur son domaine, il existe donc $d > 0$ tel que $d < t/3$ et $N_{2d}(C') \subset V$.

Mais soit $R < d$ tel que si $y \in N_R(x)$ alors $F(y) \subset N_{d/3}(F(x))$, car F est continue. Ainsi si $a, y \in N_R(x)$ et $z \in F(a)$ et $z' \in F(y)$ et $\|z - z'\| < R$, alors $\exists z_1, z'_1 \in F(x)$ tels que $\|z - z_1\| < d/3$ et $\|z' - z'_1\| < t/3$ et ainsi $\|(a, z, y, z') - (x, z_1, x, z'_1)\| < 2d$ comme $(x, z_1, x, z'_1) \in C'$, d'où $d(S_{a,z}, S_{y,z'}) \leq \epsilon$. $\square$

LEMME 5.7. $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$ et $M > 0$ tels que si $y, y + h \in \overline{N_r(x)}$, alors

$$(5.7.1) \quad \|S_{y,z}\| \leq M, \forall z \in F(y).$$

$$(5.7.2) \quad F(y + h) \cap \overline{\|h\|_\varepsilon} \cup_{z \in F(y)} z + S_y(z, h).$$

$$(5.7.3) \quad F(y) \subset N_{R/8}(F(x)).$$

$$(5.7.4) \quad (1-t)z + t\rho_h(z) \in N_{R/4}(z), \forall z \in F(y).$$

DÉMONSTRATION: Soit R donné par le lemme précédent. Soit $0 < c < R$ tel que si $y \in N_c(x)$ et $z \in F(y)$ alors $\|S_{y,z}\| < 1 + \sup_{z \in F(x)} \|S_{x,z}\| = M$ car $(y, z) \rightarrow S_{y,z}$ est continue. Maintenant si $0 < r < c$ est tel que $2r(M+1) < R$ on obtient que si y et $y + h \in \overline{N_h(x)}$, $z \in F(y)$ et $z' \in F(y')$ pour un $y' \in \text{co}(y, y + h)$, alors si

$$\|z - z'\| < (M+1)\|h\| \leq (M+1)2r < R$$

on obtient par le lemme 5.6 que

$$d(S_{y,z}, S_{y',z'}) < \varepsilon$$

ainsi selon la notation du théorème du reste (3.6) $k_{yhl} \leq \varepsilon$ d'où $k_{yh} < \varepsilon$ et on obtient (5.7.2). Finalement, on peut de plus supposer que $4r(\varepsilon + M) < R$ et $8rL < R$ et que $y \in \overline{N_r(x)}$ implique $F(y) \subset N_{R/8}(F(x))$. Ainsi $x + h \in \overline{N_r(x)}$ implique $F(x + h) \subset N_{R/4}(F(x) + S_{xx}(h))$ car $d_H(S_{xx}(h), 0) \leq \|S_{xx}\|\|h\| \leq Lr \leq R/8$. Ainsi $(1-t)z + t\rho_h(z) \in N_{R/4}(z)$, $\forall z \in F(x + h)$. $\square$

LEMME 5.8. Soient R et r donnés par les lemmes (5.6) et (5.7), alors

$$T(x + A) \cap \overline{N_r(x)} \subset K_{h_0} + N_{2\varepsilon\delta}(S_{xx}(A - h_0))$$

pour tout $A \subset \overline{N_r(0)}$ et $\forall h_0 \in \overline{N_r(0)}$ où $K_{h_0} = \cup_{t \in [0,1]} [(1-t)(F(x + h_0) \cap \overline{N_R(x)}) + tF(x)]$ et où $\delta = \text{diam}(A \cup \{h_0\})$.

