

ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS II:
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE
(1^{ère} PARTIE)

MICHEL JAMBU

"We believe that combinatorial methods will play an increasing role in the future of geometry and topology"

I.M. Gelfand, R.M. Goresky, R.D. MacPherson, V. Serganova

Combinatorial geometries, convex polyhedra and Schubert cells, Advances in Math. (1987)

RÉSUMÉ. Il s'agit de définir et d'étudier les arrangements libres (i.e. diviseurs de Saito) ainsi que la cohomologie des compléments. Des invariants numériques sont associés aux arrangements libres, généralisant les exposants des groupes de Coxeter. Ces exposants sont de plus interprétés à partir du polynôme de Poincaré associé à la cohomologie du complément de ces arrangements.

ABSTRACT. We define and study the free arrangements (i.e. Saito's divisors) and the cohomology of the complements. Some numerical invariants are associated to the free arrangements and give a natural generalization of the exponents of the Coxeter groups. Moreover a cohomological interpretation of these exponents is given.

0. Introduction.

La théorie des arrangements d'hyperplans se situe au carrefour de nombreux centres d'intérêt comme le fait remarquer P. Orlik dans son récent article de synthèse: "Introduction to arrangements" [17]:

Arrangements occur in several branches of mathematics: in the study of braids and phases transition, in wave fronts, in hypergeometric functions, in reflection groups and Lie algebras, in coding theory, in the study of certain singularities, in combinatorics and group theory, and in spline functions.

Cette première partie de l'étude des propriétés topologiques et géométriques de la théorie des arrangements d'hyperplans est consacrée aux arrangements libres et à la cohomologie du complément.

Le fil conducteur des pages qui suivent pourrait être donné par l'exemple de l'arrangement de Coxeter de type A_1 .

Les exposants du groupe de Coxeter s'interprètent à l'aide de champs de vecteurs ou de formes différentielles logarithmiques le long de l'arrangement (cf. partie I). Dans la

section 1, les modules de dérivations logarithmiques et de 1-formes différentielles logarithmiques le long de l'arrangement sont définis. Si ces modules sont libres, ils admettent une base homogène dont les degrés définissent la bonne notion d'exposants. La plupart des résultats sont dus à H. Terao.

Comme V.I. Arnold l'a remarqué, le polynôme de Poincaré du complément X_l de l'arrangement $\mathbf{A}_l$ se factorise en faisant apparaître les exposants du groupe de type $\mathbf{A}_l$, i.e. $\{1, 2, \dots, l\}$:

$$P_{X_l}(t) = (1+t)(1+2t)\cdots(1+lt).$$

Ce fait est général et donne une interprétation cohomologique des exposants d'un arrangement libre, comme l'ont montré H. Terao, P. Orlik, L. Solomon et E. Brieskorn. De plus P. Orlik et L. Solomon caractérisent l'algèbre de cohomologie $H^*(X)$ du complément X d'un arrangement $\mathbf{A}$ de $\mathbb{C}^n$ à l'aide du treillis $L(\mathbf{A})$ des intersections des hyperplans de $\mathbf{A}$. C'est l'objet de la section 2.

Des appendices montrent que ces résultats s'étendent aux hypersurfaces libres (ou diviseurs de Saito), tels que le discriminant et l'ensemble de bifurcation associés à une hypersurface à singularité isolée. Le cas des singularités simples, en particulier du type $\mathbf{A}_l$ est traité (cf. Looijenga [16]). Enfin, les arrangements simples de Sommese sont introduits en liaison avec les surfaces de Hirzebruch.

1. Arrangements libres.

1.1. Modules des dérivations et des formes différentielles. Dans la partie I, nous avons défini la notion d'arrangement libre comme étant une généralisation "naturelle" de celle d'arrangement associé à un groupe de réflexions. Dans cette partie, nous reprenons ce point de vue en associant, selon K. Saito [21], différents modules pour des arrangements quelconques d'hyperplans.

Soit $\mathbf{k}$ un corps quelconque, $V = \mathbf{k}^n$, $S(V^*)$, (que nous noterons plus simplement S) l'algèbre symétrique de V^* et S' le corps des fractions de S . Le choix d'une base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V^* détermine un isomorphisme entre S et $R = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ d'une part et entre S' et $R' = \mathbf{k}(x_1, \dots, x_n)$ d'autre part. S (resp. R) est une $\mathbf{k}$ -algèbre graduée où $\deg f = 1$ pour tout $f \in V^* \setminus \{0\}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$; $\text{Der}^p(V)$ est le S -module des applications p -linéaires alternées: [25]

$$\theta: \underbrace{S \times \dots \times S}_{p \text{ facteurs}} \rightarrow S$$

qui sont des $\mathbf{k}$ -dérivations en chaque variable (i.e. $\theta(f_1, \dots, f_i, \dots, f_p) = 0$ si $f_i \in \mathbf{k}$ et $\theta(f_1, \dots, f_i g_i, \dots, f_p) = f_i \theta(f_1, \dots, g_i, \dots, f_p) + g_i \theta(f_1, \dots, f_i, \dots, f_p)$). $\text{Der}^\bullet(V)$ est muni naturellement d'une structure de S -module gradué où $\text{Der}^0(V) = S$, $\text{Dcr}^p(V) = 0$ pour $p > n$, en posant $\text{Der}^\bullet(V) = \bigoplus_{p \geq 0} \text{Dcr}^p(V)$. De façon similaire, ([37]) on définit les S -modules des formes différentielles

$$\Omega_{\text{alg}}^\bullet(V) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_{\text{alg}}^p(V)$$

et

$$\Omega_{\text{rat}}^\bullet(V) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_{\text{rat}}^p(V)$$

où $\Omega_{\text{alg}}^p(V)$ est le S -module des p -formes différentielles à coefficients dans S et $\Omega_{\text{rat}}^p(V) = S' \otimes \Omega_{\text{alg}}^p(V)$; $\Omega_{\text{alg}}^p(V)$ et $\Omega_{\text{rat}}^p(V)$ sont des modules gradués nuls pour $p > n$.

Soit $\mathbf{A}$ un arrangement d'hyperplans de V , i.e. une famille finie de sous-espaces vectoriels de codimension 1. Pour chaque $H \in \mathbf{A}$, choisissons une forme linéaire $\alpha^H \in V^*$ telle que $\ker \alpha^H = H$ et posons

$$Q = \prod_{H \in \mathbf{A}} \alpha^H \in S.$$

DÉFINITION. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- (1) $D^p(\mathbf{A}) = \{\theta \in \text{Der}^p(V) \mid \theta(Q, f_2, \dots, f_p) \in QS, \text{ pour tout } f_2, \dots, f_p \in S\},$
 $D^0(\mathbf{A}) = S.$
- (2) $\Omega^p(\mathbf{A}) = \{\omega \in \Omega_{\text{rat}}^p(V) \mid Q\omega \in \Omega_{\text{alg}}^p(V) \text{ et } Q d\omega \in \Omega_{\text{alg}}^{p+1}(V)\}.$

PROPOSITION. $D^p(\mathbf{A})$ et $\Omega^p(\mathbf{A})$ sont des S -sous-modules gradués de $\text{Der}^p(V)$ et $\Omega_{\text{rat}}^p(V)$.

