

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE COMPACTIFICATION D'UN ENSEMBLE, ET APPLICATIONS AUX OPÉRATEURS INDUITS PAR DES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES CONTINUES

JEAN-MARC BELLEY ET FRANÇOIS LESSARD

RÉSUMÉ. Désignons par F soit le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$ et soit i) X un ensemble non-
vide, ii) V une collection arbitraire non-
vide de fonctions à valeurs dans F , définies sur X ,
et iii) X_V^0 la classe de toutes les fonctions $h: V \rightarrow F$ telles qu'il existe une suite généralisée
 $\{x_\alpha\} \subset X$ avec $f(x_\alpha) \rightarrow h(f)$, $\forall f \in V$, munie de la topologie usuelle faisant de X_V^0 un espace
compact. Nous obtenons quelques propriétés topologiques que possède X_V^0 et nous montrons
comment elles dépendent de V . Lorsque $F = \mathbf{R}$ et V est fermée sous les opérations $(f - a) \vee 0$
et $(a - f) \vee 0$ (où $f \in V$, $a \geq 0$), nous prouvons que X_V^0 peut être concrètement représenté
par une classe de sous-ensembles de V , munie d'une topologie (bien connue sous le nom de
"hull kernel"). Nous donnons ensuite des conditions suffisantes pour qu'un opérateur sur V
puisse être induit par une transformation ponctuelle continue sur X_V^0 , pour que X_V^0 soit un
semi-groupe, et pour que $1/f \in V$ lorsque $f \in V$.

ABSTRACT. Let i) F denote either $\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$, ii) X be a nonempty set, iii) V be an arbitrary
nonempty collection of bounded F -valued functions on X , and iv) X_V^0 be the class of all
functions $h: V \rightarrow F$ such that there exists a net $\{x_\alpha\} \subset X$ for which $f(x_\alpha) \rightarrow h(f)$ for all
 $f \in V$, and give it the usual topology making it a compact Hausdorff space. We obtain some
topological properties possessed by X_V^0 and show how they depend on V . When V is closed
under the operations $(f - a) \vee 0$ and $(a - f) \vee 0$ ($f \in V$, $a \in F$), we show that X_V^0 can
be concretely represented by a class of subsets of V with hull kernel topology. We then give
conditions for an operator on V to be induced by a continuous point transformation on X_V^0 ,
for X_V^0 to be a semigroup, and for V to be inverse closed.

1. Introduction. Désignons par F soit le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$, et soit X un ensemble
non-
vide et V une collection arbitraire non-
vide de fonctions bornées à valeurs dans F ,
définies sur X . Pour tout $x \in X$, désignons par h_x la fonction à valeurs dans F , définie sur
 V par $h_x(f) = f(x)$, $\forall f \in V$. Dénotons par X_V^0 la classe de toutes les fonctions $h: V \rightarrow F$
telles qu'il existe une suite $\{x_\alpha\} \subset X$ avec $h_{x_\alpha}(f) \rightarrow h(f)$, $\forall f \in V$.

Nous munissons maintenant X_V^0 d'une topologie w faisant de cet ensemble un espace
compact séparé, et ce de la façon suivante: $\forall f \in V$, choisissons un sous-ensemble compact
 D_f de F contenant l'ensemble image de f et, par la suite, identifions X_V^0 avec la fermeture
de l'ensemble des points de la forme $\prod_{f \in V} \{f(x)\}$ (où $x \in X$) dans l'espace compact séparé
 $\prod_{f \in V} D_f$. A noter que, de manière évidente, la fonction $j: X \rightarrow X_V^0$ définie par $j(x) = h_x$,
 $\forall x \in X$, est telle que $j(X)$ est dense dans X_V^0 . De plus, notre théorème 2.9 montrera
que l'espace X_V^0 demeure inchangé (à homéomorphisme près) si nous remplaçons V par

n'importe quelle classe de fonctions sur X qui contient V et qui est elle-même contenue dans la fermeture, par rapport à la norme uniforme, de la plus petite algèbre auto-adjointe de fonctions à valeurs dans F , définies sur X , contenant V et les fonctions constantes. Ainsi, X_V^0 est homéomorphe à la fermeture faible-étoile de l'ensemble $\{h_x \mid x \in X\}$ dans le dual de l'espace linéaire engendré par V , muni de la norme uniforme. Par le théorème de Banach-Alaoglu (voir [14], p. 66), nous voyons encore que X_V^0 est un espace compact séparé. Lorsque $F = \mathbb{R}$ et V est fermée sous les opérations $(a - f) \vee 0$ et $(f - a) \vee 0$ (où $f \in V$, $a \geq 0$) le théorème 3.1 permettra de concrètement représenter X_V^0 à l'aide d'une classe de sous-ensembles de X , munie de la topologie dite "*hull kernel*". De cette façon, nous obtenons une généralisation de certains résultats de représentation spectrale lorsque V est un espace de Riesz (voir, par exemple, [8] et [10]).

Dans la majeure partie des sections 2 et 3, V ne sera pas nécessairement un espace vectoriel. En travaillant avec la structure plus complexe qu'est l'espace vectoriel engendré par V , plusieurs de nos résultats (et leurs applications) deviendraient beaucoup moins évidents. De plus, nous allons restreindre notre attention aux fonctions bornées puisqu'il sera important pour nous de pouvoir étendre n'importe quelle fonction $f \in V$ à une unique fonction continue (à valeurs dans F) f^0 dans X_V^0 . Il serait également bon de noter que la manière dont X_V^0 a été définie, est une généralisation des idées utilisées pour la construction du compactifié de Stone-Čech (voir [9], p. 152) et du compactifié de Gelfand (voir [1], p. 267).

Un thème important de la section 3 est l'existence de conditions suffisantes pour qu'un opérateur puisse être induit par une transformation ponctuelle continue sur X_V^0 . Par exemple, le résultat suivant est contenu dans l'énoncé du théorème 4.6.

THÉORÈME. Soit i) V une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur un ensemble X , ii) $U: V \rightarrow V$ un opérateur linéaire positif et multiplicatif, et iii) 0 la fonctionnelle nulle sur V (avec $f^0(0) = 0$, $\forall f \in V$). Alors, il existe une unique fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow X_V^0 \cup \{0\}$ telle que $Uf = f^0 \circ Q \circ j$, $\forall f \in V$ (où $X_V^0 \cup \{0\}$ est muni de la topologie faible-étoile).

Ce résultat rappelle le théorème de multiplication de von Neumann qui dit que chaque opérateur unitaire U sur $L^2[0, 1]$ (avec mesure de Lebesgue m) tel que $(Uf)(Ug) \in L^2[0, 1]$ et $U(fg) = (Uf)(Ug)$ lorsque $f, g \in L^2[0, 1]$ et $fg \in L^2[0, 1]$, est induit par une transformation inversible mesurable sur $[0, 1]$ qui préserve m . (Voir [2], pp. 95–96 pour une preuve complète de ce théorème.) Comme nous le verrons, notre théorème ci-dessus implique que, étant donné V une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur X et contenant les fonctions constantes, et étant donné un opérateur linéaire positif et multiplicatif $U: V \rightarrow V$ tel que $U1 = 1$, il existe une unique fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow X_V^0$ telle que $Uf = f^0 \circ Q \circ j$, $\forall f \in V$.

Notre approche générale des compactifiés est justifiée en partie par quelques uns des exemples de la section 4. Ainsi, en utilisant la représentation concrète des compactifiés développée à la section 3, nous montrons facilement dans la partie b) des exemples 4.14, que le semigroupe $]0, \infty[$ est dense dans le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$. On peut même, à l'intérieur du champ d'études bien connu des algèbres de fonctions, obtenir des résultats très utiles qui peuvent être aisément démontrés en utilisant notre approche. Entre autres, nous montrons une généralisation de lemme de Wiener et nous prouvons dans partie b) des exemples 4.18, que si $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ est une suite absolument sommable dans $\mathbb{C}$, telle que $\sum_{i=0}^n a_i \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors il existe une suite absolument sommable $\{a'_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{C}$,

telle que

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i} = \sum_{i=0}^n a'_i, \quad \forall n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}.$$

2. Résultats généraux sur les compactifiés. Soit X un ensemble et V une collection non-vide de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur X . Nous donnons maintenant quelques observations utiles concernant X_V^0 . Rappelons premièrement qu'il est dit que V *sépare les points* de X si, $\forall x, y \in X$ tels que $x \neq y$, $\exists f \in V$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

PROPRIÉTÉS 2.1.

- a) Etant donné $f \in V$, désignons par f^0 la fonction sur X_V^0 définie par $f^0(h) = h(f)$, $\forall h \in X_V^0$. Alors f^0 est une fonction continue sur X_V^0 , telle que $f^0 \circ j = f$. f^0 peut donc être considérée comme étant une extension continue de f à X_V^0 . Puisque $j(X)$ est dense dans X_V^0 , il s'agit de la seule extension continue possible.
- b) La classe de fonctions $V^0 = \{f^0 \mid f \in V\}$ sépare les points de X_V^0 . Lorsque V est un espace vectoriel, il en est de même pour V^0 et $(af + bg)^0 = af^0 + bg^0$, $\forall a, b \in F$ et $\forall f, g \in V$. Si V est fermée sous les produits, il en est de même pour V^0 et $(fg)^0 = f^0 g^0$, $\forall f, g \in V$. Lorsque $F = \mathbf{R}$ et V est un treillis alors il en est de même pour V^0 et $(f \wedge g)^0 = f^0 \wedge g^0$, $(f \vee g)^0 = f^0 \vee g^0$, $\forall f, g \in V$. Lorsque V est auto-adjointe, V^0 est également auto-adjointe et $\overline{f^0} = (\overline{f})^0$ (où $\overline{h}$ désigne la fonction conjuguée complexe associée à h). Finalement, si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite de fonctions de V qui converge uniformément vers $f \in V$, alors f_n^0 converge uniformément vers f^0 . Cela implique que chaque fonction $h \in X_V^0$ est continue sur V par rapport à la topologie de la convergence uniforme.
- c) V sépare les points de X si et seulement si j est injective.
- d) Lorsque X est un espace topologique, j est continue si et seulement si chaque fonction $f \in V$ est continue sur X .
- e) Lorsque X est un espace topologique, nous dirons que X est *complètement régulier* par rapport à V si $\forall x \in X$ et $\forall U$, un voisinage de x dans X , $\exists \{f_i\}_{i=1}^n \subset V$ telle que le point $(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in F^n$ n'appartient pas à la fermeture (dans F^n) de l'ensemble $\{(f_1(y), \dots, f_n(y)) \mid y \in X \setminus U\}$. En adoptant cette définition, on montre facilement que si V sépare les points de X , alors X est complètement régulier par rapport à V si et seulement si j est une fonction ouverte de X vers $j(X)$ lorsque $j(X)$ est munie de la topologie induite par celle de X_V^0 .

On peut résumer les parties c), d), e) des propriétés 2.1 comme suit: (X_V^0, j) est un *compactifié topologique* de X (c'est-à-dire que $j: X \rightarrow j(X)$ est un homéomorphisme) si et seulement si V est un sous-ensemble de la classe de toutes les fonctions continues bornées de X vers F , qui sépare les points de X et par rapport auquel X est complètement régulier.