DÉMONSTRATION: Par la définition de T (en (5.5.1)), on a que

$$T(x + A) \cap \overline{N_r(x)} \subset \bigcup_{h \in A} \bigcup_{t \in [0,1]} \bigcup_{y \in F(x+h) \cap N_{R/2}(x)} [(1-t)y + t\rho_h(y)]$$

car $y \notin N_{R/2}(x) \implies (1-t)y + t\rho_h(y) \notin \overline{N_{R/4}(x)} \supset \overline{N_r(x)}$ par (5.7.4). Mais, par le lemme 5.7, $\forall h \in A$,

$$\begin{aligned} F(x + h) \cap N_{R/2}(x) &\subset N_{\varepsilon\delta} \left(\bigcup_{z \in F(x+h_0)} z + S_{x+h_0}(z, h - h_0) \right) \cap N_{R/2}(x) \\ &\subset N_{\varepsilon\delta} \left(\bigcup_{z \in F(x+h_0) \cap N_R(x)} (z + S_{x+h_0}(z, h - h_0)) \right) \end{aligned}$$

car $N_{\varepsilon\delta}(z + S_{x+h_0}(z, h - h_0)) \subset N_{(\varepsilon+M)\delta}(z) \subset N_{R/2}(z)$. Ainsi, on peut supposer que $x + h_0, z \in N_R(x)$ et donc par le lemme 5.7, que $S_{x+h_0}(z, h - h_0) \subset N_{\varepsilon\delta}(S_{xx}(h - h_0))$. On peut supposer ainsi que

$$y \in F(x + h) \cap N_{R/2}(x) \subset N_{2\varepsilon\delta} \left(\bigcup_{z \in F(x+h_0) \cap N_R(x)} z + S_{xx}(h - h_0) \right),$$

et comme $\rho_h(y) \subset F(x) + S_{xx}(h)$ on en déduit que $(1-t)y + t\rho_h(y) \subset (1-t)[F(x + h_0) \cap \overline{N_R(x)}] + t[F(x) + N_{2\varepsilon\delta}((1-t)S_{xx}(h - h_0) + tS_{xx}(h - h_0))]$ d'où $F(x + h) \cap \overline{N_r(x)} \subset K_{h_0} + N_{2\varepsilon\delta}(S_{xx}(h - h_0))$, $\forall h \in A$, et $F(x + A) \cap \overline{N_r(x)} \subset K_{h_0} + N_{2\varepsilon\delta}(S_{xx}(A - h_0))$ où K_{h_0} est compact. $\square$

LEMME 5.9. $F(x) + S_{xx}$ est compactifiante sur $\overline{N_\varepsilon(x)}$, $\forall \varepsilon > 0$.

DÉMONSTRATION: Posons $N = \overline{N_\varepsilon(x)}$. Alors

$$T(N) = F(x) + S_{xx}(N) \subset K_1 = F(x) + \text{co } S_{xx}(N)$$

qui est convexe. De plus

$$T(K_1 \cap N) \subset F(x) + S_{xx}(F(x)) + S_{xx}(\text{co } S_{xx}(N))$$

donc

$$T(K_1 \cap N) \subset K_2 = K_1 \cap [F(x) + \text{co } S_{xx}(F(x)) + \text{co}(S_{xx}^2(N))] \subset K_1$$

et, par induction,

$$T(K_i \cap N) \subset K_{i+1} = K_i \cap [F(x) + \text{co } S_{xx}(F(x)) + \cdots + \text{co } S_{xx}^{n-1}(F(x)) + \text{co } S_{xx}^n(N)].$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \gamma(K_{in}) &\leq \gamma(F(x)) + \cdots + \gamma(\text{co } S_{xx}^{n-1}(F(x))) + \gamma(\text{co } S_{xx}^n(N)) \\ &\leq \gamma(F(x)) + \cdots + \gamma(S_{xx}^{n-1}(F(x))) + \gamma(S_{xx}^n(N)) \\ &\leq 0 + \cdots + 0 + (\gamma(S_{xx}^n))^i 2\varepsilon \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\gamma(S_{xx}^n) < 1$. $\square$

PROPOSITION 5.10. Sous les hypothèses (5.2.5) et (5.2.6) on a,

$$\text{ind}(S_{xx}) = (-1)^{\alpha(x)}.$$

DÉMONSTRATION:

- a) (*Réduction à un espace de dimension finie.*) Posons $T = S_{x,x}$. Alors T^n est condensante en vertu de la proposition 5.1 (c'est-à-dire $\gamma(T^n) < 1$ si n est assez grand). Soit $E_0^j = \{0\}$ et, par récurrence, soit E_{n+1}^j le sous-espace de E engendré par l'ensemble

$$\{v \in E \mid \exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } T^j(v) \cap (\lambda v + E_n^j) \neq \emptyset\}$$

quel que soit $j \geq 1$. Soit $E^j = \bigcup_{n \geq 1} E_n^j$; $E^1 \subset E^j$ pour tout j . Il existe $j \geq 1$ tel que T^j soit condensante, d'où $\dim E^j < \infty$ et ainsi $\dim E^1 < \infty$ où $E^1 = \bigcup_{n \geq 1} E_n^1$ et E_n^1 est le sous-espace de E engendré par l'ensemble $\{v \in E \mid \exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } T(v) \cap (\lambda v + E_{n-1}^1) \neq \emptyset\}$.

Considérons $\pi: E \rightarrow E^1$, une projection continue. Définissons $g_t(x) = tx + (1-t)\pi(x)$ et $h_t(v) = g_t(T(v))$ où $t \in I$, alors $v \in h_t(v)$ entraîne qu'il existe $w \in T(v)$ tel que $v = tw + (1-t)\pi(w)$ d'où $w - \frac{v}{t} = (1 - \frac{1}{t})\pi(w)$. Posons $\lambda = \frac{1}{t} \geq 1$, alors on obtient $w - \lambda v = (1-\lambda)\pi(w)$. Or $(1-\lambda)\pi(w) \in E^1$ et ainsi, par la définition de E^1 , $v \in E^1$ et par suite $w \in E^1$ d'où $v \in h_1(v) = T(v)$ et $v = 0$ car $1 \notin \text{co } P(v)$ par (5.2.5). Donc h_t est bien définie. De plus, $h_t(v) \subset tT(v) + E^1$, donc

$$h_t^n(v) \subset t^n T^n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} t^i T^i \circ \pi(E^1)$$

et ainsi, comme $\dim E^1 < \infty$, $\gamma(h_t^n) = t^n \gamma(T^n) < 1$ (c'est-à-dire que h_t^n est condensante sur $\overline{N_\varepsilon(0)}$, pour tout $\varepsilon > 0$, si n est assez grand). En vertu de la propriété d'homotopie de l'indice, $\text{ind}(E, T, E) = \text{ind}(E, \pi \circ T, E)$ et par commutativité,

$$\text{ind}(E, \pi \circ T, E) = \text{ind}(E^1, T, E^1).$$

- b) (*Réduction au cas univoque.*) Comme E^1 est de dimension finie, toutes les applications continues sont compactes sur les bornés. Posons $m = \dim E^1$. Soit $\{v_1, \dots, v_m\}$ une base de E^1 telle qu'il existe $\lambda_i, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_i v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij} v_j \in T(v_i)$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et $j < i$. Sans perte de généralité, on peut supposer que chaque v_i est de norme 1. Considérons $N_1(0)$. Pour chaque v_i , il existe un nombre réel $r > 1$ assez grand tel que $T(v_i) + rv_i$ appartienne à l'extérieur de $N_1(0) \cup \partial N_1(0)$. En effet, en définissant $s = 2\|T(v_i)\| = 2 \sup\{\|z\| \mid z \in T(v_i)\}$, il suffit de choisir $r > s + 1$ car dans ce cas, $\|T(v_i) + rv_i\| \geq \|T(v_i)\| - \|rv_i\| > r - s > s + 1 - s = 1$.

Définissons l'homotopie H par $H(v, t) = H_t(v) = T(v) + trv$. Dû au choix de r , H_t n'a pas de point fixe sur $\partial N_1(0)$ car sinon, il existe $t \in I$ tel que $v \in H_t(v)$ [c'est-à-dire $(1 - tr)v \in T(v)$] et par suite $1 - tr > 1$ d'où $tr < 0$. Contradiction. On a donc $\text{ind}(E^1, T, E^1) = \text{ind}(E^1, H_1, E^1)$.