PROPOSITION [21]. Le produit intérieur

$$\begin{aligned} i: D^1(\mathbf{A}) \times \Omega^1(\mathbf{A}) &\longrightarrow S \\ (\theta, \omega) &\longmapsto \theta \cdot \omega \end{aligned}$$

est bien définie et non dégénéré. $D^1(\mathbf{A})$ et $\Omega^1(\mathbf{A})$ sont des S -modules réflexifs de rang n et $D^1(\mathbf{A})$ est libre ssi $\Omega^1(\mathbf{A})$ est libre.

DÉFINITION. L'arrangement $\mathbf{A}$ de $V = \mathbf{k}^n$ est libre ssi $D^1(\mathbf{A})$ est un S -module libre.

Par la proposition précédente $\mathbf{A}$ est libre ssi $\Omega^1(\mathbf{A})$ est un S -module libre

EXEMPLES.

- (1) Les arrangements associés à des groupes de réflexions sont libres [13], [29].
- (2) Tout arrangement de $V = \mathbf{k}^n$ où $n \leq 2$ est libre. (Tout module réflexif sur un anneau de dimension homologique au plus 2, est libre)
- (3) Les arrangements de type fibré [9]:

Considérons $\mathbf{k} = \mathbb{C}$.

DÉFINITION. Soit $X = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathbf{A}} H$ le complément d'un arrangement $\mathbf{A}$ d'hyperplans de $\mathbb{C}^n$. X est dit *linéairement fibré* si après un changement linéaire des coordonnées, la restriction de la projection sur les $n-1$ premières coordonnées est une fibration dont la base est le complément d'un arrangement $\mathbf{B}$ d'hyperplans de $\mathbb{C}^{n-1}$ et la fibre est $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$ où $a_i \in \mathbb{C}$. Un arrangement $\mathbf{A}$ est de *type fibré* si le complément X est linéairement fibré sur Y où Y est le complément d'un arrangement $\mathbf{B}$ de type fibré en convenant que l'arrangement $\{0\}$ est fibré.

H. Terao [36] a montré que les arrangements de type fibré sont caractérisés par une propriété combinatoire. Soit $L(\mathbf{A})$ le treillis géométrique des intersections des hyperplans de $\mathbf{A}$, ordonné par $x \leq y$ si $x \supseteq y$, en posant $0 = \mathbb{C}^n$, (le plus petit élément).

Un élément x de $L(\mathbf{A})$ est dit *modulaire* si pour tout y et $z \in L(\mathbf{A})$ tels que:

- (i) $x \wedge y = x \wedge z = 0$
- (ii) $x \vee y = x \vee z = 1$ (le plus grand élément de $L(\mathbf{A})$).

alors y et z ne sont pas comparables.

Le treillis $L(\mathbf{A})$ est *hyperrésoluble* s'il existe une chaîne maximale composée d'éléments modulaires i.e. $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{r(L(\mathbf{A}))} = 1$ où r est la fonction rang et x_i sont des éléments modulaires.

THÉORÈME [36]. Un arrangement $\mathbf{A}$ de $\mathbb{C}^n$ est de type fibré ssi $L(\mathbf{A})$ est un treillis hyperrésoluble.

THÉORÈME [14], [15], [36]. Un arrangement de type fibré est libre.

En fait, il est montré que si $L(\mathbf{A})$ est un treillis hyperrésoluble, l'arrangement $\mathbf{A}$ est libre, $\mathbf{A}$ étant un arrangement de $V = \mathbf{k}^n$.

Remarquons que la méthode utilisée dans [14], [15] et [36] pour prouver la "liberté" des arrangements de type fibré, n'utilise pas les modules $D^1(\mathbf{A})$ ou $\Omega^1(\mathbf{A})$ mais un théorème qui sera énoncé en 1.4.

Ces résultats seront développés dans la partie 2.

Ajoutons que G.M. Ziegler [37] caractérise les arrangements $\mathbf{A}$ dont le treillis $L(\mathbf{A})$ est hyperrésoluble (i.e. les arrangements de type fibré si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$), de la façon suivante:

DÉFINITION. Soit $\mathbf{A}$ un arrangement libre et $V = \mathbf{K}^n$. Une base ordonnée $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ de $\Omega^1(\mathbf{A})$ est *triangulaire* pour le système de coordonnées $x_1, \dots, x_n$ de V^* si $\omega^i = (1/Q) \sum_{j=1}^n q_i^j dx_j$ avec $q_i^j = 0$ si $i < j$, i.e. la matrice (q_i^j) est triangulaire inférieure.

Remarquons qu'à une base triangulaire de $\Omega^1(\mathbf{A})$ correspond une base triangulaire de $D^1(\mathbf{A})$.

THÉORÈME [37]. Un arrangement $\mathbf{A}$ admet une base triangulaire pour un système de coordonnées ssi $L(\mathbf{A})$ est hyperrésoluble.

Illustrons ceci par l'exemple suivant [37]:

Soit $\mathbf{A}' = D_3^1$ l'arrangement de $V = \mathbf{k}^3$, (où la caractéristique de $\mathbf{k}$ est différente de 2), défini par $Q = x(x+y)(x-y)(x+z)(x-z)(y+z)(y-z)$. $\mathbf{A}'$ est un arrangement libre. Une base homogène de $\Omega^1(\mathbf{A}')$ est la suivante:

$$\begin{aligned}\omega^1 &= \frac{dx}{x} \\ \omega^2 &= \frac{1}{y-z} \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{d(x-y)}{x-y} + \frac{d(x-z)}{x-z} - \frac{d(x+y)}{x+y} - \frac{d(x+z)}{x+z} \right) \\ \omega^3 &= \frac{1}{y+z} \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{d(x+y)}{x+y} + \frac{d(x-z)}{x-z} - \frac{d(x-y)}{x-y} - \frac{d(x+z)}{x+z} \right).\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $L(\mathbf{A}')$ n'est pas un treillis hyperrésoluble. Soit $\mathbf{A} = \mathbf{A}' \cup \{y=0\}$. $L(\mathbf{A})$ est un treillis hyperrésoluble donc $\mathbf{A}$ est libre. Une base triangulaire de $\Omega^1(\mathbf{A})$ est donnée par

$$\begin{aligned}\omega'^1 &= \omega^1 \\ \omega'^2 &= \frac{1}{2y} ((y-z)\omega^2 - (y+z)\omega^3) = \frac{2}{x^2-y^2} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{2}{x^2-y^2} \cdot \frac{dy}{y} \\ \omega'^3 &= \frac{1}{y} (\omega^2 + \omega^3)\end{aligned}$$