- f) Revenons au contexte général où X est un ensemble. Si i) V est une algèbre auto-adjointe de fonctions à valeurs dans F définies sur X , contenant une fonction éloignée de zéro (une fonction $f: X \rightarrow F$ est dite *éloignée de zéro* si $\inf\{|f(x)| \mid x \in X\} > \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$) ou ii) $F = \mathbf{R}$ et V est un treillis de fonctions réelles bornées sur X , fermée sous les opérations af et $f + a$ (où $f \in V$, $a \in F$), alors en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, on montre que V^0 est dense dans $(C_b(X_V^0, F), \|\cdot\|_\infty)$, $\|\cdot\|_\infty$ désignant la norme uniforme et $C_b(Y, F)$ la classe de toutes les fonctions continues bornées sur un espace topologique Y , à valeurs dans F .
- g) Désignons par le symbole FV la fermeture uniforme de la plus petite algèbre auto-adjointe de fonctions à valeurs dans F , engendrée par V et les fonctions constantes.

Alors $FV = \{g \circ j \mid g \in C_b(X_V^0, F)\}$ (c'est-à-dire que FV est précisément la classe de toutes les fonctions à valeurs dans F définies sur X , qui admettent une extension continue sur X_V^0). En effet, $V \subset \{g \circ j \mid g \in C_b(X_V^0, F)\}$ et donc, par définition de FV , on a $FV \subset \{g \circ j \mid g \in C_b(X_V^0, F)\}$. De plus $S = \{g \in C_b(X_V^0, F) \mid g \circ j \in FV\}$ contient V^0 et donc S sépare les points de X_V^0 . Par le théorème de Stone-Weierstrass, $S = C_b(X_V^0, F)$ d'où $\{g \circ j \mid g \in C_b(X_V^0, F)\} \subset FV$.

Nous présentons maintenant un résultat qui nous sera très utile à la section 4.

THÉORÈME 2.2. *Soit Y un espace topologique compact séparé et soit S un sous-ensemble dense dans $\langle C_b(Y, F), \|\cdot\|_\infty \rangle$. Alors, si $q: X \rightarrow Y$ est une fonction telle que $g \circ q \in V$, $\forall g \in S$, il existe une unique fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow Y$ telle que $Q \circ j = q$.*

DÉMONSTRATION: Prenons $h \in X_V^0$. Puisque $j(X)$ est dense dans X_V^0 , nous pouvons choisir une suite $\{j(x_\alpha)\}$ dans $j(X)$ telle que $j(x_\alpha) \rightarrow h$. Posons $Q(h) = \lim_\alpha q(x_\alpha)$. Si nous montrons que Q est bien définie, il suivra automatiquement que Q est l'unique fonction continue de X_V^0 vers Y , telle que $Q \circ j = q$. Il nous suffit donc de vérifier que Q est bien définie.

Soit $H \in X_V^0$. Puisque Y est compact, il existe une sous-suite $\{q(x_{\alpha'})\}$ de $\{q(x_\alpha)\}$ qui converge vers un point $y_0 \in Y$. Soit U un voisinage de y_0 dans Y . Y étant un espace compact séparé, alors Y est normal et comme S est dense dans $\langle C_b(Y, F), \|\cdot\|_\infty \rangle$, le lemme d'Urysohn nous permet de dire que $\exists g \in S$ telle que $|g(y_0)| \geq 2$ et $|g(y)| \leq 1, \forall y \in Y \setminus U$. Or, $g \circ q \in V$, d'où

$$\begin{aligned} (g \circ q)^0(h) &= \lim_\alpha (g \circ q)^0(j(x_\alpha)) \\ &= \lim_\alpha (g \circ q)(x_\alpha). \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_\alpha (g \circ q)(x_\alpha)$ existe et donc

$$\lim_\alpha (g \circ q)(x_\alpha) = \lim_{\alpha'} (g \circ q)(x_{\alpha'}) = g(y_0).$$

Par conséquent, $\exists \alpha_0$ tel que $q(x_\alpha) \in U, \forall \alpha \geq \alpha_0$, d'où $\lim_\alpha q(x_\alpha) = y_0$.

Prenons maintenant deux suites $\{j(x_\alpha)\}$ et $\{j(y_\beta)\}$ dans $j(X)$ telle que $j(x_\alpha) \rightarrow h$ et $j(y_\beta) \rightarrow h$. Alors $\forall g \in S$, on a $g \circ q \in V$ et donc

$$\begin{aligned} \lim_\alpha (g \circ q)(x_\alpha) &= (g \circ q)^0(h) \\ &= \lim_\beta (g \circ q)(y_\beta). \end{aligned}$$

Puisque n'importe quel sous-espace dense de $\langle C_b(Y, F), \|\cdot\|_\infty \rangle$ sépare les points de Y , on déduit que $\lim_\alpha q(x_\alpha) = \lim_\beta q(y_\beta)$.

Par conséquent, Q est bien définie et la preuve est maintenant complète. $\square$

Le théorème suivant montre qu'il est possible de construire tous les compactifiés d'un ensemble X à l'aide de X_V^0 , où V est une classe de fonctions de X vers F convenablement choisie tout en étant aussi petite que possible.

THÉORÈME 2.3. *Soit i) V une collection de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur un ensemble X , ii) T un espace compact, et iii) $k: X \rightarrow T$ une fonction telle que $k(X)$ est dense dans T . De plus, supposons que chaque fonction $f \in V$ admet une extension continue $f^T: T \rightarrow F$ telle que $f^T \circ k = f$.*

Alors la fonction $\theta: T \rightarrow X_V^0$ définie par $\theta(t)(f) = f^T(t)$, $\forall f \in V$ et $\forall t \in T$ est une surjection bien définie, continue, et fermée, telle que $\theta \circ k = j$.

De plus, si $\{f^T \mid f \in V\}$ sépare les points de T (d'où T est séparé), alors θ est un homéomorphisme et par conséquent, (T, k) et (X_V^0, j) sont topologiquement équivalents.

DÉMONSTRATION:

- (1) Soit $t \in T$. $k(X)$ étant dense dans T , il existe une suite $\{x_\alpha\} \subset X$, telle que $k(x_\alpha) \rightarrow t$ dans T . Puisque, $\forall f \in V$, f^T est une extension continue de f à T , alors on a

$$\begin{aligned}\theta(t)(f) &= f^T(t) \\ &= \lim_{\alpha} f^T(k(x_\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha} f(x_\alpha) \\ &= \lim_{\alpha} h_{x_\alpha}(f)\end{aligned}$$

et ce $\forall f \in V$. Ainsi, $\theta(t) \in X_V^0$, ce qui montre que θ est bien définie.

- (2) Prenons $t \in T$ et soit $\{t_\alpha\}$ une suite de points dans T qui converge vers t . Alors, $\forall f \in V$, on a

$$\begin{aligned}\theta(t)(f) &= f^T(t) \\ &= \lim_{\alpha} f^T(t_\alpha) \quad (\text{car } f^T: T \rightarrow F \text{ est continue}) \\ &= \lim_{\alpha} \theta(t_\alpha)(f),\end{aligned}$$

d'où $\theta(t_\alpha) \rightarrow \theta(t)$ dans X_V^0 . θ est donc continue.

- (3) Soit F un fermé dans T . Alors F est compact et puisque θ est continue, on a que $\theta(F)$ est compact, d'où $\theta(F)$ est fermé dans X_V^0 . Par conséquent, θ est fermée.
- (4) Soit $x \in X$. Alors, $\forall f \in V$, on a

$$\begin{aligned}((\theta \circ k)(x))(f) &= \theta(k(x))(f) \\ &= f^T(k(x)) \\ &= f(x) \\ &= h_x(f).\end{aligned}$$

Ainsi, $(\theta \circ k)(x) = h_x = j(x)$ et comme x est arbitraire, on déduit que $\theta \circ k = j$.

- (5) Puisque $\theta(k(X)) = j(X)$ est dense dans X_V^0 , il en est de même pour $\theta(T)$. De plus, en vertu de 3), $\theta(T)$ est fermé dans X_V^0 . Par conséquent, $\theta(T) = X_V^0$, d'où θ est surjective.
- (6) Finalement, supposons que $\{f^T \mid f \in V\}$ sépare les points de T . Alors, étant donné $t_1, t_2 \in T$ tels que $t_1 \neq t_2$, $\exists f \in V$ telle que $f^T(t_1) \neq f^T(t_2)$, d'où $\theta(t_1)(f) \neq \theta(t_2)(f)$. On a donc $\theta(t_1) \neq \theta(t_2)$, ce qui montre que θ est injective. θ est donc un homéomorphisme et (T, k) est topologiquement équivalent à (X_V^0, j) .

La preuve du théorème 2.3 est complète. $\square$

EXEMPLES 2.4.

- a) (*Le compactifié de Stone-Čech*). Soit X un espace de Tychonoff et supposons que $V = C_b(X, \mathbb{R})$. Alors (X_V^0, j) est précisément le compactifié de Stone-Čech de X . (Voir par exemple, la construction du compactifié de Stone-Čech dans [9], p. 152.)

- b) (*Le compactifié un-point d'Alexandroff*). Soit X un espace localement compact séparé. Etant donné $x \in X$ et $\mathcal{U}$, un voisinage compact de x dans X , il existe une fonction continue $f_{x,\mathcal{U}}: X \rightarrow [0,1]$ telle que $f_{x,\mathcal{U}}(x) = 1$ et $f_{x,\mathcal{U}}(y) = 0$, $\forall y \in X \setminus \mathcal{U}$. Désignons par V la classe de toutes ces fonctions. (A noter que V n'est ni un espace vectoriel ni un treillis.) Alors, en vertu du théorème précédent, (X_V^0, j) est topologiquement équivalent au compactifié un-point de X . Plus précisément, $X_V^0 = \{h_x \mid x \in X\} \cup \{0\}$ où 0 désigne la fonction identiquement nulle sur V , et la classe des ensembles dans X_V^0 donnée par $\{0\} \cup \{h_x \mid x \in X \setminus \mathcal{U}\}$ (où $\mathcal{U}$ est un compact dans X à intérieur non-vidé) forme une base pour les voisinages de $h = 0$ dans X_V^0 . Finalement, si on pose $U = \{g \circ j \mid g \in C_b(X_V^0, \mathbb{R})\}$ alors on sait que U est précisément la classe de toutes les fonctions continues bornées $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall \varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset X$, pour lequel $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall x, y \in X \setminus K$. A l'aide de la partie g) des propriétés 2.1, on conclut que la plus petite algèbre de fonctions réelles bornées sur X , contenant V et les fonctions constantes, est dense dans $\langle U, \|\cdot\|_\infty \rangle$.
- c) (*La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$*). Considérons la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(x) + 2$ (où par convention $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\forall x \in \mathbb{R}$) et posons $V = \{f\}$. Alors, par le théorème 2.3, (X_V^0, j) est topologiquement équivalent à la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. De façon plus précise,

$$\mathbb{R}_V^0 = \{h_x \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{h_{-\infty}\} \cup \{h_\infty\}$$

où $h_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ et $h_{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, et la classe des ensembles $\{h_x: x > a\} \cup \{h_\infty\}$ (où $a \in \mathbb{R}$) et la classe des ensembles $\{h_x \mid x < b\} \cup \{h_{-\infty}\}$ (où $b \in \mathbb{R}$), forment respectivement une base pour les voisinages ouverts de $h_\infty \in X_V^0$ et $h_{-\infty} \in X_V^0$. Si on pose $U = \{g \circ j \mid g \in C_b(\mathbb{R}_V^0, \mathbb{R})\}$, alors U est précisément la classe de toutes les fonction continues bornées $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ existent. A l'aide des parties f) et g) des propriétés 2.1, on peut conclure que la plus petite algèbre de fonctions réelles bornées sur $\mathbb{R}$, qui contient la fonction f définie ci-haut, est dense dans $\langle U, \|\cdot\|_\infty \rangle$. (Voir H. Helson et F. Quigley [4,5] ainsi que J. Wermer [16, 17, 18,19] pour des résultats comparables lorsque X est un espace compact comme, par exemple, l'intervalle $[0,1]$ ou le cercle.)