Notons $v = \alpha_1(v)v_1 + \dots + \alpha_m(v)v_m$ une combinaison linéaire des v_i où $\alpha_i(v)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de v par rapport à la base $\{v_1, \dots, v_m\}$. Soit maintenant l'homotopie h' définie par

$$h'(v, t) = h'_t(v) = (1 - t)H_1(v) + t \sum_{i=1}^m \alpha_i(v)[(\lambda_i + r)v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij} v_j].$$

Notons que

$$(\lambda_i + r)v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij} v_j \in T(v_i) + rv_i = H_1(v_i) = h'_0(v_i).$$

Pour montrer que h' est bien définie, il suffit de montrer qu'elle n'a pas de point fixe sur $\partial N_1(0)$. Soit $v \in h'_t(v)$ et $\|v\| = 1$, alors

$$v \in (1 - t)H_1(v) + t \sum_{i=1}^m \alpha_i(v)[(\lambda_i + r)v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij} v_j].$$

i) Supposons que $\alpha_i \geq 0$ pour tout i , alors $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i(v) \geq 1$ car sinon $\|v\| = \|\sum_{i=1}^m \alpha_i(v)v_i\| \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i(v)\|v_i\| = \sum_{i=1}^m \alpha_i(v) \leq \alpha < 1$. Contradiction. Comme T est homogène et demi-linéaire positive,

$$\begin{aligned} H_1(v) &= T(v) + rv \\ &= T\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i(v)v_i\right) + r \sum_{i=1}^m \alpha_i(v)v_i \\ &\subset \sum_{i=1}^m \alpha_i(v)T(v_i) + r \sum_{i=1}^m \alpha_i(v)v_i \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(v)(T(v_i) + rv_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(v)H_1(v_i). \end{aligned}$$

Or, $H_1(v_i) \subset N_s((\lambda_i + r)v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij}v_j)$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et donc

$$H_1(v) \subset \sum_{i=1}^m \alpha_i(v) H_1(v_i) \subset \alpha \overline{co} \bigcup_{i=1}^m N_s((\lambda_i + r)v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij}v_j).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} v \in (1-t)H_1(v) + t \sum_{i=1}^m \alpha_i(v)((\lambda_i + r)v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij}v_j) \\ \subset \alpha \overline{co} \bigcup_{i=1}^m N_s((\lambda_i + r)v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij}v_j) \end{aligned}$$

et, en vertu du lemme 5.12,

$$\begin{aligned} d(\alpha \overline{co} \bigcup_{i=1}^m N_s((\lambda_i + r)v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij}v_j), 0) &\geq \alpha[(\lambda + r)d - k]c - s \\ &\geq ((\lambda + r)d - k)c - s \\ &\geq 2, \end{aligned}$$

si l'on choisit

$$r \geq \frac{\frac{2+s}{c} + k}{d} - \lambda,$$

où $\lambda = \min_i \lambda_i$. Ainsi $d(v, 0) = \|v\| > 1$. Contradiction.

ii) Pour tout i , si α_i est négatif, on remplace v_i par $-v_i$ et α_i par $-\alpha_i$. Comme $T(-v_i) = -T(v_i)$, alors en changeant au besoin certains β_{ij} par $-\beta_{ij}$, tout ce qui précède demeure vrai y compris la conclusion de i). Par conséquent, $\text{ind}(E^1, h'_0, E^1) = \text{ind}(E^1, h'_1, E^1)$. Or $h'_0 = H_1$ et comme H_1 est homotope à T , on a que

$$\text{ind}(E^1, T, E^1) = \text{ind}(E^1, h'_1, E^1).$$

Puisque h'_1 est une application univoque et linéaire, alors par Leray-Schauder [9], $\text{ind}(E^1, h'_1, E^1) = (-1)^{\alpha(x)}$, car E^1 est de dimension finie et $\dim E^1 = \alpha(x)$. $\square$

LEMME 5.11. Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$, soient $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$ quel que soit $i = 1, \dots, n$ et quel que soit $j < i$ et soit $s > 0$. Alors il existe $k, d > 0$ tels que pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$,

$$d\left(\overline{co} \bigcup_{i=1}^n N_s(\lambda_i v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij} v_j), 0\right) \geq \lambda d - k - s,$$

où $\lambda = \min_i \lambda_i$.

