

DELTA SYSTÈMES DANS LA HIÉRARCHIE PROJECTIVE

DANIEL PERRON

RÉSUMÉ. (Dans ZF+DC+PD) Soit $A \subseteq {}^\omega 2 \times {}^\omega 2$ un ensemble Δ^1_{2n+1} ($n \geq 1$) tel que pour tout $x \in {}^\omega 2$, A_x est fini. Alors il existe un ensemble parfait C tel que $\{A_x \mid x \in C\}$ est un delta système. Ceci généralise à tous les niveaux de la hiérarchie projective un résultat de A.W. Miller [Mi] pour le cas $n = 0$. De même, on considère un résultat analogue pour les delta systèmes faibles.

ABSTRACT. (Working in ZF+DC+PD) Let $A \subseteq {}^\omega 2 \times {}^\omega 2$ be a Δ^1_{2n+1} ($n \geq 1$) set such that for all $x \in {}^\omega 2$, A_x is finite. Then there exists a perfect set C such that $\{A_x \mid x \in C\}$ is a delta system. This generalize to all levels of the projective hierarchy a result of A.W. Miller [Mi] for the case $n = 0$. We, also, consider a similar result for weak delta system.

Introduction. Tous les résultats qui vont suivre sont des théorèmes de la théorie ZF+DC+PD. Dans cet article, nous voulons considérer l'existence de delta système dans la hiérarchie projective. Un *delta système* est une famille d'ensembles $\mathcal{F}$ tel qu'il existe un ensemble R avec la propriété que $A \cap B = R$ pour n'importe quels ensembles A et B distincts, dans la famille $\mathcal{F}$. Nous voulons généraliser un théorème de A.W. Miller [Mi]. Ce théorème dit que:

THÉORÈME (A.W. MILLER). Si $A \subseteq {}^\omega 2 \times {}^\omega 2$ est un ensemble Δ^1_1 tel que pour tout $x \in {}^\omega 2$, A_x est fini. Alors il existe un ensemble parfait $C \subseteq {}^\omega 2$ tel que $\{A_x \mid x \in C\}$ est un delta système.

La généralisation de ce résultat sera une application des analogues de l'univers constructible d'ordre supérieur. La définition et les principales propriétés de ces modèles sont présentées dans [Be]. À la suite de cette généralisation, nous allons considérer un théorème sur les delta systèmes faibles. Cette fois-ci, la démonstration du théorème sera complètement récursive, c'est-à-dire que la preuve ne fera appel qu'à des concepts de la théorie de la récursion. C'est un exemple intéressant du "mélange unique de la théorie de la récursion et de la théorie des ensembles" qu'est la théorie descriptive des ensembles.

Principaux résultats. Notre terminologie et notation suivent celles de [Mo]. Deux des propriétés des modèles $L(\mathbf{T}_{2n+1})$ que nous voulons souligner sont les suivantes. Premièrement, les réels du modèle $L(\mathbf{T}_{2n+1})$ forment l'ensemble $\mathbf{C}_{2n+2}$, le plus grand ensemble dénombrable Σ^1_{2n+2} . Ce résultat nous garantit l'existence d'extension générique. Deuxièmement, tout extension générique de $L(\mathbf{T}_{2n+1})$ est Σ^1_{2n+2} -correct, ceci est une conséquence de [Be, corollaire 16]. Maintenant, nous allons présenter deux résultats sur la technique du forcing. Le premier est un résultat de Solovay:

LEMME [So, LEMME 2.5]. Soit P un ordre partiel dans un modèle transitif de ZFC. Alors pour tout G et H tels que $G \times H$ est $P \times P$ -générique, on a

$$M[G] \cap M[H] = M.$$

Dans le lemme suivant, P est l'ordre partiel de Cohen.

LEMME. Il existe un ensemble parfait C tel que pour tout $x, y \in C$, $x \neq y$, x est générique sur $M[y]$, y est générique sur $M[x]$ (en particulier x est générique sur M , y est générique sur M).

DÉMONSTRATION: Il suffit de remarquer que l'ensemble des (x, y) tels que (x, y) est $P \times P$ -générique est co-maigre. Et donc par le théorème de Kuratowski-Ulam, on peut construire un ensemble C parfait tel que tout (x, y) soit générique sur M . Maintenant par le théorème des produits de forcing, on a que x est générique sur $M[y]$ et y est générique sur $M[x]$ quelque soient $x, y \in C$, $x \neq y$. $\square$

Nous sommes maintenant prêt à démontrer la généralisation du théorème de Miller, à savoir:

THÉOREME. Si $A \subseteq {}^\omega 2 \times {}^\omega 2$ est un ensemble Δ^1_{2n+1} tel que pour tout $x \in {}^\omega 2$, A_x est fini. Alors il existe un ensemble parfait $C \subseteq {}^\omega 2$ tel que $\{A_x \mid x \in C\}$ est un delta système.