- d) (*Le compactifié de Bohr*). Soit X un groupe topologique localement compact, et désignons par V la classe de toutes les fonctions complexes qui sont presque-périodiques sur X . Alors X_V^0 est précisément le compactifié tel que construit par Loomis dans [12], p. 166, et introduit pour la première fois par Bohr lorsque $X = \mathbb{R}$. A savoir comment l'opération est définie dans X_V^0 faisant de ce dernier un groupe, nous renvoyons le lecteur à la section 4. Puisque V est une algèbre de fonctions auto-adjointes, alors X_V^0 demeure inchangé si on remplace V par le sous-ensemble de toutes ses fonctions à valeurs réelles (voir propriétés 2.1.g)).
- e) Soit $c > 0$ et désignons par V le treillis de toutes les fonctions réelles continues linéaires par morceaux sur $\mathbb{R}$, dont la pente de chacun des segments de droite est soit 0, $-c$ ou c . (A noter que V n'est pas un espace vectoriel.) Alors V sépare les points de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est compètement régulier par rapport à V . Ainsi, $(\mathbb{R}_V^0, j)$ est un compactifié topologique de $\mathbb{R}$ tel que chaque fonction $f \in V$ admet une extension continue f^0 à $\mathbb{R}_V^0$. Puisque toutes les fonctions dans V sont uniformément continues, alors la plus petite algèbre de fonctions engendrée par V ne peut être dense dans $\langle C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \rangle$. Cela implique que $\mathbb{R}_V^0$ ne peut être identifié avec le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{R}$. De plus, il est également facile de constater que $\mathbb{R}_V^0$ ne peut être identifié avec le compactifié un-point de $\mathbb{R}$, ou la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Comme corollaire du théorème 2.3, nous obtenons, de manière immédiate, une généralisation d'un résultat démontré pour la première fois par Gelfand et Kolmogoroff (voir [1], p. 274).

COROLLAIRE 2.5. *Pour $j \in \{1, 2\}$, soit i) T_j un espace compact séparé, ii) $k_j: X \rightarrow T_j$ une fonction telle que $k_j(X)$ est dense dans T_j , et iii) V_j la classe de toutes les fonctions à valeurs dans F , définies sur X , qui admettent une extension continue sur T_j . (En fait, $V_j = \{g \circ k_j \mid g \in C_b(T_j, F)\}$.)*

Alors (T_1, k_1) et (T_2, k_2) sont topologiquement équivalents si et seulement si $V_1 = V_2$.

Grâce au corollaire précédent et à la partie g) des propriétés 2.1, nous obtenons facilement des conditions nécessaires et suffisantes pour que (X_U^0, j_U) et (X_V^0, j_V) soient topologiquement équivalents, lorsque U et V sont deux classes de fonctions bornées à valeurs dans F définies sur X .

THÉORÈME 2.6. *Soit U et V deux classes de fonctions bornées à valeurs dans F définies sur X . Alors (X_U^0, j_U) et (X_V^0, j_V) sont topologiquement équivalents si et seulement si $FU = FV$ (ce qui est le cas lorsque $V \subset U \subset FV$).*

Nous obtenons maintenant une généralisation du théorème 2.2, laquelle sera utilisée dans la preuve du théorème 4.9.

COROLLAIRE 2.7. *Si Y est un espace compact séparé et si $q: X \rightarrow Y$ est une fonction alors il existe une (unique) fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow Y$ telle que $Q \circ j = q$ si et seulement si $g \circ q \in FV$ pour toute fonction g appartenant à un sous-ensemble dense donné dans $(C_b(Y, F), \|\cdot\|_\infty)$.*

DÉMONSTRATION: Supposons premièrement qu'il existe une (unique) fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow Y$ telle que $Q \circ j = q$, et prenons $g \in C_b(Y, F)$. Alors, on a $g \circ q = g \circ Q \circ j$ et comme $g \circ Q \in C_b(X_V^0, F)$, on conclut que $g \circ q \in \{h \circ j \mid h \in C_b(X_V^0, f)\}$. Ainsi, grâce à la propriété 2.1.g), on a $g \circ q \in FV$.

Pour montrer la réciproque, il suffit de substituer V à FV dans l'énoncé du théorème 2.2, et ensuite d'appliquer le théorème précédent de façon à identifier X_{FV}^0 avec X_V^0 .

La preuve est complète. $\square$

De façon à mettre en évidence l'utilité du corollaire qui précède, nous allons facilement montrer les deux faits suivants, le premier étant bien connu.

EXEMPLES 2.8.

- a) Soit i) X un espace de Tychonoff, ii) $(\beta X, k)$ le compactifié de Stone-Čech de X , iii) Y un espace compact séparé, et iv) $q: X \rightarrow Y$ une fonction. Alors, il existe une (unique) fonction continue $Q: \beta X \rightarrow Y$ telle que $Q \circ k = q$ si et seulement si q est continue. En effet, la nécessité est évidente. Pour montrer la réciproque, posons $V = C_b(X, \mathbb{R})$. Alors $V = RV$ et $X_V^0 = \beta X$ (voir la partie a) des exemples 2.4). Puisque $g \circ q \in V$, $\forall g \in C_b(Y, \mathbb{R})$, alors on obtient la conclusion désirée en appliquant le corollaire 2.7.

Pour que le lecteur puisse être convaincu de l'efficacité du corollaire 2.7, il lui suffira de comparer la preuve précédente à la preuve donnée dans [9], p. 153.

- b) Soit i) X un espace localement compact séparé, ii) $(\bar{X}, k)$ le compactifié un-point de X , iii) Y un espace compact séparé, et iv) $q: X \rightarrow Y$ une fonction. Alors, il existe une (unique) fonction continue $Q: \bar{X} \rightarrow Y$ telle que $Q \circ k = q$ si et seulement si q est continue et $\forall \{U_i\}_{i=1}^n$, un recouvrement ouvert de Y , $\exists K$, un compact dans X , tel que

$q(X \setminus K)$ est contenu dans au moins un des U_i . Montrons tout d'abord la nécessité. Tout d'abord, il est clair que q doit être continue. Convenons maintenant de désigner par le symbole ∞ l'unique élément de $\overline{X} \setminus X$. Alors, $\exists i$ tel que $Q(\infty) \subset U_i$. Puisque U_i est ouvert et Q est continue, alors par définition de $\overline{X}$, $\exists K$, un compact de X , tel que $Q(X \setminus K \cup \{\infty\}) \subset U_i$. Ainsi $q(X \setminus K) \subset U_i$. Pour montrer la réciproque, désignons par V l'ensemble de toutes les fonctions continues $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$, un compact dans X , pour lequel $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall x, y \in X \setminus K$. Alors $V = \mathbb{R}V$ et de plus, $\overline{X}$ peut être identifié avec X_V^0 en vertu de la partie b) des exemples 2.4 et du théorème 2.3. Prenons maintenant $g \in C_b(Y, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, et choisissons $\{V_i\}_{i=1}^n$, un recouvrement ouvert de $g(Y)$, tel que le diamètre de chaque V_i est inférieur à ε . Posons $U_i = g^{-1}(V_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Alors $\{U_i\}_{i=1}^n$ est un recouvrement ouvert de Y et donc, par hypothèse, $\exists K$, un compact dans X , tel que $q(X \setminus K) \subset U_i$ pour un certain i , d'où $(g \circ q)(X \setminus K) \subset V_i$ pour un certain i . Par conséquent, $|(g \circ q)(x) - (g \circ q)(y)| < \varepsilon$, $\forall x, y \in X \setminus K$ et puisque $g \circ q$ est continue, alors on a $g \circ q \in V$. En appliquant ensuite le corollaire 2.7, on obtient la conclusion voulue.

Pour clore cette section, nous allons donner une troisième application du corollaire 2.7 dans le cadre de groupes de bijections d'un ensemble X vers lui-même.

THÉOREME 2.9. Soit V une classe de fonctions bornées à valeurs dans F définies sur X et soit G un groupe de bijections de X vers X (sous l'opération de composition $\circ$) tel que $f \circ T \in FV$, $\forall f \in V$ et $\forall T \in G$. Alors,

- si $T \in G$, il existe une (unique) fonction continue $T^0: X_V^0 \rightarrow X_V^0$ telle que $T^0 \circ j = j \circ T$. De plus, T^0 est un homéomorphisme et est également l'unique fonction continue de X_V^0 vers X_V^0 , telle que $f^0 \circ T^0 \circ j = f \circ T$, $\forall f \in V$.
- $G^0 = \{T^0 \mid T \in G\}$ est un groupe d'homéomorphismes de X_V^0 vers X_V^0 (toujours sous l'opération $\circ$) et la fonction $\psi: G \rightarrow G^0$ donnée par $\psi(T) = T^0$, $\forall T \in G$, est un homomorphisme de groupes surjectif.
- si on suppose en plus que V sépare les points de X , alors la fonction ψ de la partie b), est un isomorphisme de groupes.

DÉMONSTRATION:

- Soit $T \in G$. Alors $j \circ T$ est une fonction de X vers X_V^0 . Considérons $S = \{g \in C_b(X_V^0, F) \mid g \circ j \circ T \in FV\}$. Alors $S = C_b(X_V^0, F)$ en vertu du théorème de Stone-Weierstrass et du fait que $V^0 \subset S$. Ainsi, le corollaire 2.7 nous permet de conclure qu'il existe une (unique) fonction continue $T^0: X_V^0 \rightarrow X_V^0$ telle que $T^0 \circ j = j \circ T$. Nous verrons, dans la preuve de la partie b), que T^0 est également un homéomorphisme.