L'arrangement $\mathbf{A} \cup \{z=0\}$ est l'arrangement de Coxeter $\mathbf{B}_3$ qui est libre, $L(\mathbf{B}_3)$ est hyperrésoluble et une base triangulaire de $\Omega^1(\mathbf{B}_3)$ est la suivante:

$$\begin{aligned}\omega''^1 &= \omega'^1 \\ \omega''^2 &= \omega'^2 \\ \omega''^3 &= \frac{1}{z} \omega'^3.\end{aligned}$$

1.2. Diviseurs de Saito. Soit D un diviseur (réduit) dans $\mathbb{C}^n = V$, d'équation locale Q_x au point x .

DÉFINITION. Soit $\Omega_V^q(\log D)_x$ l'ensemble des germes en x de q -formes différentielles méromorphes ω telles que $Q_x \omega$ et $Q_x(d\omega)$ soient des q , (resp. $q + 1$)-formes différentielles holomorphes au voisinage de x .

On obtient ainsi des faisceaux algébriques cohérents de $\mathcal{O}_{V,x}$ -modules, noté $\Omega_V^q(\log D)$.

DÉFINITION. Le diviseur D est *libre* ou *diviseur de Saito* en $x \in V$ ssi $\Omega^1(\log D)_x$ est un $\mathcal{O}_{V,x}$ -module libre.

DÉFINITION. Soit $\text{Der}_V(\log D)_x$ l'ensemble des germes en x de champs de vecteurs holomorphes θ tels que $\theta \cdot Q_x \in Q_x \cdot \mathcal{O}_{V,x}$. On obtient ainsi un faisceau algébrique cohérent de $\mathcal{O}_{V,x}$ -modules, noté $\text{Der}_V(\log D)$.

PROPOSITION. D est un diviseur de Saito en $x \in V$ ssi $\text{Der}_V(\log D)_x$ est un $\mathcal{O}_{V,x}$ -module libre.

DÉMONSTRATION: Le produit intérieur:

$$\begin{aligned} \text{Der}_V(\log D)_x \times \Omega_V^1(\log D) &\longrightarrow \mathcal{O}_{V,x} \\ (\theta, \omega) &\longmapsto \theta \cdot \omega \end{aligned}$$

entraîne une dualité entre les deux modules réflexifs $\text{Der}_V(\log D)_x$ et $\Omega_V^1(\log D)_x$, d'où le résultat. $\square$

Les éléments de $\Omega_V^q(\log D)_x$ sont appelés *q-formes différentielles logarithmiques en x le long de D* et ceux de $\text{Der}_V(\log D)_x$ les *champs de vecteurs logarithmiques en x le long de D*.

K. Saito [21] en a défini les concepts et étudié les propriétés.

Remarquons que les arrangements libres de $\mathbb{C}^n$ sont des diviseurs de Saito. Dans l'appendice, nous donnerons un autre exemple de diviseur de Saito.

1.3. Critères de liberté. K. Saito [21] a établi quelques critères de liberté pour des diviseurs de $\mathbb{C}^n$. Nous en donnons ici une version adaptée au cas des arrangements de $\mathbf{k}^n$, $\mathbf{k}$ corps quelconque. Soit $\mathbf{A}$ un arrangement d'hyperplans de $V = \mathbf{k}^n$, défini par l'équation réduite $Q = 0$.

PROPOSITION [21], [25], [37].

- (1) Les éléments $\theta_1, \dots, \theta_n \in D^1(\mathbf{A})$ forment une base de $D^1(\mathbf{A})$ comme R -module ssi $\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \in QD_1 \wedge \dots \wedge D_n$ où $D_i \in \text{Der}(V)$ est la $\mathbf{k}$ -dérivation définie par $D_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$, (i.e. $\theta_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$, alors $\det(p_{ij}) = cQ$).
- (2) Les 1-formes $\omega^1 = (1/q) \sum_{j=1}^n q_j^1 dx_j, \dots, \omega^n = (1/q) \sum_{j=1}^n q_j^n dx_j \in \Omega^1(\mathbf{A})$ forment une base de $\Omega^1(\mathbf{A})$ comme R -module ssi:

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n = c \cdot \frac{1}{Q} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \text{ (i.e. ssi } \det(q_j^i) = cQ \text{ où } c \in \mathbf{k}^*).$$

DÉMONSTRATION: Nous ne démontrons que 1.

Supposons $\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \in \mathbf{k}^* QD_1 \wedge \dots \wedge D_n$. Alors $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont linéairement indépendants sur R . En supposant, ce qui ne réduit pas la généralité du problème,

$\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = qD_1 \wedge \cdots \wedge D_n$, par la règle de Cramer, on a $QD_i \in \sum_{i=1}^n R\theta_i$. Écrivons, pour $\theta = D^1(\mathbf{A})$, $Q\theta = \sum_{i=1}^n f_i\theta_i$, alors

$$\begin{aligned} f_i QD_1 \wedge \cdots \wedge D_n \\ = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} \wedge Q\theta \wedge \theta_{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n \in QD^n(\mathbf{A}) = RQ^2 D_1 \wedge \cdots \wedge D_n \end{aligned}$$

en remarquant que $D^n(\mathbf{A})$ est libre de rang 1 avec $QD_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ comme base. Ainsi $f_i \in QR$ pour tout i et

$$\theta = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{Q} \theta_i \in \sum_{i=1}^n R\theta_i.$$

Réciproquement, en remarquant que $\text{Der}^p(V)$ est naturellement isomorphe à $\bigwedge_S^p \text{Der}^1(V)$ et que $\phi \in D^p(\mathbf{A})$ et $\psi \in D^q(\mathbf{A})$ impliquent $\phi \wedge \psi \in D^{p+q}(\mathbf{A})$, on peut écrire $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = fQD_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ où $f \in S$. Choisissons $H \in \mathbf{A}$ et supposons $\ker x_1 = H$. Posons $Q_H = Q/x_1$. Comme QD_1 et $Q_H D_i$, $i = 2, \dots, n$ appartiennent à $D^1(\mathbf{A})$, on a $Q \cdot Q_H^{n-1} D_1 \wedge \cdots \wedge D_n = x_1 Q_H D_1 \wedge Q_H D_2 \wedge \cdots \wedge Q_H D_n \in S\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = SfQD_1 \wedge \cdots \wedge D_n$. Alors f divise Q_H^{n-1} , pour tout $H \in \mathbf{A}$ et comme les Q_H^{n-1} pour $H \in \mathbf{A}$ n'ont pas de facteur commun, on obtient $f \in k^*$. $\square$