DÉMONSTRATION: Soit H l'hyperplan engendré par $\{v_1, \dots, v_n\}$. Comme $0 \notin H$, alors $d = d(H, 0) > 0$. Donc $d(\overline{co}\{v_i\}, 0) = d$ d'où $d(\overline{co}\{\lambda v_i\}, 0) = \lambda d$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $k = \sup_{i=1, \dots, n} |\sum_{j < i} \beta_{ij} v_j|$, alors $\sum_{j < i} \beta_{ij} v_j \subset N_k(0)$. Soit maintenant l'hyperplan H' parallèle à H , qui est situé à $s + k$ unités plus près de 0 que l'hyperplan λH . Si F^+ est

le demi-espace fermé déterminé par H' ne contenant pas 0, alors $d(F^+, 0) = \lambda d - s - k$. Puisque F^+ est convexe et qu'il contient toutes les boules

$$N_s(\lambda_i v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij} v_j) \subset N_{s+k}(\lambda_i v_i)$$

$i = 1, \dots, n$, alors

$$F^+ \supset \overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^m N_s(\lambda_i v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij} v_j)$$

et ainsi

$$d\left(\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n N_s(\lambda_i v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij} v_j), 0\right) \geq \lambda d - s - k. \quad \square$$

LEMME 5.12. Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base quelconque d'un espace de Banach réel E de dimension finie n , soient $\beta_{ij} \in \mathbf{R}$ quel que soit $i = 1, \dots, n$ et quelque soit $j < i$ et soit $s' > 0$. Alors il existe $d, k, c > 0$ tels que pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$,

$$d\left(\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n N_{s'}(\lambda_i v_i + \sum_{j < i} \beta_{ij} v_j), 0\right) \geq (\lambda d - k)c - s',$$

où $\lambda = \min_i \lambda_i$.

DÉMONSTRATION: Soit $\phi: E \rightarrow \mathbf{R}^n$ un isomorphisme de E sur $\mathbf{R}^n$, alors $\{\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)\}$ est une base de $\mathbf{R}^n$. En vertu du lemme 5.11,

$$d\left(\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n N_s(\lambda_i \phi(v_i) + \sum_{j < i} \beta_{ij} \phi(v_j)), 0\right) \geq \lambda d - k - s.$$

Or

$$\inf \left\{ \|x\| \mid x \in \phi^{-1} \left(\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n N_s(\lambda_i \phi(v_i) + \sum_{j < i} \beta_{ij} \phi(v_j)) \right) \right\} \geq (\lambda d - k - s) \|\phi\|^{-1},$$

où $\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} \neq 0$ car ϕ est un isomorphisme. En effet, soit

$$x \in \phi^{-1} \left(\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n N_s(\lambda_i \phi(v_i) + \sum_{j < i} \beta_{ij} \phi(v_j)) \right),$$

alors il existe $y \in \overline{\text{co}} \cup_{i=1}^n N_s(\lambda_i \phi(v_i) + \sum_{j < i} \beta_{ij} \phi(v_j))$ tel que $x = \phi^{-1}(y)$, c'est-à-dire que $y = \phi(x)$. Donc $\|y\| \geq \lambda d - k - s$ et comme $\|y\| = \|\phi(x)\| \leq \|\phi\| \|x\|$, alors $\|x\| \geq \|y\| \|\phi\|^{-1} \geq (\lambda d - k - s) \|\phi\|^{-1}$. Par conséquent,

$$d\left(\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n \phi^{-1} \left(N_s(\lambda_i \phi(v_i) + \sum_{j < i} \beta_{ij} \phi(v_j)) \right), 0\right) \geq (\lambda d - k - s) \|\phi\|^{-1}.$$