Maintenant, si $f \in V$, alors il est clair que $f^0 \circ T^0 \circ j = f \circ T$. Finalement, soit $d: X_V^0 \rightarrow X_V^0$ une fonction continue de X_V^0 vers X_V^0 telle que $f^0 \circ d \circ j = f \circ T$, $\forall f \in V$. Alors $d \circ j = j \circ T$. En effet, si on suppose le contraire, $\exists x \in X$ tel que $(d \circ j)(x) \neq (j \circ T)(x)$. Comme $V^0 = \{f^0 \mid f \in V\}$ sépare les points de X_V^0 , $\exists f \in V$ telle que $f^0[(d \circ j)(x)] \neq f^0[(j \circ T)(x)]$, d'où $(f^0 \circ d \circ j)(x) \neq (f^0 \circ T^0 \circ j)(x)$ (c'est-à-dire que $(f^0 \circ d \circ j)(x) \neq (f \circ T)(x)$). Cela contredit l'hypothèse de départ et donc, on doit avoir $d \circ j = j \circ T$. Ainsi, d est une extension continue de $j \circ T$ à X_V^0 , d'où $d = T^0$, ce qui termine la preuve de la partie a).

- Or, $I_X \in G$ et si $x \in X$, on a $(I_X)^0(h_x) = h_x$ et comme $(I_X)^0$ est continue sur X_V^0 et $j(X)$ est dense dans X_V^0 , alors on en déduit que $(I_X)^0(h) = h$, $\forall h \in X_V^0$, d'où $I_{X_V^0} = (I_X)^0 \in G^0$.

De plus, si $S, T \in G$, alors $(S \circ T)^0 \circ j = (S^0 \circ T^0) \circ j$ et donc, encore une fois, le fait que $j(X)$ soit dense dans X_V^0 et que $S^0 \circ T^0$ et $(S \circ T)^0$ soient continues sur X_V^0 , entraîne que $S^0 \circ T^0 = (S \circ T)^0 \in G^0$.

Finalement, si $T \in G$, alors, par ce qui précède, on a

$$T^0 \circ (T^{-1})^0 = (T^{-1})^0 \circ T^0 = (I_X)^0 = I_{X_V^0},$$

d'où $(T^0)^{-1} = (T^{-1})^0 \in G^0$ (et donc T^0 est un homéomorphisme).

Par conséquent, G^0 est un groupe d'homéomorphismes de X_V^0 vers X_V^0 et la fonction ψ , décrite dans l'énoncé du présent théorème, est évidemment un homomorphisme surjectif de G vers G^0 .

- c) Il suffit de montrer que si $T^0 = I_{X_V^0}$ alors $T = I_X$. Or, $\forall x \in X$, on a $h_x = T^0(h_x) = (T^0 \circ j)(x) = (j \circ T)(x) = h_{T(x)}$, d'où $f(x) = f(T(x))$, $\forall f \in V$. Puisque V sépare les points de X , alors $T(x) = x$ et ainsi, $T = I_X$. ψ est donc un isomorphisme de groupes.

La preuve du théorème 2.9 est maintenant complète. $\square$

EXEMPLE 2.10.

Désignons par V la classe de toutes les fonctions bornées $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui possèdent, en tout point $x \in \mathbb{R}$, des limites à gauche et à droite notées respectivement $f(x-)$ et $f(x+)$. A noter que V est une algèbre de fonctions contenant les fonctions constantes. $\forall x \in \mathbb{R}$, désignons respectivement par h_{x-} et h_{x+} les fonctions sur V définies par $h_{x-}(f) = f(x-)$ et $h_{x+}(f) = f(x+)$, $\forall f \in V$. Alors, on montre facilement que

$$\mathbf{R}_V^0 = \{h_x \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{h_{x-} \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{h_{x+} \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Désignons maintenant par G l'ensemble de toutes les fonctions continues, surjectives, et strictement croissantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Alors $\langle G, \circ \rangle$ est un groupe de bijections de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, tel que $\{f \circ T \mid f \in V\} = V$, $\forall T \in G$. Etant donné $T \in G$, posons $T^0(h_x) = h_{T(x)}$, $T^0(h_{x-}) = h_{T(x)-}$, et $T^0(h_{x+}) = h_{T(x)+}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors T^0 est un homéomorphisme et est l'unique fonction continue de $\mathbf{R}_V^0$ vers $\mathbf{R}_V^0$, telle que $T^0 \circ j = j \circ T$ ou telle que $f^0 \circ T^0 \circ j = f \circ T$, $\forall f \in V$. De plus, si on pose $G^0 = \{T^0 \mid T \in G\}$, alors $\langle G^0, \circ \rangle$ est un groupe et comme V sépare les points de X , la fonction

$$\begin{aligned} \psi: G &\rightarrow G^0 \\ T &\rightarrow T^0 \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

3. Une représentation concrète des compactifiés. Lorsque V est une collection de fonctions réelles bornées sur un ensemble X , fermée sous les opérations $(f - a) \vee 0$ et $(a - f) \vee 0$ (où $f \in V$, $a \in \mathbf{R}$), nous avons la représentation concrète suivante de X_V^0 en termes de certains sous-ensembles de V .

THÉOREME 3.1. *Si V est une collection de fonctions réelles bornées sur X , fermée sous les opérations $(f - a) \vee 0$ et $(a - f) \vee 0$ (où $f \in V$, $a \in \mathbf{R}$), alors les conclusions qui suivent sont vérifiées:*

- a) *La classe des ensembles de la forme $\{h \in X_V^0 \mid h(f) = 0\}$ (où $f \in V$) forme une sous-base pour les fermés de X_V^0 .*
- b) *Si $\forall h \in X_V^0$, nous posons $x_h^* = \{f \in V \mid h(f) = 0\}$ alors $\{x_h^* \mid h \in X_V^0\}$ est précisément la collection des sous-ensembles x^* de V qui sont maximaux par rapport à la propriété (*): un sous-ensemble x^* de V possède la propriété (*) si $\forall \{f_i\}_{i=1}^n \subset x^*$, $\bigvee_{i=1}^n |f_i|$ n'est pas éloignée de zéro.*
- c) *Si nous posons $X_V^* = \{x_h^* \mid h \in X_V^0\}$ et si nous munissons X_V^* de la topologie ayant comme sous-base pour les fermés, les ensembles de la forme $F(f) = \{x^* \in X_V^* \mid f \in x^*\}$ (où $f \in V$), alors la correspondance $\theta: X_V^0 \rightarrow X_V^*$ donnée par $\theta(h) = x_h^*$, $\forall h \in X_V^0$, est un homéomorphisme.*
- d) *Etant donné $f \in V$, la fonction f^* définie sur X_V^* par*

$$f^*(x^*) = \inf\{a \in \mathbf{R} \mid (f - a) \vee 0 \in x^*\}$$

est l'unique extension continue de f à X_V^* (c'est-à-dire qu'on a $f^* \circ \theta \circ j = f$).

DÉMONSTRATION:

- a) Il est clair que la collection des ensembles de la forme $\{h \in X_V^0 \mid b \leq h(f) \leq a\}$ (où $-\infty < b \leq a < \infty$, $f \in V$) est une sous-base pour les fermés de X_V^0 . Mais $\{h \in X_V^0 \mid b \leq h(f) \leq a\} = \{h \in X_V^0 \mid h((b - f) \vee 0) = 0\} \cap \{h \in X_V^0 \mid h((f - a) \vee 0) = 0\}$ d'où la classe des ensembles de la forme $\{h \in X_V^0 \mid h(f) = 0\}$ (où $f \in V$), forme une sous-base pour les fermés de X_V^0 .
- b) i) Soit $h \in X_V^0$ et montrons que x_h^* possède la propriété (*). Choisissons $\{f_i\}_{i=1}^n \subset x_h^*$ et $\varepsilon > 0$. De plus, prenons une suite $\{x_\alpha\} \subset X$ telle que $h_{x_\alpha} \rightarrow h$ dans X_V^0 . Alors $h_{x_\alpha}(f_i) \rightarrow h(f_i)$ dans F , pour $i = 1, \dots, n$. Puisque $\forall i$, on a $h(f_i) = 0$, $\exists \alpha_0$ tel que $|f_i(x_\alpha)| < \varepsilon$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$, et pour $i = 1, \dots, n$. Ainsi, $\bigvee_{i=1}^n |f_i|$ n'est pas éloignée de zéro, d'où x_h^* possède la propriété (*).

ii) Supposons que $x^* \subset V$ possède la propriété (*), et montrons que $\exists h \in X_V^0$ telle que $x^* \subset x_h^*$. Si on prend $\{f_i\}_{i=1}^n \subset x^*$, alors par la propriété (*), on a que pour tout entier $m \geq 1$, $\exists x \in X$ tel que $|f_i(x)| < \frac{1}{m}$ pour $i = 1, \dots, n$. Puisque X_V^0 est compact, la propriété d'intersection finie nous permet de conclure que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \{h \in X_V^0 \mid |h(f_i)| \leq \frac{1}{m}; i = 1, \dots, n\} \neq \emptyset.$$

Ainsi $\exists h \in X_V^0$ telle que $h(f_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

Nous avons donc montré que la classe des ensembles de la forme $\{h \in X_V^0 \mid h(f) = 0\}$ (où $f \in x^*$) possède la propriété d'intersection finie. Encore une fois, le fait que X_V^0 soit compact, nous permet de déduire que

$$\bigcap_{f \in x^*} \{h \in X_V^0 \mid h(f) \leq 0\} \neq \emptyset,$$

d'où $\exists h \in X_V^0$ telle que $x^* \subset x_h^*$.

iii) Prenons $h \in X_V^0$. Par i), nous savons que x_h^* possède la propriété (*). Montrons maintenant que x_h^* est maximal par rapport à cette propriété. Pour ce faire, supposons le contraire. Alors $\exists x^* \subset V$ tel que x^* possède la propriété (*) et contient x_h^* comme sous-ensemble propre. En vertu de ii), $\exists h' \in X_V^0$ telle que $x^* \subset x_{h'}^*$. Ainsi, x_h^* est un sous-ensemble propre de $x_{h'}^*$, d'où $\exists f \in V$ avec $h'(f) = 0$ et $h(f) > 0$. Nous avons alors $(h(f) - f) \vee 0 \in x_h^* \setminus x_{h'}^*$, ce qui contredit le fait que $x_h^* \subset x_{h'}^*$. x_h^* doit donc être maximal par rapport à la propriété (*). Par conséquent, grâce à i), ii) et iii), on peut conclure que $\{x_h^* \mid h \in X_V^0\}$ est précisément la classe des ensembles $x^* \subset V$ qui sont maximaux par rapport à la propriété (*).

- c) Grâce à la partie b), on a que θ est bien définie et surjective. De plus, θ est injective. En effet, soit $h, h' \in X_V^0$ telles que $h \neq h'$. Alors $\exists f \in V$ telle que $h(f) \neq h'(f)$. En supposant sans perte de généralités que $h(f) < h'(f)$, nous avons $(f - h(f)) \vee 0 \in x_h^* \setminus x_{h'}^*$, d'où $x_h \neq x_{h'}$. Cela montre que θ est injective, d'où θ est bijective.