Plus généralement, les affirmations suivantes sont équivalentes:

- (i) $\mathbf{A}$ est libre
- (ii) $\bigwedge_S^p D^1(\mathbf{A}) = D^p(\mathbf{A})$ pour $p = 0, \dots, n$
- (iii) $\bigwedge_S^n D^1(\mathbf{A}) = D^n(\mathbf{A})$
- (iv) chaque $D^p(\mathbf{A})$ est libre pour $p = 0, \dots, n$
- (ii)' $\bigwedge_S^p \Omega^1(\mathbf{A}) = \Omega^p(\mathbf{A})$ pour $p = 0, \dots, n$
- (iii)' $\bigwedge_S^n \Omega^1(\mathbf{A}) = \Omega^n(\mathbf{A})$
- (iv)' chaque $\Omega^p(\mathbf{A})$ est libre pour $p = 0, \dots, n$.

EXEMPLE. Un arrangement $\mathbf{A}$ est *radial* [28] si tous les hyperplans de $\mathbf{A}$ contiennent un même sous-espace de codimension 2.

Soit $Q = \prod_{i=1}^m h_i = 0$ l'équation réduite définissant l'arrangement radial $\mathbf{A}$ et $\{h_1, h_2, y_3, \dots, y_n\}$ une base de V^* .

Alors

$$\left\{ h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} + \sum_{i=3}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i}, h_2 \cdots h_m \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}$$

est une base de $D^1(\mathbf{A})$ et par suite $\mathbf{A}$ est libre. De même:

$$\left\{ \frac{dh_1}{h_1}, \frac{1}{h_3 \cdots h_m} \left(\frac{dh_1}{h_1} - \frac{dh_2}{h_2} \right), dy_3, \dots, dy_n \right\}$$

est une base de $\Omega^1(\mathbf{A})$.

D'autres exemples peuvent être obtenus par le résultat suivant:

PROPOSITION [37].

- (1) Soient $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ des arrangements de V_1 et V_2 respectivement. Alors $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ est libre ssi $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont libres (où $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \{H \oplus V_2 \mid H \in \mathbf{A}_1\} \cup \{V_1 \oplus H \mid H \in \mathbf{A}_2\}$).
- (2) Un arrangement $\mathbf{A}$ est libre ssi l'arrangement $\mathbf{A}^{\cap H} = \{H / \bigcap_{H \in \mathbf{A}} H \mid H \in \mathbf{A}\}$ est libre.
- (3) Soit $\bigcap_{H \in \mathbf{B}} H \subseteq \mathbf{A}$. La localisation de $\mathbf{A}$ à $\bigcap_{H \in \mathbf{B}} H$ est l'arrangement $\{K / \bigcap_{H \in \mathbf{B}} H, K \in \mathbf{A}, K \supseteq \bigcap_{H \in \mathbf{B}} H\}$ dans $V / \bigcap_{H \in \mathbf{B}} H$. La localisation d'un arrangement libre est libre.

Soit $H \in \mathbf{A}$. La restriction de $\mathbf{A}$ à H est définie par $\mathbf{A}_H = \{K \cap H \mid K \in \mathbf{A} \setminus \{H\}\}$ et P. Orlik a proposée la conjecture suivante (non encore résolue): [32]

La restriction d'un arrangement libre est un arrangement libre.

Voici un autre critère de liberté, toujours selon K. Saito [21]:

PROPOSITION. Soient $\theta_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$; $i = 1, \dots, n$, des éléments de $\text{Der}^1(V)$ tels que:

- (i) $[\theta_i, \theta_j] = \sum_{k=1}^n f_{ij}^k \theta_k$ où $f_{ij}^k \in R$
- (ii) $\det(p_{ij}) = Q$.

Alors $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ est une base de $D^1(\mathbf{A})$ et $\mathbf{A}$ est un arrangement libre.

Voici un critère algébrique de liberté dû à H. Terao [28]:

PROPOSITION. Un arrangement $\mathbf{A}$ de $V = R^n$ est libre ssi R/J_Q est un R -module de Cohen-Macaulay de dimension $n - 2$, où J_Q est l'idéal Jacobien de Q .

Rappelons qu'un module est de Cohen-Macaulay ssi sa dimension de Krull est égale à sa codimension homologique.

DÉMONSTRATION: Dans le cas $R/J_Q \neq 0$, elle repose sur:

- a) La décomposition $D^1(\mathbf{A}) = R \cdot \theta_0 \oplus \text{Ann}(\mathbf{A})$ où θ_0 est le "champ d'Euler" et $\text{Ann}(\mathbf{A}) = \{\theta \in D^1(\mathbf{A}) \mid \theta(Q) = 0\}$ qui est libre ssi $D^1(\mathbf{A})$ est libre (module projectif sur un anneau local)
- b) la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ann}(\mathbf{A}) \longrightarrow R^n \longrightarrow R \xrightarrow{\text{can}} R/J_Q \longrightarrow 0$$

$$\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial Q}{\partial x_i}$$

$\text{Ann}(\mathbf{A})$ est libre ssi $\dim \text{hom } R/J_Q < 3$.

- c) l'égalité de Auslander-Buschbaum

$$\text{hauteur } R/J_Q + \dim \text{hom } R/J_Q = \text{Krull-dim } R = n. \quad \square$$

Considérons un hyperplan $H \notin \mathbf{A}$. Alors $\mathbf{A}$ se présente comme une famille (finie) d'arrangements radiaux $\mathbf{A}_i$ (autour de $H \cap K_i$ où $K_i \in \mathbf{A}$ et $\text{codim } H \cap K_i = 2$). Soit $\mathbf{B}$ un sous-arrangement de $\mathbf{A}$ obtenu en enlevant un hyperplan de chaque $\mathbf{A}_i$ et soit $Q_H = 0$ une équation (réduite) définissant $\mathbf{B}$ (e.g. $Q_H = \prod_i k_i^{\# \mathbf{A}_i - 1}$ où $\ker k_i = K_i$). Posons $\ker h = H$.

Les deux prochaines propositions vont jouer un rôle essentiel ensuite, dans la démonstration du théorème d'addition-restriction de Terao selon que l'on considère les dérivations ou les formes différentielles.

PROPOSITION [28].

- (1) L'idéal $D^1(\mathbf{A})(h) = \{\theta(h) \mid \theta \in D^1(\mathbf{A})\}$ est inclus dans l'idéal engendré par h et Q_H . Ces deux idéaux ont même radical.
- (2) Supposons l'arrangement $\mathbf{A}$ libre. Alors l'arrangement $\mathbf{A} \cup \{H\}$ est libre ssi $R/D^1(\mathbf{A})(H)$ est de Cohen-Macaulay de dimension $n-2$ (ou bien nul) ssi $D^1(\mathbf{A})(h) = (h, Q_H)$, idéal engendré par h et Q_H .