De plus, puisque ϕ est linéaire,

$$\begin{aligned}\phi(N_{s\|\phi\|^{-1}}(\lambda_i(v_i) + \sum_{j<i} \beta_{ij}v_j)) &\subset N_{s\|\phi\|\|\phi\|^{-1}}(\phi(\lambda_i v_i + \sum_{j<i} \beta_{ij}v_j)) \\ &= N_s(\lambda_i \phi(v_i) + \sum_{j<i} \beta_{ij} \phi(v_j))\end{aligned}$$

et, par suite,

$$N_{s\|\phi\|^{-1}}(\lambda_i v_i + \sum_{j<i} \beta_{ij}v_j) \subset \phi^{-1}(N_s(\lambda_i \phi(v_i) + \sum_{j<i} \beta_{ij} \phi(v_j))),$$

d'où

$$\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n N_{s\|\phi\|^{-1}}(\lambda_i v_i + \sum_{j<i} \beta_{ij}v_j) \subset \overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n \phi^{-1}(N_s(\lambda_i \phi(v_i) + \sum_{j<i} \beta_{ij} \phi(v_j))).$$

Donc

$$\begin{aligned}d\left(\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n N_{s\|\phi\|^{-1}}(\lambda_i v_i + \sum_{j<i} \beta_{ij}v_j), 0\right) &\geq d\left(\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n \phi^{-1}\left(N_s(\lambda_i \phi(v_i) + \sum_{j<i} \beta_{ij} \phi(v_j))\right), 0\right) \\ &\geq (\lambda d - k - s)\|\phi\|^{-1}.\end{aligned}$$

Posons $c = \|\phi\|^{-1}$ et $s' = sc$, alors

$$d\left(\overline{\text{co}} \bigcup_{i=1}^n N_{s'}(\lambda_i v_i + \sum_{j<i} \beta_{ij}v_j), 0\right) \geq (\lambda d - k)c - s'. \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Banks H.T. et Jacobs M.O., *A differential calculus for multifunctions*, J. Math. Anal. Appl. 29 (1970), 246-272.
2. de Blasi F.S., *On the differentiability of multifunctions*, Pac. J. of Math. 66 (1976), 67-81.
3. Eells J. et Fournier G., *La Théorie des points fixes des applications à itérée condensante*, Mémoire 46, Bull. Soc. Math. France (1976), 91-120.
4. Fournier G. et Violette D., *A fixed point index for compositions of acyclic multivalued maps in Banach spaces*, The Mathematical Sciences Research Institute (MSRI)-Korea Publications 1 (1986), 137-158.
5. ———, *A fixed point theorem for a class of multivalued continuously differentiable maps*, Annales Polonici Mathematici 47 (1987), 381-402.
6. Gorniewicz L., *Homological methods in fixed point theory of multivalued maps*, Diss. Math. 129 (1976), 1-71.
7. Guzzardi R., *Differential theory of multivalued maps and applications*, to appear in the proceedings of Ryad conference.
8. Kuratowski K., *Sur les espaces complets*, Fund. Math. 15 (1930), 301-309.
9. Leray J. et Schauder J., *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Ec. Nor. Sup. 51 (1934), 45-78.
10. Martelli M. et Vignoli A., *On differentiability of multi-valued maps*, Bolletino U.M.I. 10 (1974), 701-712.
11. Nussbaum R.D., *Generalizing the fixed point index*, Math. Ann. 228 (1977), 259-278.
12. Sieberg H.W. et Skordev G., *Fixed point index and chain approximations*, Pac. J. of Math. 102 (1982), 455-486.

13. Skordev G., *Fixed point index for ANR's*, Forschungsswerpunkt Dynamische Systeme, Universitat Bremen, Report 46 (1981).

Gilles Fournier
Département de mathématiques et d'informatique
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec, Canada
J1K 2R1

Donald Violette
Département de mathématiques
Université de Moncton
Moncton, Nouveau Brunswick, Canada
E1A 3E9