Finalement, θ est bicontinue car

$$\begin{aligned} \theta(\{h \in X_V^0 \mid h(f) = 0\}) &= \{x_h^* \mid h \in X_V^0; h(f) = 0\} \\ &= \{x^* \in X_V \mid f \in x^*\} \quad (\text{car } \theta \text{ est surjective}) \\ &= F(f). \end{aligned}$$

- d) Soit $x^* \in X_V^*$. Alors $\exists h \in X_V^0$ telle que $x^* = x_h^*$. De plus, il est clair que l'on doit avoir $f^*(x_h^*) = f^0(h)$. Mais,

$$\begin{aligned} f^0(h) &= h(f) \\ &= \inf\{a \in \mathbf{R} \mid h(f) \leq a\} \\ &= \inf\{a \in \mathbf{R} \mid h((f - a) \vee 0) = 0\} \\ &= \inf\{a \in \mathbf{R} \mid (f - a) \vee 0 \in x_h^*\} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } f^*(x^*) = \inf\{a \in \mathbf{R} \mid (f - a) \vee 0 \in x^*\}$$

La preuve du théorème est complète. $\square$

REMARQUE 3.2. Supposons que, dans le contexte du théorème 3.1, V soit également un treillis. Alors la classe des ensembles $\{F(f) \mid f \in V\}$ est en fait une base pour les fermés de X_V^* . En effet, si on prend $g, h \in V$ et $x^* \in X_V^*$ tels que $x^* \not\subset F(g) \cup F(h)$, alors $\exists f', f'' \in x^*$ telles que $f' \vee g$ et $f'' \vee h$ sont des fonctions positives éloignées de zéro. Ainsi, si on pose $f = f' \vee f''$, alors $f \in x^*$ et $f \vee (g \wedge h)$ est une fonction positive éloignée de zéro. Par conséquent, $F(g) \cup F(h) \subset F(g \wedge h)$ et $x^* \not\subset F(g \wedge h)$, ce qui montre que $\{F(f) \mid f \in V\}$ est une base pour les fermés de X_V^* .

Nous donnerons une application intéressante du théorème 3.1, à la section 4.

4. Applications aux algèbres et aux treillis de fonctions. Rappelons tout d'abord qu'une fonctionnelle linéaire M sur une algèbre V de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur un ensemble X , est dite *positive* si $Mf \geq 0$ lorsque $f \in V$ et $f \geq 0$, et *multiplicative* si $M(fg) = (Mf)(Mg)$, $\forall f, g \in V$. A noter que, lorsque $F = \mathbf{R}$ et V est en plus fermée sous les racines carrées (ce qui est le cas lorsque V est fermée par rapport à la norme uniforme), alors une fonctionnelle linéaire multiplicative sur V , est nécessairement positive. De façon similaire, un opérateur $U: V \rightarrow V$ est *positif* si $Uf \geq 0$ lorsque $f \in V$ et $f \geq 0$, et *multiplicatif* si $U(fg) = (Uf)(Ug)$, $\forall f, g \in V$.

PROPOSITION 4.1. Supposons que i) V soit une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur X , contenant une fonction éloignée de zéro, ou que ii) $F = \mathbb{R}$ et V soit un treillis vectoriel de fonctions réelles bornées sur X , contenant les fonctions constantes.

Alors, étant donné $L: V \rightarrow F$, une fonctionnelle linéaire bornée par rapport à $\|\cdot\|_\infty$, il existe une unique mesure complexe régulière u définie sur les ensembles boréliens de X_V^0 , telle que

$$Lf = \int_{X_V^0} f^0 du, \quad \forall f \in V.$$

De plus, $\forall W$, un ouvert de X_V^0 , on a

$$u(W) = \sup\{Lf \mid 0 \leq f^0 \leq 1_W; f \in V\}$$

(où 1_W désigne la fonction indicatrice associée à W). Finalement, si L est positive, alors u est positive.

DÉMONSTRATION: Définissons $L^0: V^0 \rightarrow F$ par $L^0 f^0 = Lf$, $\forall f \in V$. Alors L^0 est une fonctionnelle linéaire sur V^0 qui est bornée par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. Puisque V^0 est dense dans $C_b(X_V^0, F)$ (voir propriétés 2.1.f), nous obtenons notre résultat en appliquant le théorème de représentation de Riesz (voir [15], p. 139). $\square$

La proposition 4.4 dont l'énoncé est donné un peu plus loin, est d'une importance fondamentale dans l'élaboration de la présente section. Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin de la proposition précédente ainsi que des deux lemmes suivants:

LEMME 4.2. Soit V une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur un ensemble X , et posons $U = \{f + a \mid f \in V; a \in F\}$. (A noter que $U = V$ si V contient les fonctions constantes.)

Alors, toute fonctionnelle linéaire multiplicative positive non-nulle sur V admet une (unique) extension linéaire multiplicative positive sur U .

DÉMONSTRATION: Soit M une fonctionnelle linéaire multiplicative positive non-nulle sur V . Alors $\exists g \in V$ telle que $g \geq 0$ et $Mg = 1$. Posons $M'(f + a) = Mf + a$, $\forall f \in V$ et $\forall a \in F$. Alors, il est clair que M' est une fonctionnelle linéaire et multiplicative bien définie, et que $M'1 = 1$. Finalement, M' est positive car si $f + a \geq 0$ (où $f \in V$, $a \in F$), alors comme $g \geq 0$, on a que $(f + a)g \geq 0$, et donc le fait que M soit positive entraîne que

$$\begin{aligned} M'(f + a) &= Mf + a \\ &= M[(f + a)g] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, M est positive, ce qui termine la preuve du lemme 4.2. $\square$

LEMME 4.3. Soit Y un espace localement compact séparé et soit u une mesure régulière positive non-nulle sur les ensembles boréliens de Y .

Alors le support de u consiste en un point de Y , si et seulement si, $\forall A$, borélien de Y , $u(A) = u(Y)$ ou $u(A) = 0$.

DÉMONSTRATION: La nécessité est évidente. Pour montrer la réciproque, on procède de la façon suivante:

Puisque $u(Y) \neq 0$, supposons sans perte de généralités que $u(Y) = 1$. Posons $\mathcal{K} = \{K \subset Y \mid K \text{ est compact et } u(K) = 1\}$. Alors $\mathcal{K}$ possède la propriété d'intersection finie, d'où

$$Z = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \neq \emptyset.$$

De plus, $u(Z) = 1$. En effet, si on supposait que $u(Z) = 0$, alors comme u est régulière, on aurait que $\exists K$, un compact dans Y , tel que $K \cap Z = \emptyset$ et $u(K) = 1$. Par la définition même de Z , on aurait alors $Z \subset K$, d'où $Z = \emptyset$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, $u(Z) = 1$.

Prenons maintenant $y \in Z$. Alors $Z \setminus \{y\}$ est un ensemble borélien de Y . Ainsi, si on suppose que $u(\{y\}) \neq 1$ (c'est-à-dire que $u(\{y\}) = 0$), alors $u(Z \setminus \{y\}) = u(Z) - u(\{y\}) = 1$ et donc, la régularité de u nous permet de dire que $\exists K'$, un compact inclus dans $Z \setminus \{y\}$, tel que $u(K') = 1$. Cela contredit la définition de Z , et donc, on doit avoir $u(\{y\}) = 1$ (d'où $Z = \{y\}$), ce qui montre que le support de u est $\{y\}$.

La preuve est complète. $\square$

PROPOSITION 4.4.

- Si V est une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur X , et si M est une fonctionnelle linéaire multiplicative positive non-nulle sur V , alors on a nécessairement $M \in X_V^0$. (A noter que la réciproque est également vraie lorsque V contient les fonctions constantes.)
- Si V est un treillis vectoriel de fonctions réelles bornées sur X , contenant les fonctions constantes, et si $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle linéaire non-nulle telle que $L(|f|) = |Lf|$, $\forall f \in V$, alors $L1 > 0$ et $\exists h \in X_V^0$ telle que $L = (L1)h$.

DÉMONSTRATION:

- En vertu du lemme 4.2, il suffit de considérer le cas où V contient les fonctions constantes (à valeurs dans F) sur X . De plus, grâce à la proposition 4.1, il existe une unique mesure positive régulière (non-nulle) u sur les ensembles boréliens de X_V^0 , telle que

$$Mf = \int_{X_V^0} f^0 du, \quad \forall f \in V.$$

Puisque M est multiplicative, alors $M(f^2) = (Mf)^2$, $\forall f \in V$, et donc si W est un ouvert de X_V^0 , on a

$$\begin{aligned} u(W) &= \sup\{Mf \mid 0 \leq f^0 \leq 1_W; f \in V\} \\ &= \sup\{M(g^2) \mid 0 \leq g^0 \leq 1_W; g \in V\} \\ &= (u(W))^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la régularité de u nous permet de conclure que $u(E) = (u(E))^2$ (c'est-à-dire que $u(E) \in \{0, 1\}$), $\forall E$, un ensemble borélien de X_V^0 . En vertu du lemme 4.3, on peut alors conclure que le support de u consiste en un point de X_V^0 , et par conséquent, que $M \in X_V^0$.

- Par hypothèse, L est positive (et donc bornée par rapport à $\|\cdot\|_\infty$) et $L(f \vee g) = \max(Lf, Lg)$, $\forall f, g \in V$. La proposition 4.1 nous permet donc de conclure qu'il existe une unique mesure positive régulière non-nulle sur les ensembles boréliens de X_V^0 , telle que

$$Lf = \int_{X_V^0} f^0 du, \quad \forall f \in V.$$

De plus, comme V^0 est dense dans $\langle C_b(X_V^0, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty \rangle$ (voir propriétés 2.1.f), on a alors que

$$\int_{X_V^0} (q_1 \vee q_2) du = \max\left(\int_{X_V^0} q_1 du, \int_{X_V^0} q_2 du\right), \quad \forall q_1, q_2 \in C_b(X_V^0, \mathbf{R}).$$

Montrons maintenant que le support de u consiste en un point de X_V^0 . Si on suppose le contraire, alors, par le lemme 4.3, $\exists A$, un ensemble borélien de X_V^0 , tel que $u(A) > 0$ et $u(X_V^0 \setminus A) > 0$. Grâce à la régularité de u , $\exists K_1, K_2$, des ensembles compacts dans X_V^0 tels que $K_1 \subset A$, $K_2 \subset X_V^0 \setminus A$ et $u(K_i) > 0$ ($i = 1, 2$). De plus, puisque tout espace compact séparé est normal, $\exists U_1, U_2$, des ouverts de X_V^0 , tels que $U_1 \supset K_1$, $U_2 \supset K_2$, et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Par le lemme d'Urysohn, $\exists q_1, q_2 \in C_b(X_V^0, \mathbf{R})$ telles que $0 \leq q_i \leq 1$, $q_i(K_i) = \{1\}$ et $q_i(X_V^0 \setminus U_i) = \{0\}$, ($i = 1, 2$). Puisque $\int_{X_V^0} q_i du > 0$, $\forall i$, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &> \max\left(\int_{X_V^0} (-q_1) du, \int_{X_V^0} (-q_2) du\right) \\ &= \int_{X_V^0} (-q_1 \vee -q_2) du \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où la contradiction. Ainsi le support de u consiste en un point $h \in X_V^0$, d'où $L1 = u(X_V^0) > 0$ et $L = (L1)h$.