PROPOSITION [21], [37]. Chaque $\omega \in \Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\})$ s'écrit sous la forme

$$\omega = \frac{p}{Q_H} \frac{dh}{h} + \omega^0$$

où $p \in S$ et $\omega^0 \in (1/Q)\Omega_{\text{alg}}^1(V)$ n'a pas de pôle en H . (Si $\omega \notin (h/Q_H)\Omega_{\text{alg}}^1(V)$ on dit que ω a un pôle en $H \in \mathbf{A}$).

En particulier $-\deg \omega \leq \deg(hQ_H) = 1 + \#\mathbf{A} - \#\mathbf{A}_H$.

REMARQUE. Ce dernier résultat est une conséquence du "lemme de préparation" [21] suivant:

Soit $\omega \in \Omega_{\text{rat}}(V)$. Alors $\omega \in \Omega(\mathbf{A})$ ssi pour tout $H \in \mathbf{A}$, on a $\omega = \frac{dh}{h} \wedge \omega^1 + \omega^0$ où $(Q/h)\omega^0 \in \Omega_{\text{alg}}^p(V)$ et $(Q/h)\omega^1 \in \Omega_{\text{alg}}^{p-1}(V)$.

1.4. Exposants d'un arrangement libre. Soit $\mathbf{k}$ un corps quelconque.

PROPOSITION [28]. Soit un arrangement libre de $V = \mathbf{k}^n$. Alors il existe une base homogène $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ de $D^1(\mathbf{A})$, i.e.

$$\theta_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où les f_{ij} sont des polynômes homogènes de même degré pour tout $j = 1, \dots, n$.

Notons $\deg \theta_i = \deg f_{ij}$. Le "multi-ensemble" $[\deg \theta_1, \dots, \deg \theta_n]$ ne dépend que de l'arrangement $\mathbf{A}$ et non de la base choisie. On supposera $\deg \theta_1 \leq \dots \leq \deg \theta_n$.

DÉFINITION. $[\deg \theta_1, \dots, \deg \theta_n]$ est appelé le "multi-ensemble" des *exposants* de l'arrangement $\mathbf{A}$ et est noté $\exp(\mathbf{A})$.

PROPOSITION.

- (1) Soit $\mathbf{A}$ un arrangement libre. Si $\exp(\mathbf{A}) = [\deg \theta_1, \dots, \deg \theta_n]$, on a $\sum_{i=1}^n \deg \theta_i = \#\mathbf{A}$.
- (2) La base duale $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ de $\Omega^1(\mathbf{A})$ satisfait $\deg \omega^i = -\deg \theta_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

REMARQUE. Le "champ d'Euler" θ_0 appartenant à $D^1(\mathbf{A})$, on en déduit que 1 est un exposant de $\mathbf{A}$.

EXEMPLES.

- (1) Un arrangement radial (cf. 1.3) de m hyperplans, admet comme exposants $\underbrace{[0, \dots, 0]}_{n-2}, 1, m-1]$.
- (2) Soit $\mathbf{A}$ un arrangement associé à un groupe de Coxeter (cf. [13]). Les exposants de l'arrangement $\mathbf{A}$ sont les exposants du groupe de Coxeter. Les exposants sont des invariants numériques de l'arrangement qui ne sont définis que pour le cas spécial des arrangements libres. Nous allons, selon H. Terao [28] [37] définir une suite d'entiers pour tout arrangement, qui est la suite des exposants dans le cas où l'arrangement est libre.

DÉFINITION. Soit M un S -module gradué noethérien de rang n . Une suite $(m_1, m_2, \dots)$ d'éléments homogènes de M est une *suite génératrice* si pour tout entier i :

$$\deg m_i = \min \left\{ \deg m \mid m \in M, m \text{ homogène et } m \notin \sum_{j=1}^{i-1} S m_j \right\}.$$

La suite des degrés de M , $(\deg m_1, \deg m_2, \dots)$ est donnée par une suite génératrice maximale $(m_1, m_2, \dots)$ de M .

PROPOSITION [37].

- (1) La suite des degrés de M ne dépend pas de la suite génératrice maximale et est finie.
- (2) La suite des degrés de M , $(\deg m_1, \deg m_2, \dots)$ a la longueur $l = \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \otimes_S M \geq n$.
 M est libre ssi $l = n$.

Le prochain théorème, dû à H. Terao [28] est fondamental d'une part du point de vue combinatoire et d'autre part pour construire (ou vérifier si) un arrangement (est) libre (ou non).

LEMME [37]. Soit un arrangement et $H \notin \mathbf{A}$. Soit $\{e_1, \dots, e_k\}$ la suite des degrés de $\Omega^1(\mathbf{A}_H)$. Une suite $(\omega^1, \dots, \omega^i)$ d'éléments de $\Omega^1(\mathbf{A})$ où $\deg \omega^j = -e_j$, $1 \leq j \leq i \leq k$ définit une suite génératrice $(\omega_H^1, \dots, \omega_H^i)$ de $\Omega^1(\mathbf{A}_H)$ ssi

$$\frac{1}{h} \left(\omega^j - \sum_{l < j} p_l \omega^l \right) \notin \Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\})$$

pour tout j et tout p_l .

THÉORÈME D'ADDITION-RESTRICTION [28]. Soit $\mathbf{A}$ un arrangement et $H \notin \mathbf{A}$. Deux quelconques parmi les trois affirmations suivantes impliquent la troisième:

- (1) $\mathbf{A}$ est un arrangement libre et $\exp(\mathbf{A}) = [e_1, \dots, e_n]$.
- (2) $\mathbf{A} \cup \{H\}$ est un arrangement libre et $\exp(\mathbf{A} \cup \{H\}) = [e_1, \dots, e_{i_0} + 1, \dots, e_n]$.
- (3) $\mathbf{A}_H$ est un arrangement libre et $\exp(\mathbf{A}_H) = [e_1, \dots, \widehat{e_{i_0}}, \dots, e_n]$ où $\widehat{}$ signifie que le terme correspondant a été omis.

REMARQUE. La démonstration initiale de H. Terao utilise les propriétés de $D^1(\mathbf{A})$, en particulier celles de l'idéal $D^1(\mathbf{A})(h)$. Nous allons suivre G.M. Ziegler [37] dont la démonstration utilisant $\Omega^1(\mathbf{A})$ et le lemme de préparation est plus simple.