DÉMONSTRATION: Considérons le modèle $L(\mathbf{T}_{2n+1})$ et soit $P = 2^{<\omega}$ l'ordre partiel des suites finies de $\{0, 1\}$ (ordonné par l'inclusion). Soit $x \in {}^\omega 2$ un réel générique sur $L(\mathbf{T}_{2n+1})$. Soit $R = A_x \cap \mathbf{C}_{2n+2}$, étant donné que A_x est fini, on a donc que $R = \{u_1, \dots, u_k\}$, d'où on peut considérer la formule

$$\forall v[(v = u_1 \vee v = u_2 \vee \dots \vee v = u_k) \iff v \in A_x \cap \mathbf{C}_{2n+2}] \equiv \phi(\bar{u}, \bar{G})$$

du langage du forcing. De plus, étant donné que $L(\mathbf{T}_{2n+1})[x] \models \phi(\bar{u}, \bar{G})$, il existe $p \in G$ tel que $p \Vdash \phi(\bar{u}, \bar{G})$. Considérons un ensemble parfait C , donné par le lemme précédent, tel que tout élément de C prolonge p . Montrons que si $y, z \in C$ alors $A_y \cap A_z = R$, en effet, si $\alpha \in A_y \cap A_z$ alors $\alpha \in \Delta^1_{2n+1}(y) \subseteq L(\mathbf{T}_{2n+1})[y]$, de même $\alpha \in \Delta^1_{2n+1}(z) \subseteq L(\mathbf{T}_{2n+1})[z]$, rappelons que chaque A_x est fini donc inclus dans $\Delta^1_{2n+1}(x)$. Donc par le lemme de Solovay, on a que $\alpha \in L(\mathbf{T}_{2n+1}) \cap {}^\omega 2 \subseteq \mathbf{C}_{2n+2}$, c'est-à-dire $\alpha \in \mathbf{C}_{2n+2}$. De plus $L(\mathbf{T}_{2n+1})[y] \models \phi(\bar{u}, \bar{G})$ donc

$$L(\mathbf{T}_{2n+1})[y] \models \forall v[(v = u_1 \vee v = u_2 \vee \dots \vee v = u_k) \iff v \in A_y \cap \mathbf{C}_{2n+2}]$$

mais on a $\alpha \in A_y \cap \mathbf{C}_{2n+2}$ et $L(\mathbf{T}_{2n+1})[y]$ est Σ^1_{2n+2} -correct donc $L(\mathbf{T}_{2n+1})[y] \models \alpha \in A_y \cap \mathbf{C}_{2n+2}$ d'où $L(\mathbf{T}_{2n+1})[y] \models \alpha = u_1 \vee \alpha = u_2 \vee \dots \vee \alpha = u_k$ et donc $\alpha = u_1 \vee \alpha = u_2 \vee \dots \vee \alpha = u_k$, c'est-à-dire $\alpha \in R$. Réciproquement, si $\alpha \in R$ alors $\alpha = u_1 \vee \alpha = u_2 \vee \dots \vee \alpha = u_k$ et y étant dans C , y prolonge p d'où $L(\mathbf{T}_{2n+1})[y] \models \phi(\bar{u}, \bar{G})$ i.e.

$$L(\mathbf{T}_{2n+1})[y] \models \forall v[(v = u_1 \vee v = u_2 \vee \dots \vee v = u_k) \iff v \in A_y \cap \mathbf{C}_{2n+2}]$$

donc on a étant donné $L(\mathbf{T}_{2n+1})[y] \models \alpha = u_1 \vee \alpha = u_2 \vee \dots \vee \alpha = u_k$, que $L(\mathbf{T}_{2n+1})[y] \models \alpha \in A_y \cap \mathbf{C}_{2n+2}$ et encore une fois $L(\mathbf{T}_{2n+1})[y]$ est Σ^1_{2n+2} -correct d'où $\alpha \in A_y$, de même pour z . D'où $A_y \cap A_z = R$ pour tous $y, z \in C$, $y \neq z$. $\square$

Remarquons que l'ingrédient essentiel de la preuve est l'absolu"é des prédicats Σ^1_{2n+2} pour les modèles $L(\mathbf{T}_{2n+1})$. Pour généraliser le théorème de Miller, on devait trouver un

modèle qui était Σ_{2n+2}^1 -correct. Les $L(\mathbf{T}_{2n+1})$ ont justement cette propriété. Si maintenant, on veut considérer les delta systèmes faibles, on peut complètement oublier les analogues de l'univers constructible d'ordre supérieur. Mais définissons ce qu'on entend par delta système delta faible. Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est un *delta système faible* s'il existe un R tel que $X \cap Y \subseteq R$ pour tous $X, Y \in \mathcal{F}$. Pour obtenir le prochain théorème, nous allons nous servir d'un résultat de Kechris sur l'existence de degrés Δ_{2n+1}^1 -minimaux, c'est-à-dire