La preuve est complète. $\square$

COROLLAIRE 4.5. Soit i) V une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur X , et ii) M une fonctionnelle linéaire multiplicative sur V .

Alors M est positive si et seulement si M est bornée par rapport à $\|\cdot\|_\infty$.

DÉMONSTRATION: La nécessité étant une conséquence immédiate de la partie a) de la proposition 4.4 et de la partie b) des propriétés 2.1, il nous reste seulement à montrer la réciproque.

En répétant les idées de la preuve du lemme 4.2, on peut montrer que M admet une (unique) extension M' à $U = \{f + a \mid f \in V; a \in F\}$, qui est linéaire multiplicative et bornée par rapport $\|\cdot\|_\infty$. Or, en vertu de la proposition 4.1, il existe une unique mesure complexe régulière u sur les ensembles boréliens de X_V^0 , telle que

$$M'g = \int_{X_V^0} g^0 du, \quad \forall g \in U.$$

Maintenant, il existe une fonction mesurable de Borel $h: X_V^0 \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $|h| = 1$ et $du = h d|u|$ où $|u|$ désigne la mesure variation totale associée à u (voir, par exemple, [15], p. 133). Puisque M' est multiplicative sur U et U^0 est dense dans $\langle C_b(X_V^0, F), \|\cdot\|_\infty \rangle$ (voir propriétés 2.1.f), alors en appliquant le théorème de Lusin, on obtient

$$\left(\int_A \bar{h} du\right)^2 = \int_A \bar{h}^2 du,$$

$\forall A$, un ensemble borélien de X_V^0 (où $\bar{h}$ désigne la fonction conjuguée complexe associée à h).

Ainsi $h = 1$ presque partout par rapport à $|u|$, d'où $u = |u|$. Par conséquent, M' (et donc M) est positive. Ce qui termine la démonstration. $\square$

Voici maintenant un premier résultat concernant les opérateurs pouvant être induits par une transformation ponctuelle continue sur l'espace compact X_V^0 .

THÉORÈME 4.6.

- a) Soit i) V une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur X , ii) $U: V \rightarrow V$ un opérateur linéaire positif et multiplicatif, et iii) 0 la fonction nulle sur V (avec $f^0(0) = 0, \forall f \in V$).

Alors il existe une unique fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow X_V^0 \cup \{0\}$ telle que $Uf = f^0 \circ Q \circ j, \forall f \in V$ (où $X_V^0 \cup \{0\}$ transporte la topologie faible-étoile).

- b) Soit i) V un treillis vectoriel de fonctions réelles bornées sur X , contenant les fonctions constantes, et ii) $U: V \rightarrow V$ un opérateur linéaire tel que $U(|f|) = |Uf|, \forall f \in V$. De plus, désignons par iii) K l'intervalle fermé $[\inf_{x \in X}(U1)(x), \sup_{x \in X}(U1)(x)]$, iv) KX_V^0 l'ensemble $\{ah \mid a \in K; h \in X_V^0\}$ muni de la topologie faible-étoile sur lequel on définit f^0 par $f^0(ah) = a h(f), \forall a \in K$ et $\forall h \in X_V^0$.

Alors il existe une unique fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow KX_V^0$ telle que $Uf = f^0 \circ Q \circ j, \forall f \in V$.

DÉMONSTRATION: Nous montrons les parties a) et b) simultanément. Définissons Q sur X_V^0 par $Q(h) = h \circ U, \forall h \in X_V^0$. Alors, par la proposition 4.4, Q est une fonction bien définie et ce dans les deux cas a) et b). Il est clair que Q est également continue sur X_V^0 . De plus, si $f \in V$ alors $\forall x \in X$, nous avons

$$\begin{aligned} (f^0 \circ Q \circ j)(x) &= f^0(Q(h_x)) \\ &= Q(h_x)(f) \\ &= h_x(Uf) \\ &= (Uf)(x). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f^0 \circ Q \circ j = Uf$. Finalement, nous pouvons facilement vérifier que si Q' est une fonction continue sur X_V^0 , telle que $Uf = f^0 \circ Q' \circ j, \forall f \in V$, alors $Q' = Q$. Cela complète la démonstration. $\square$

EXEMPLE 4.7. Soit V telle que définie à l'exemple 2.10 et soit $U: V \rightarrow V$ définie par $(Uf)(x) = f(x-)$ (où $x \in \mathbf{R}$). Alors la fonction $Q: \mathbf{R}_V^0 \rightarrow \mathbf{R}_V^0$ donnée par $Q(h_x) = h_{x-}$, $Q(h_{x-}) = h_{x-}$ et $Q(h_{x+}) = h_{x+}$ est l'unique fonction continue sur $\mathbf{R}_V^0$ telle que $Uf = f^0 \circ Q \circ j, \forall f \in V$.

La classe des transformées Fourier-Stieltjes des mesures régulières boréliennes complexes sur $\mathbf{R}$, constitue un exemple important d'une algèbre auto-adjointe V de fonctions complexes bornées 1) qui contient les fonctions constantes, 2) qui est une algèbre de Banach (par rapport à la norme variation totale) et 3) qui est telle que $\mathbf{R}_V^0$ n'est pas égale à l'espace des idéaux maximaux associés à V (voir [13], p. 108). Pour de telles algèbres de Banach asymétriques, nous avons tout de même le résultat suivant:

PROPOSITION 4.8. Soit V une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées complexes sur un ensemble X , qui contient les fonctions constantes et qui est de plus une algèbre de Banach (par rapport à une certaine norme) dont l'espace des idéaux maximaux est noté Δ_V .

Alors, étant donné un opérateur linéaire inversible positif et multiplicatif $U: V \rightarrow V$ tel que $U1 = 1$, il existe une transformation inversible continue $T: \Delta_V \rightarrow \Delta_V$ telle que $T(X_V^0) \subset X_V^0$ et $Uf = f^0 \circ T \circ j, \forall f \in V$.

DÉMONSTRATION: Soit $T: \Delta_V \rightarrow \Delta_V$ définie par $T(h) = h \circ U, \forall h \in \Delta_V$. Alors T est une fonction continue de Δ_V vers Δ_V qui est telle que $T(h)$ est positif lorsque $h \in \Delta_V$ est

positif. Ainsi, grâce à la partie a) de la proposition 4.4, on déduit que $T(X_V^0) \subset X_V^0$. De plus, si $f \in V$, alors il est clair que $f^0 \circ T \circ j = Uf$.

Montrons maintenant que T est inversible. Si $T(h_1) = T(h_2)$, alors $h_1(Uf) = h_2(Uf)$, $\forall f \in V$. Puisque U est surjective alors il faut que $h_1 = h_2$, d'où T est injective. De plus, si on prend $h \in \Delta_V$, alors $h' \in \Delta_V$ définie par $h' = h \circ U^{-1}$ est telle que $T(h') = h$, et donc T est surjective. Par conséquent, T est une transformation inversible de Δ_V vers Δ_V , et la démonstration est complète. $\square$

Nous utilisons maintenant le corollaire 2.7 ainsi que la proposition 4.4 afin de démontrer le résultat très général qui suit:

THÉORÈME 4.9. Soit i) V un espace vectoriel de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur un ensemble X , ii) W une classe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur un ensemble Y , iii) $U: V \rightarrow W$ une fonction, iv) Z un sous-ensemble de Y tel que $\forall z \in Z$, la fonction $f \mapsto (Uf)(z)$ est linéaire, positive et non-nulle et v) $\bar{Z}$ la fermeture de $\{h_z \mid z \in Z\}$ dans Y_W^0 .

Alors, nous avons les conclusions suivantes:

- a) Si, de plus, V est une algèbre auto-adjointe et $U(fg)(z) = (Uf)(z)(Ug)(z)$, $\forall z \in Z$ et $\forall f, g \in V$, alors il existe une unique fonction continue $Q: \bar{Z} \rightarrow X_V^0$ telle que $(Uf)(z) = (f^0 \circ Q \circ j_W)(z)$, $\forall z \in Z$ et $\forall f \in V$.
- b) Si $F = \mathbf{R}$ et si, de plus, 1) V est un treillis contenant les fonctions constantes et satisfaisant la propriété: $\forall f \in V$, $\exists g \in \mathbf{R}W$ telle que $(Uf)(z) = (U1)(z)g(z)$, $\forall z \in Z$ (ce qui est nécessairement le cas lorsque $U1$ est éloignée de zéro) et 2) $U(|f|)(z) = |Uf|(z)$, $\forall z \in Z$ et $\forall f \in V$, alors il existe une unique fonction continue $Q: \bar{Z} \rightarrow X_V^0$ telle que $(Uf)(z) = (U1)(z)(f^0 \circ Q \circ j_W)(z)$, $\forall z \in Z$ et $\forall f \in V$.

DÉMONSTRATION:

- a) Grâce à la partie a) de la proposition 4.4, il existe une unique fonction $q: Z \rightarrow X_V^0$ telle que $(Uf)(z) = f^0(q(z))$, $\forall z \in Z$ et $\forall f \in V$. Maintenant, étant donné $g \in W$, posons $g' = g|_Z$ et par la suite, posons $W' = \{g' \mid g \in W\}$. Alors $f^0 \circ q = (Uf)' \in W'$, $\forall f \in V$, et puisque $\{f^0 + a \mid f \in V; a \in F\}$ est dense dans $\langle C_b(X_V^0, F), \|\cdot\|_\infty \rangle$ (par le théorème de Stone-Weierstrass), il résulte que $g \circ q \in FW'$ pour tout g appartenant à un sous-ensemble dense dans $\langle C_b(X_V^0, F), \|\cdot\|_\infty \rangle$. Ainsi, grâce au corollaire 2.7, il existe une unique fonction continue $Q: Z_{W'}^0 \rightarrow X_V^0$ telle que $Q \circ j_W = q$. On a donc $(Uf)(z) = (f^0 \circ Q \circ j_{W'})(z)$, $\forall z \in Z$ et $\forall f \in V$ et, par conséquent, la partie a) du présent théorème est une conséquence immédiate de ce qui précède et du fait que $(\bar{Z}, j_W|_Z)$ et $(Z_{W'}^0, j_{W'})$ sont topologiquement équivalents.
- b) Grâce à la partie b) de la proposition 4.4, il existe une unique fonction $q: Z \rightarrow X_V^0$ telle que $(Uf)(z) = (U1)(z)(f^0 \circ q)(z)$, $\forall z \in Z$ et $\forall f \in V$. Comme précédemment, posons $g' = g|_Z$, $\forall g \in W$ et par la suite, posons $W' = \{g' \mid g \in W\}$. Alors, $\forall f \in V$, $f^0 \circ q = (Uf)'/(U1)'$ qui, par hypothèse, est un élément de $\mathbf{R}W'$. Puisque $\{f^0 + a \mid f \in V; a \in \mathbf{R}\}$ est dense dans $\langle C_b(X_V^0, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty \rangle$ on a donc que $g \circ q \in \mathbf{R}W'$ pour tout g appartenant à un sous-ensemble dense dans $\langle C_b(X_V^0, F), \|\cdot\|_\infty \rangle$. Le corollaire 2.7 nous permet donc de conclure qu'il existe une unique fonction continue $Q: Z_{W'}^0 \rightarrow X_V^0$ telle que $Q \circ j_{W'} = q$ d'où $(Uf)(z) = (U1)(z)(f^0 \circ Q \circ j_{W'})(z)$, $\forall z \in Z$ et $\forall f \in V$. Par conséquent, on obtient notre résultat en vertu de ce qui précède et du fait que $(\bar{Z}, j_W|_Z)$ et $(Z_{W'}^0, j_{W'})$ sont topologiquement équivalents.