DÉMONSTRATION: (1) et (3) $\Rightarrow$ (2):

Soit $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ une suite génératrice maximale de $\Omega^1(\mathbf{A})$ telle que $\deg(\omega^i) = -e_i$ et $-e_1 \leq \dots \leq -e_n$.

S'il existe $p_j \in S$ et j_0 tels que

$$\frac{1}{h} \left(\omega^{j_0} - \sum_{j < j_0} p_j \omega^j \right) \in \Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\}) \quad (*)$$

alors $\left\{ \omega^1, \dots, (1/h) \left(\omega^{j_0} - \sum_{j < j_0} p_j \omega^j \right), \dots, \omega^n \right\}$ est une base de $\Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\})$ (cf. 1.3) et $j_0 = i_0$ par le lemme précédent. Ainsi (2) est démontré.

Supposons que l'assertion (*) ne soit pas vérifiée. On peut supposer $-e_{i_0} < -e_{i_0+1}$ ou $i_0 = n$. Par le lemme précédent $\{\omega_H^1, \dots, \omega_H^{i_0-1}\}$ est une suite génératrice de $\Omega^1(\mathbf{A}_H)$ et

$$\omega_H^{i_0} \notin S/(h)\omega_H^1 + \dots + S/(h)\omega_H^{i_0-1}$$

d'où $\{\omega_H^1, \dots, \omega_H^{i_0}\}$ est une suite génératrice de $\Omega^1(\mathbf{A}_H)$ ce qui contredit (3).

(2) et (3) $\Rightarrow$ (1):

Tout d'abord $\# \mathbf{A} - \# \mathbf{A}_H = e_{i_0}$.

Il existe $\omega^0 \in \Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\}) \setminus \Omega^1(\mathbf{A})$ avec $\deg \omega^0 = -(e_{i_0} + 1)$. En effet si un tel ω^0 n'existe pas, on peut trouver une base de $\Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\})$, $\{\omega^1, \dots, \omega^{i_0}, \dots, \omega^n\}$ avec $\deg \omega^i = -e_i$ où $-e_1 \leq \dots \leq -e_n$ telle que $(\omega^1, \dots, \omega^{i_0})$ soit une suite génératrice de $\Omega^1(\mathbf{A})$. Par le lemme précédent, $(\omega_H^1, \dots, \omega_H^{i_0})$ est une suite génératrice de $\Omega^1(\mathbf{A}_H)$. Comme on peut supposer que ou bien $-e_{i_0} < -e_{i_0+1}$ ou $i_0 = n$, on aboutit à une contradiction. Ainsi ω^0 existe. Soit $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ une base de $\Omega^1(\mathbf{A} \setminus \{H\})$ telle que $\omega^{i_0} = \omega^0$ car par le lemme de préparation $\omega^0 \notin S_+ \Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\})$ (ici $S_+ = \bigoplus_{k>0} S_k$). Son image dans $\Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\}) / S_+ \Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\}) \cong \mathbf{k} \otimes_S \Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\})$ n'est pas nulle et appartient à une suite génératrice donc à une base. On construit alors une base $\{\omega'^1, \dots, \omega'^{i_0-1}, h\omega^0, \dots, \omega'^n\}$ de $\Omega^1(\mathbf{A})$ en écrivant $\omega'^1 = \omega^1 - p_1 \omega^0$, p_i étant choisi de façon à rendre les ω'^i homogènes et ω'^i n'a pas de pôle en H , (le lemme de préparation permet cette construction), d'où le résultat.

(1) et (2) $\Rightarrow$ (3):

Soient $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ (resp. $\{\omega'^1, \dots, \omega'^n\}$) des bases homogènes de $\Omega^1(\mathbf{A})$ (resp. $\Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\})$), où $\deg \omega^i = -e_i$. Alors $\omega^i = \sum_j p_{ij} \omega'^j$ où $p_{ij} \in S$ et $\det p_{ij}$ est une forme linéaire définissant l'hyperplan H (cf. critère de liberté 1.3). En réarrangeant au besoin l'ordre des indices, on peut supposer $p_{jj} \neq 0$ pour tout j . Alors p_{ii} est de degré 1 pour un $i = i_0$ et est constant pour $i \neq i_0$. D'où $\deg \omega^{i_0} = \deg \omega'^{i_0} - 1$ et $\deg \omega^i = \deg \omega'^i$ pour $i \neq i_0$. Ainsi $\{\omega^1, \dots, (1/h)\omega^{i_0}, \dots, \omega^n\}$ est une base homogène de $\Omega^1(\mathbf{A} \cup \{H\})$; $\omega^i \in \Omega^1(\mathbf{A})$ et ω^i n'a pas de pôle en H , donc $\omega_H^i \in \Omega^1(\mathbf{A}_H)$ pour $1 \leq i \leq n$. On en conclut que $\{\omega_H^1, \dots, \omega_H^{i_0}, \dots, \omega_H^n\}$ est une base de $\Omega^1(\mathbf{A}_H)$ (cf. critère de liberté 1.3). $\square$

Ce théorème s'applique particulièrement bien en dimension 3 car tous les arrangements de $\mathbf{k}^2$ sont libres et d'exposants très faciles à calculer.

EXEMPLES.

- (1) Dans $\mathbf{k}^3$, soit l'arrangement $\mathbf{A}$ défini par l'équation $xyz(x-y)(x-z)(y-z) = 0$. Soit le sous-arrangement $\mathbf{A}_1$ défini par l'équation $xz(x-z) = 0$. Il est radial, donc libre d'exposants $[0, 1, 2]$. Ajoutons l'hyperplan d'équation $y = 0$ de façon à obtenir l'arrangement $\mathbf{A}_2$. $\mathbf{A}_2 - \{y = 0\} = \mathbf{A}_1$ est libre d'exposants $[0, 1, 2]$; $\mathbf{A}_{2y}$, la restriction de $\mathbf{A}_2$ à $\{y = 0\}$ est libre car radial d'exposants $[1, 2]$, donc $\mathbf{A}_2$ est libre d'exposants $[1, 1, 2]$ (par le théorème d'addition-restriction).

Soit $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 \cup \{y - z\}$. Comme $\exp(\mathbf{A}_2) = [1, 1, 2]$ et $\exp(\mathbf{A}_{2(y-z)}) = [1, 2]$, $\mathbf{A}_3$ est libre et $\exp(\mathbf{A}_3) = [1, 2, 3]$.

De même, soit $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A} \cup \{x - y\}$; $\exp(\mathbf{A}_3) = [1, 2, 2]$ et $\exp(\mathbf{A}_{3(x-y)}) = [1, 2]$, $\mathbf{A}_4$ est libre et $\exp(\mathbf{A}_4) = [1, 2, 3]$.