THÉORÈME [Ke0, COROLLAIRE 1.15]. *Il existe un continuum de degrés Δ_{2n+1}^1 -minimaux.*

Ce théorème nous dit qu'il existe un ensemble de la cardinalité du continu de degrés Δ_{2n+1}^1 -minimaux. Par degrés Δ_{2n+1}^1 -minimaux nous entendons des réels α tels que la classe d'équivalence des Δ_{2n+1}^1 -degrés $[\alpha]$ soit minimale dans l'ordre partiel $\leq_{2n+1}$ i.e. si $[\lambda t.0] \leq_{2n+1} [\beta] \leq_{2n+1} [\alpha]$ alors $\beta \equiv_{2n+1} \alpha$ ou $\beta \equiv_{2n+1} \lambda t.0$ quelque soit β . En fait, ce théorème nous donne l'existence d'un ensemble parfait de réels Δ_{2n+1}^1 -minimaux. En considérant le sous espace du plan défini par cet ensemble parfait et le fait que chaque classe d'équivalence des Δ_{2n+1}^1 -degrés est dénombrable, on peut construire, encore une fois à partir du théorème de Kuratowski-Ulam, un ensemble parfait C tel que pour tout $\alpha, \beta \in C, \alpha \neq \beta, \alpha$ et β sont des Δ_{2n+1}^1 -degrés minimaux Δ_{2n+1}^1 -inéquivalents i.e. $\alpha \not\equiv_{2n+1} \beta$. À partir de ce fait, nous pouvons énoncer notre théorème sur les delta systèmes faibles dans la hiérarchie projective, à savoir:

THÉORÈME. *Soit $A \subseteq {}^\omega 2 \times {}^\omega 2$ u ensemble Δ_{2n+1}^1 ($n \geq 1$) tels que pour tout $x \in {}^\omega 2, A_x$ est dénombrable. Alors il existe un ensemble parfait C tel que $\{A_x \mid x \in C\}$ est un delta système faible.*

DÉMONSTRATION: Comme nous venons de le voir il existe un ensemble parfait C de réels Δ_{2n+1}^1 -minimaux inéquivalents. Nous disons que l'ensemble $\{A_x \mid x \in C\}$ forme un delta système faible, en effet, pour montrer que cette famille d'ensembles forme un delta système faible nous devons trouver un R tel que $A_x \cap A_y \subseteq R$ pour tout $x, y \in C, x \neq y$. Nous définissons R comme étant $\mathbf{D}_{2n+1}$. Soit $x, y \in C, x \neq y$, nous voulons montrer que $A_x \cap A_y \subseteq \mathbf{D}_{2n+1}$, soit $\alpha \in A_x \cap A_y$ alors $\alpha \in \mathbf{D}_{2n+1}(x) \cap \mathbf{D}_{2n+1}(y)$ car A_x et A_y sont dénombrables mais $\mathbf{D}_{2n+1}(x) \cap \mathbf{D}_{2n+1}(y) = \mathbf{D}_{2n+1}$ en effet si $\alpha \in \mathbf{D}_{2n+1}(x) \cap \mathbf{D}_{2n+1}(y)$ et $\alpha \notin \mathbf{D}_{2n+1}$ alors $\alpha \equiv_{2n+1} x$ car x est Δ_{2n+1}^1 -minimal, de même $\alpha \equiv_{2n+1} y$ d'où $x \equiv_{2n+1} y$ mais x et y sont dans C et C contient un seul représentant de chaque classe d'équivalence, ceci est une contradiction et donc $A_x \cap A_y \subseteq R$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [Be] H.S. Becker, *Partially playful universe*, dans "Cabal seminar 76-77," (A.S. Kechris et Y.N. Moschovakis éd.) Lecture Notes in Mathematics **689**.
- [Ke0] A.S. Kechris, *Forcing with Δ -perfect trees and minimal Δ -degrees*, Journal of Symb. Logic **46** (1981), 803-816.
- [Mi] A.W. Miller, *Infinite combinatorics and definability*, Annals of Pure Appl. Logic **41** (1989), 179-203.
- [Mo] Y.N. Moschovakis, "Descriptive set theory," Studies in logic and the foundations of mathematics **100**, North-Holland, 1980.
- [So] R.M. Solovay, *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Annals of Math. (1970), 1-56.

D. Perron
 Dep. of Mathematics and Computer Science
 Mount Allison University
 Sackville
 New Brunswick, Canada E0A 3C0