La preuve est maintenant complète. $\square$

REMARQUE 4.10.

- a) Dans le contexte du théorème 4.9 avec $V = W$, $X = Y = Z$ et $U1 = 1 \in V$, il est clair, dans les deux parties a) et b), que si nous écrivons $Q^*: X_V^* \rightarrow X_V^*$ pour désigner la transformation correspondant à Q sur X_V^* (voir théorème 3.1 pour les notations), alors Q^* a un point fixe dans X_V^* si et seulement si $\exists x^* \in X_V^*$ tel que $(U - I)V \subset x^*$ (où I désigne l'opérateur identité).
- b) Dans le contexte de la partie a) du théorème 4.9 avec $V = W$, $X = Y = Z$ et $U1 = 1 \in V$, alors étant donné une fonctionnelle linéaire positive L sur V telle que $L(Uf) = Lf$, $\forall f \in V$, il existe une unique mesure positive borélienne régulière u sur X_V^0 par rapport à laquelle Q est invariante (c'est-à-dire $u(Q^{-1}(E)) = u(E)$, $\forall E$, un ensemble borélien dans X_V^0) et qui satisfait la relation

$$Lf = \int_{X_V^0} f^0 du, \quad \forall f \in V.$$

La preuve de cela est semblable à celle de la proposition 3.1 et est une simple application du théorème de représentation de Riesz. A noter que S. Kwapien [11], p. 178, a montré que, si m désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, alors, à une constante multiplicative près, la seule fonctionnelle linéaire sur $L^\infty([0, 1], m)$ qui est invariante sous toutes les transformations inversibles m -invariantes, est l'intégrale par rapport à m .

COROLLAIRE 4.11.

- a) Soit i) V une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur un ensemble X , ii) $U: V \rightarrow V$ un opérateur linéaire positif multiplicatif tel que $\forall x \in X$, $\exists f \in V$ telle que $(Uf)(x) \neq 0$.

Alors, il existe une unique fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow X_V^0$ telle que $Uf = f^0 \circ Q \circ j$, $\forall f \in V$. De plus, $\forall n \geq 1$, on a

$$U^n f = f^0 \circ Q^n \circ j, \quad \forall f \in V.$$

- b) Soit i) V un treillis vectoriel de fonctions réelles bornées sur un ensemble X , contenant les fonctions constantes, ii) $U: V \rightarrow V$ un opérateur linéaire tel que $U1$ est éloignée de zéro et $U(|f|) = |Uf|$, $\forall f \in V$.

Alors, il existe une unique fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow X_V^0$ telle que $Uf = (U1)(f^0 \circ Q \circ j)$, $\forall f \in V$. De plus, $\forall n \geq 1$, on a

$$U^n f = (U^n 1)(f^0 \circ Q^n \circ j), \quad \forall f \in V.$$

DÉMONSTRATION:

- a) En vertu de la partie a) du théorème 4.9, il existe une unique fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow X_V^0$ telle que $Uf = f^0 \circ Q \circ j$, $\forall f \in V$.

Ainsi, il nous reste seulement à montrer que si $f \in V$, alors $U^n f = f^0 \circ Q^n \circ j$, $\forall n \geq 1$. Or, pour $n = 1$, on sait que la dernière égalité est vraie. Supposons maintenant qu'elle est vraie pour un certain $n \geq 1$. Alors, on a

$$\begin{aligned} U^{n+1} f &= U(U^n f) \\ &= U(f^0 \circ Q^n \circ j) \\ &= (f^0 \circ Q^n \circ j)^0 \circ Q \circ j \\ &= (f^0 \circ Q^n) \circ Q \circ j \\ &= f^0 \circ Q^{n+1} \circ j. \end{aligned}$$

Par conséquent, $U^n f = f^0 \circ Q^n \circ j, \forall n \geq 1$.

- b) En vertu de la partie b) du théorème 4.9, il existe une unique fonction continue $Q: X_V^0 \rightarrow X_V^0$ telle que $Uf = (U1)(f^0 \circ Q \circ j), \forall f \in V$.

Montrons maintenant que si $f \in V$, on a $U^n f = (U^n 1)(f^0 \circ Q^n \circ j), \forall n \geq 1$. Cela étant vrai pour $n = 1$, supposons que cette égalité soit vérifiée pour un certain $n \geq 1$. Or, $U^n 1$ est éloignée de zéro et donc $f^0 \circ Q^n \circ j = U^n f / U^n 1 \in RV$. Ainsi, $f^0 \circ Q^n \circ j$ admet une (unique) extension continue sur X_V^0 , extension que nous désignerons, comme pour les fonctions dans V , par le symbole $(f^0 \circ Q^n \circ j)^0$. On a alors

$$\begin{aligned} U^{n+1} f &= U(U^n f) \\ &= (U1)((U^n f)^0 \circ Q \circ j) \\ &= (U1)[(U^n 1)(f^0 \circ Q^n \circ j)]^0 \circ Q \circ j \\ &= [(U1)((U^n 1)^0 \circ Q \circ j)][(f^0 \circ Q^n \circ j)^0 \circ Q \circ j] \\ &= (U^{n+1} 1)(f^0 \circ Q^{n+1} \circ j). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall n \geq 1$, on a

$$U^n f = (U^n 1)(f^0 \circ Q^n \circ j),$$

et la preuve du présent corollaire est maintenant complète. $\square$

Supposons maintenant que X est un semigroupe (avec son opération interne notée multiplicativement, à moins d'avis contraire) et que V est une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur X . De plus, supposons que $\forall f \in V$ et $\forall x \in X$, la fonction f_x donnée par $y \mapsto f(xy)$ et les fonctions f_h données par $y \mapsto h(f_y), \forall h \in X_V^0$, sont des éléments de V . La *convolution* $h * h'$ de $h, h' \in X_V^0$ introduite pour la première fois par Hewitt et Zuckerman dans [6] et [7], est la fonctionnelle linéaire multiplicative sur V définie par $(h * h')(f) = h(f_{h'})$, $\forall f \in V$. Par la partie a) de la proposition 4.4, cette convolution est soit un élément de X_V^0 ou la fonctionnelle identiquement nulle 0. Sous cette opération $*$, l'espace compact $\overline{X_V^0} = X_V^0 \cup \{0\}$ (qui peut se réduire à X_V^0 si $0 \in X_V^0$) muni de la topologie faible-étoile est un semigroupe tel que la fonction $h \rightarrow h * h'$ est continue sur $\overline{X_V^0}$ et ce $\forall h' \in \overline{X_V^0}$. Ainsi, la fonction $(h, h') \mapsto h * h'$ est séparément continue sur $\overline{X_V^0} \times \overline{X_V^0}$ (c'est-à-dire que $\overline{X_V^0}$ est un semigroupe topologique) lorsque $*$ est commutative dans X_V^0 . Notons finalement que $\forall x, y \in X$ et $\forall f \in V$, on a

$$\begin{aligned} h_{xy}(f) &= f(xy) \\ &= f_x(y) \\ &= h_y(f_x) \\ &= f_{h_y}(x) \\ &= h_x(f_{h_y}) \\ &= (h_x * h_y)(f). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons démontré, dans le paragraphe précédent, le théorème suivant:

THÉORÈME 4.12. Soit X un semigroupe et V une algèbre auto-adjointe de fonctions bornées à valeurs dans F , définies sur X , telle que $\forall f \in V$ et $\forall x \in X$, la fonction f_x donnée par $y \mapsto f(xy)$ et les fonctions f_h données par $y \mapsto h(f_y)$, $\forall h \in X_V^0$, sont des éléments de V .

Alors sous l'opération convolution,

- (1) l'espace compact $\overline{X_V^0}$ est un semi-groupe,
- (2) $\{h_x \mid x \in X\}$ est un semigroupe qui est dense dans X_V^0 .

REMARQUE 4.13. Si $1 \in V$, alors $h * h' \in X_V^0$, $\forall h, h' \in X_V^0$ et donc, dans ce cas, l'espace compact X_V^0 est également un semigroupe.

EXEMPLES 4.14.

- a) Nous donnons ici un exemple d'un groupe commutatif X pour lequel X_V^0 (sous l'opération convolution) n'est ni commutatif, ni un groupe. Pour ce faire, posons $X = \mathbf{R}$ et soit V la classe de toutes les fonctions réelles bornées qui sont uniformément continues sur X . Alors V contient les fonctions $f_x: y \mapsto f(xy)$ et $f_h: y \mapsto h(f_y)$, $\forall x \in X$, $\forall f \in V$ et $\forall h \in X_V^0$. De plus, V sépare les points de X et X est complètement régulier par rapport à V . Ainsi, grâce aux parties c), d), e) des propriétés 2.1, (X_V^0, j) est un compactifié topologique de X et, par le théorème 4.12 et la remarque 4.13, $j(X) = \{h_x \mid x \in X\}$ et X_V^0 sont des semigroupes. Mais X_V^0 n'est pas un groupe car il existe des éléments de X_V^0 qui ne sont pas inversibles. Par exemple, choisissons $h \in X_V^0 \setminus j(X)$ et soit $f \in V$ telle que le support de f soit borné dans X . Alors $h(f_x) = 0$, $\forall x \in X$, et donc h n'est pas inversible dans X_V^0 . Ainsi, X_V^0 n'est pas un groupe. On peut également vérifier que X_V^0 n'est pas commutatif. En effet, soit $f \in V$ telle que $f(\cdot - \infty, -1] = \{1\}$ et $f(]1, \infty[) = \{0\}$ et choisissons $h, h' \in X_V^0 \setminus j(X)$ telles que $h(f) = 0$ et $h'(f) = 1$. Alors, $h(f_x) = 0$ et $h'(f_x) = 1$, $\forall x \in X$, d'où $(h' * h)(f) = 0$ et $(h * h')(f) = 1$. X_V^0 n'est donc pas commutatif.
- b) Soit V la classe de toutes les fonctions réelles presque-périodiques sur $\mathbf{R}$. Rappelons que $f \in V$ si et seulement si $\forall a > 0$, $\exists T > 0$ tel que dans chaque intervalle de longueur T , il existe un point x pour lequel $\sup_{y \in \mathbf{R}} |f(y) - f_x(y)| < a$ (où $f_x(y) = f(x + y)$). (Voir, par exemple, [12], page 171.) Il est donc clair que les fonctions $y \mapsto f_x(y)$ et $y \mapsto h(f_y)$ sont éléments de V et ce, $\forall x \in X$, $\forall f \in V$ et $\forall h \in X_V^0$. Ainsi, sous l'opération de convolution, $\{h_x \mid x \in X\}$ est un semigroupe qui est dense dans le semigroupe $\mathbf{R}_V^0$. Plus précisément, toujours sous l'opération de convolution, $\mathbf{R}_V^0$ est précisément le compactifié de Bohr de $\mathbf{R}$ (voir [12], pp. 165–169) et $\{h_x \mid x \in \mathbf{R}\}$ est en fait un groupe qui est dense dans $\mathbf{R}_V^0$.