- (2) Soit $\mathbf{A}$ l'arrangement de $\mathbf{k}^3$ défini par $xyz(x+y+z) = 0$, $\mathbf{A}_{x+y+z}$ est libre car radial et $\exp(\mathbf{A}_{x+y+z}) = [1, 2]$. $\mathbf{A} \setminus \{x+y+z\}$ est l'arrangement défini par $xyz = 0$. Il est facile de vérifier qu'il est libre d'exposants $[1, 1, 1]$, donc $\mathbf{A}$ n'est pas libre.

Rappelons que le théorème d'addition-restriction permet de montrer la liberté des arrangements de type fibré.

H. Terao [28] fait remarquer:

The two theorems, Removal Theorem and Addition Theorem, lead us to an interesting method constructing free arrangement

et pose la question suivante

Can the freeness of an arrangement X be determined from the lattice $L(X)$?

G.M. Ziegler [38] donne une réponse affirmative pour le cas où $\# \mathbf{k} \leq 4$, mais pense qu'en général ce résultat doit être faux. D'un autre côté, P. Cartier [6], dans son exposé au Séminaire Bourbaki: "Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire" signale que:

la signification de l'hypothèse de liberté reste obscure.

Sans apporter de réponse complète, nous allons, dans la suite, essayer de mieux comprendre cette notion d'arrangement libre. Pour cela et en revenant à un point de départ de la théorie, V.I. Arnold [1] calcule la cohomologie du complément X_l de l'arrangement de Coxeter A_l complexifié et remarque que le polynôme de Poincaré du complément X_l se factorise:

$$P_{X_l}(t) = (1+t)(1+2t) \cdots (1+lt)$$

en faisant apparaître les exposants de l'arrangement libre A_l . Ce résultat a été généralisé par E. Brieskorn aux autres arrangements de Coxeter et par H. Terao aux arrangements libres.

2. Cohomologie du complément d'un arrangement.

On suppose $\mathbf{k} = \mathbb{C}$.

2.1. Le lemme de Brieskorn. Soit $X = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathbf{A}} H$ le complément d'un arrangement d'hyperplans affines $\mathbf{A}$ de $\mathbb{C}^n$ (on n'impose pas aux hyperplans de $\mathbf{A}$ de contenir un même point). À chaque hyperplan H de $\mathbf{A}$ une forme différentielle logarithmique $\alpha^H = \frac{1}{2i\pi} \frac{dh}{h}$ où $H = \ker h$ est associée. Soit ω^H la classe de cette forme dans $H^1(X)$.

PROPOSITION [2]. $\{\omega^H \mid H \in \mathbf{A}\}$ engendrent l'algèbre $H^*(X)$.

DÉMONSTRATION: Soient X' , X'' les compléments des arrangements $\mathbf{A} \setminus \{H_0\}$ et $\mathbf{A}_{H_0}$ où H_0 est un hyperplan choisi dans $\mathbf{A}$. Alors $i: X \hookrightarrow X'$ et X'' est le complément de X dans X' ; d'où la suite exacte de cohomologie:

$$\cdots \longrightarrow H^k(X') \xrightarrow{i^k} H^k(X) \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}(X', X) \longrightarrow H^{k+1}(X') \longrightarrow \cdots$$

Le but est d'établir un isomorphisme $H^{k+1}(X', X) \xrightarrow{\sim} H(X'')$.

Par le théorème du voisinage tubulaire, on obtient $\eta: E \rightarrow X''$ projection du fibré vectoriel normal de X'' dans X' , où E est un voisinage ouvert convenable de X'' dans X' et $E_0 = E \setminus X'' = E \cap X$.

Par le théorème d'excision, on obtient un isomorphisme:

$$\rho^*: H^*(X', X) \xrightarrow{\sim} H^*(E, E_0)$$

correspondant à l'inclusion $\rho: (E, E_0) \hookrightarrow (X', X)$.

Par le théorème d'isomorphisme de Thom, le composé:

$$H^{k-1}(X'') \xrightarrow{\eta^{k-1}} H^{k-1}(E) \xrightarrow{-\cup \mu_{H_0}} H^{k+1}(E, E_0)$$

est un isomorphisme, où $\mu_{H_0} = \rho^2 \delta^1(\omega^0) \in H^2(E, E_0)$ est la classe de Thom (orientation) de $\eta: E \rightarrow X''$.

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^k(X') & \xrightarrow{i^k} & H^k(X) & \xrightarrow{\delta^k} & H^{k+1}(X, X') \longrightarrow H^{k+1}(X') \longrightarrow \dots \\
 & & & & & & \approx \downarrow \rho^{k+1} \\
 & & & & & & H^{k+1}(E, E_0) \\
 & & & & & & \approx \uparrow -\cup \mu_{H_0} \\
 & & & & & & H^{k-1}(E) \\
 & & & & & & \approx \uparrow \eta^{k-1} \\
 & & & & & & H^{k-1}(X'')
 \end{array}$$

(A diagonal arrow labeled Δ^k points from $H^k(X')$ to $H^{k-1}(X'')$)

Soit $H \neq H_0$, $H \in \mathbf{A}$, alors:

$$i^1(\omega_{H_0}^H) = \omega^H, \text{ où } \omega_{H_0}^H \text{ est la classe de } \frac{1}{2i\pi} \frac{dh}{h} \text{ dans } H^1(X').$$

$$\eta^1(\omega_{H_0}^{H \cap H_0}) = \rho^1(\omega_{H_0}^H) \text{ où } \omega_{H_0}^{H \cap H_0} \text{ est la classe de } \frac{1}{2i\pi} \frac{d\tilde{h}}{\tilde{h}} \text{ dans } H^1(X'') \text{ avec } \ker \tilde{h} = H \cap H_0.$$

$$\delta^{*+1}(\omega^H \cup \phi) = \omega_{H_0}^H \cup \delta^* \phi \text{ pour } \delta \in H^*(X).$$

On suppose que:

- $\{\omega_{H_0}^H \mid H \in \mathbf{A} \setminus \{H_0\}\}$ engendre $H^*(X')$ comme algèbre.
- $\{\omega_{H_0}^{H \cap H_0} \mid H \in \mathbf{A} \setminus \{H_0\}\}$ engendre $H^*(X'')$ comme algèbre.

Le résultat s'obtient alors par récurrence sur le nombre d'hyperplans de l'arrangement $\mathbf{A}$. $\square$

THÉORÈME [2] "LEMME DE BRIESKORN". Soit x l'intersection d'une famille d'hyperplans de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_x = \{H \in \mathbf{A} \mid x \subseteq H\}$ et $X_l = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{H \in \mathbf{A}_x} H$. Alors l'inclusion $i_x: X \hookrightarrow X_x$ induit un isomorphisme:

$$\oplus i_x^*: \bigoplus_{\text{codim } x=p} H^p(X_x) \rightarrow H^p(X).$$

DÉMONSTRATION:

- La surjectivité est une conséquence directe de la proposition précédente.
- Pour l'injectivité, soit B_x une boule centrée en un point générique de x et qui ne rencontre aucun hyperplan de $\mathbf{A}$ contenant x . On peut rétracter par déformation $\mathbb{C}^l$ sur B_x de façon à envoyer X_x sur $B_x \cap X_x$. Il s'ensuit que i_x^* est injective.