Maintenant, soit S un semigroupe et supposons que S est dense dans un intervalle non borné. Alors, on peut montrer que le semigroupe $\{h_x \mid x \in S\}$ est dense dans $\mathbf{R}_V^0$. En effet, posons $W = \{f|_S \mid f \in V\}$. En vertu de la définition même d'une fonction réelle presque-périodique sur $\mathbf{R}$, il s'ensuit que $s^* \in S_W^*$ si et seulement si $\exists ! x^* \in \mathbf{R}_V^0$ tel que $s^* = \{f|_S \mid f \in x^*\}$ (pour les notations, voir la section 3). Ainsi, en raison de ce qui précède et du fait que $f|_S = g|_S$ (où $f, g \in V$) entraîne que $f = g$, on montre que S_W^* est homéomorphe à $\mathbf{R}_V^*$ qui est, à son tour, homéomorphe au compactifié de Bohr $\mathbf{R}_V^0$. Par conséquent, le semigroupe $\{h_x \mid x \in S\}$ est dense dans $\mathbf{R}_V^0$. En particulier, l'intervalle $]0, \infty[$ peut être considéré comme étant un semigroupe qui est dense dans le compactifié de Bohr de $\mathbf{R}$.

Nous considérons maintenant le cas où V est une algèbre auto-adjointe de fonctions complexes bornées sur un ensemble X , qui contient les fonctions constantes et qui est en

plus une algèbre de Banach par rapport à une norme quelconque donnée. Nous obtenons alors le résultat suivant qui, comme le montrera la partie a) des Exemples 4.18, contient le lemme de Wiener.

THÉOREME 4.15. *Soit V une algèbre auto-adjointe de fonctions complexes bornées sur un ensemble X , contenant les fonctions constantes. Supposons de plus que V est une algèbre de Banach par rapport à une certaine norme donnée, et que tous les homomorphismes complexes sur V , sont positifs.*

Alors, si $f \in V$, les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) f est inversible dans V .
- ii) f est éloignée de zéro.
- iii) $h(f) \neq 0, \forall f \in V$.

DÉMONSTRATION: Désignons par Δ_V la classe de tous les homomorphismes complexes sur V . Alors, il est connu que f est inversible dans V si et seulement si $Mf \neq 0, \forall M \in \Delta_V$. Puisque $\Delta_V = X_V^0$ (voir la partie a) de la proposition 4.4), alors f est inversible dans V si et seulement si $f^0(h) = h(f) \neq 0, \forall h \in X_V^0$ et, comme X_V^0 est compact, cette dernière condition se produit si et seulement si f est éloignée de zéro. $\square$

COROLLAIRE 4.16. *Sous les hypothèses du théorème 4.15 et étant donné $\{f_i\}_{i=1}^n \subset V$, alors $\exists \{g_i\}_{i=1}^n \subset V$ telle que $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 1$ si et seulement si $\forall_{i=1}^n |f_i|$ est éloignée de zéro.*

DÉMONSTRATION: Supposons premièrement que $\exists \{g_i\}_{i=1}^n \subset V$ telle que $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 1$, et posons $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|g_i\|_\infty$. Si $\forall_{i=1}^n |f_i|$ n'était pas éloignée de zéro, on pourrait trouver $x \in X$ tel que $|f_i(x)| < \frac{1}{nM}$ pour $i = 1, \dots, n$. Ainsi nous aurions

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \left(\sum_{i=1}^n g_i f_i \right) (x) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |g_i(x)| |f_i(x)| \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{M}{nM} \\ &= 1, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Ainsi, $\forall_{i=1}^n |f_i|$ doit être éloignée de zéro.

Pour montrer la réciproque, posons $q = \sum_{i=1}^n |f_i|^2$. Alors q est une fonction de V qui est éloignée de zéro et donc, par le théorème 4.15, $\frac{1}{q} \in V$. Par conséquent, si on pose $g_i = \frac{\bar{f}_i}{q}$ pour $i = 1, \dots, n$ (où $\bar{f}_i$ désigne la fonction conjuguée complexe associée à f_i), alors $g_i \in V, \forall i$ et, de plus, $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 1$, ce qui complète la démonstration. $\square$

REMARQUES 4.17.

- a) Il est facile de montrer que $\forall_{i=1}^n |f_i|$ est éloignée de zéro si et seulement si $\forall h \in X_V^0, \exists i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f_i^0(h) \neq 0$.
- b) Dans le contexte d'algèbres de Banach commutatives de fonctions bornées, les hypothèses apparaissant dans l'énoncé du théorème 4.15 (et du corollaire 4.16) nous ont permis de déduire que $\Delta_V = X_V^0$. Cependant, il y a des cas où cela se produit même si V n'est pas auto-adjointe. Par exemple, si V désigne la classe de toutes les fonctions complexes continues sur $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ qui sont analytiques sur

l'intérieur de X , alors on peut montrer que $\Delta_V = \{h_x \mid x \in X\}$ (voir [3] et [14], page 267). Les conclusions du théorème 4.15 et du corollaire 4.16 sont donc valides dans ce cas.

EXEMPLES 4.18.

- a) (Une extension du lemme de Wiener.) Etant donné un q rationnel, soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikqx}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad (*)$$

où $\{a_k\} \subset \mathbf{C}$ et $\sum |a_k| < \infty$. Si $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, alors $\exists \{b_k\} \subset \mathbf{C}$ telle que $\sum |b_k| < \infty$ et

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikqx}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Pour montrer ce résultat, désignons par V_q l'algèbre de Banach de toutes les fonctions complexes sur $\mathbf{R}$ de la forme $(*)$, dont la norme $\|\cdot\|$ est définie par $\|f\| = \sum |a_k|$ où $f(x) = \sum a_k e^{ikqx}, \forall x \in \mathbf{R}$. Comme dans [14], pp. 266–267, on montre facilement que $\Delta_{V_q} = \{h_x \mid x \in \mathbf{R}\}$ et donc tous les homomorphismes complexes sur V_q sont positifs. (A noter que $\Delta_{V_q} = \mathbf{R}_{V_q}^0 = \{h_x \mid x \in \mathbf{R}\}$. et que ce dernier ensemble peut être identifié avec l'intervalle compact $[0, \frac{2\pi}{q}]$.) En vertu du théorème 4.15, nous obtenons notre résultat.

Posons maintenant $V = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} V_q$. Alors V est auto-adjointe et est de plus une algèbre de Banach par rapport à la norme $\|\cdot\|$ définie ci-dessus. De plus, grâce à ce qui précède, tous les homomorphismes sur V sont positifs, et chaque $f \in V$ telle que $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, est inversible dans V . A noter que dans ce cas, $\mathbf{R}_V^0$ ne peut être identifié avec un intervalle fermé.

- b) Etant donné une suite $\{b_i\}_{i=0}^{\infty} \subset [0, \infty[$ telle que $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \dots$, soit V la classe de toutes les fonctions sur $X = [0, \infty[$ de la forme $\sum a_i I_i$ où I_i est la fonction indicatrice de l'intervalle $[b_i, \infty[$, et $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ est telle que $\sum |a_i| < \infty$. Alors V est une algèbre auto-adjointe de fonctions complexes bornées sur X , qui contient les fonctions constantes. Par rapport à la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|\sum a_i I_i\| = \sum |a_i|$, V est également une algèbre de Banach. Maintenant, soit M un homomorphisme complexe sur V . Alors, étant donné i , nous avons que $(M(I_i))^2 = M(I_i^2) = M(I_i)$, d'où $M(I_i) \in \{0, 1\}$. De plus, $M(I_j) \leq M(I_i)$ lorsque $i < j$. Ainsi, si $\sum a_i I_i \geq 0$, alors $\sum a_i M(I_i) \geq 0$. M est donc positif, d'où $\Delta_V = X_V^0$. Finalement, il est facile de montrer que $X_V^0 = \{h_x \mid x \in [0, \infty]\}$ où $h_{\infty}(I_i) = 1, \forall i$. Le théorème 4.15 nous permet donc de conclure que si $f \in V$ est telle que $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{f} \in V$. Par conséquent, étant donné $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ telle que $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$ et $\sum_{i=0}^n a_i \neq 0$ pour $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, $\exists \{a'_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ telle que $\sum_{i=0}^{\infty} |a'_i| < \infty$ et

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i} = \sum_{i=0}^n a'_i \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Biles C.M., *Gelfand and Wallman-type compactifications*, Pac. J. Math. **35** (1970), 267-278.
2. Choksi J.R., *Unitary operators induced by measure preserving transformations*, J. Math. Mech. **16** (1966), 83-100.
3. Cohen P.J., *A note on constructive methods in Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 159-163.
4. Helson H et Quigley F., *Existence of maximal ideals in algebras of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 115-119.
5. ———, *Maximal algebras of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 111-114.
6. Hewitt E. et Zuckerman H.S., *Finite Dimensional Convolution Algebras*, Acta Math. **93** (1955), 67-119.
7. ———, *On convolution algebras*, Proc. Int. Congr. Math. **1** (1950), 455.
8. Kakutani S., *Concrete representation of abstract (M) -spaces*, Ann. Math. **42** (1941), 994-1024.
9. Kelley J.L., "General Topology," Springer-Verlag, New York, 1955.
10. Krein M. et Krein S., *On an inner characteristic of the set of all continuous functions defined on a bicomact Hausdorff space*, C.R. URSS **27** (1940), 427-430.
11. Kwapien S., *Linear functionals invariant under measure preserving transformations*, Math. Nachr. **119** (1984), 175-179.
12. Loomis L.H., "An introduction to abstract harmonic analysis," Van Nostrand, New York, 1953.
13. Rudin W., "Fourier analysis on groups," Interscience, New York, 1962.
14. ———, "Functional Analysis," McGraw-Hill, New York, 1973.
15. ———, "Real and complex analysis," McGraw-Hill, New York, 1974.
16. Wermer J., *Algebras with two generators*, Amer. J. Math. **76** (1954), 853-859.
17. ———, *On algebras of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 866-869.
18. ———, *Polynomial approximation on an arc in C^3* , Ann. Math. **62** (1955), 269-270.
19. ———, *The algebra of complex-valued functions*, Amer. J. Math. **78** (1956), 225-242.

Jean-Marc Belley
 Département de mathématiques et d'informatique
 Université de Sherbrooke
 Sherbrooke
 Québec, Canada

François Lessard
 Department of mathematics and statistics
 McGill University
 Montréal
 Québec, Canada