En montrant que, pour $x \neq y$ et $\text{codim } x = \text{codim } y = p$, on a que $j_y^* \circ i_x^*: H^p(X_x) \rightarrow H^p(X_y)$ est nulle où $j_y: B_y \cap X_y \hookrightarrow X$, on obtient le résultat. $\square$

Ainsi on obtient la suite exacte:

$$\dots \longrightarrow H^k(X') \xrightarrow{i^k} H^k(X) \xrightarrow{\Delta^k} H^{k-1}(X'') \longrightarrow \dots$$

$$\text{avec } \Delta^k(\phi) = \psi \text{ ssi } \rho^{k+1} \delta^k(\phi) = \eta^{k-1}(\psi) \cup \mu_{H_0}.$$

LEMME. *l'homomorphisme i^k est injectif, pour tout k .*

DÉMONSTRATION: Supposons le lemme vrai pour $n - 1$ où $V = \mathbb{C}^{n-1}$.

- Considérons d'abord le cas d'un arrangement $\mathbf{A}$ de $\mathbb{C}^n$ où tous les hyperplans contiennent l'origine. Soit $H \in \mathbf{A} \setminus \{H_0\}$ et soit T un hyperplan affine parallèle à H , $T \neq H$. Alors $X \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^* \times Y$ où Y est le complément d'un arrangement d'hyperplans affines de $\mathbb{C}^{n-1}$. Ainsi $i_Y^*: H^*(Y') \rightarrow H^*(Y)$ est injectif où Y'' est obtenu de Y en ajoutant l'hyperplan $T \cap H_0$ et i_Y est l'inclusion $Y \hookrightarrow Y'$. Le résultat est montré en appliquant la formule de Künneth.
- Pour un arrangement d'hyperplans affines, il suffit d'appliquer le lemme de Brieskorn. $\square$

COROLLAIRE. *Pour tout k on a une suite exacte courte:*

$$0 \longrightarrow H^k(X') \xrightarrow{i^k} H^k(X) \xrightarrow{\Delta^k} H^{k-1}(X'') \longrightarrow 0.$$

COROLLAIRE. $H^k(X)$ est un groupe abélien libre pour tout $k \geq 0$ et $H^k(X) \approx H^k(X') \oplus H^{k-1}(X'')$.

Une démonstration détaillée de ces résultats se trouve dans la thèse de M. Falk [7].

2.2. Le polynôme de Poincaré.

DÉFINITION. La *série de Poincaré* d'un espace topologique X est définie par $P_X(t) = \sum_{p \geq 0} \text{rang}(H^p(X))t^p$.

Si X est le complément d'un arrangement de $\mathbb{C}^n$, $P_X(t)$ est un polynôme de degré au plus égal à n , que nous appellerons *polynôme de Poincaré*. Selon P. Orlik et L. Solomon [18], nous allons calculer le polynôme de Poincaré du complément d'un arrangement $\mathbf{A}$ en utilisant la structure combinatoire de $\mathbf{A}$.

Rappelons (cf. 1.1) qu'à tout arrangement $\mathbf{A}$ de $V = \mathbb{k}^n$, $\mathbb{k}$ corps quelconque, on associe l'ensemble partiellement ordonné $L(\mathbf{A})$ des intersections des hyperplans de $\mathbf{A}$, de la façon suivante:

$$x \leq y \text{ ssi } x \supseteq y.$$

On convient de noter 0 le plus petit élément qui est l'espace V ; la fonction rang r sur $L(\mathbf{A})$ est définie et correspond à la codimension, i.e. $r(x) = \text{codim} \bigcap_{H \leq x} H$, les éléments de rang 1 étant les hyperplans. Dans le cas d'un arrangement $\mathbf{A}$ d'hyperplans vectoriels, $L(\mathbf{A})$ est un *treillis géométrique*.

Notons que

$$\begin{aligned} x \vee y &= x \cap y \\ x \wedge y &= \bigcap \{z \in L(\mathbf{A}) \mid z \geq x \text{ et } z \geq y\} \end{aligned}$$

La *fonction de Möbius* sur $L(\mathbf{A})$ est définie comme suit:

$$\begin{aligned} \mu: L(\mathbf{A}) \times L(\mathbf{A}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, x) &\longmapsto 1 \\ (x, y) &\longmapsto \mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) \text{ si } x \leq y \end{aligned}$$

On note $\mu(x) = \mu(0, x)$.

THÉORÈME [18]. $P_X(t) = \sum_{x \in L(\mathbf{A})} \mu(x)(-t)^{r(x)}$.

Le théorème découle directement de l'isomorphisme $H^p(X) \approx H^p(X') \oplus H^{p-1}(X')$, ce qui entraîne $P_X(t) = P_{X'}(t) + tP_{X''}(t)$, égalité vérifiée par $\sum_{x \in L(\mathbf{A})} \mu(x)(-t)^{r(x)}$; il suffit alors de faire une récurrence sur le nombre d'hyperplans de $\mathbf{A}$.

Signalons que H. Terao [31] a étendu ce résultats aux arrangements projectifs, i.e. de $P^{n+1}(\mathbb{C})$:

$$P_X(t) = \sum_{x \in L(\mathbf{A})} \mu(x) \frac{(-t)^{r(x)} - (-t)^{n+2}}{1+t}.$$

2.3. La formule de Shephard-Todd-Arnold-Brieskorn-Orlik-Solomon-Terao.

Considérons des arrangements d'hyperplans dont l'intersection est non vide. Revenons aux arrangements libres de $\mathbb{C}^n$. Nous allons donner une interprétation cohomologique à la notion d'exposants.

Complétant un résultat de V.I. Arnold [1], E. Brieskorn [2] montre que le polynôme de Poincaré du complément du complexifié d'un arrangement de Coxeter, se décompose comme suit:

$$P_X(t) = \prod_{i=1}^n (1 + e_i t)$$

où $[e_1, \dots, e_n]$ est le multi-ensemble des exposants de l'arrangement, i.e. du groupe de Coxeter. Le résultat a été étendu par P. Orlik et L. Solomon [19] aux arrangements associés à un groupe d'automorphismes de $\mathbb{C}^n$ engendré par un nombre fini de pseudo-réflexions. (De tels groupes ont été classifiés par Shephard et Todd [24]). En définissant convenablement la notion d'exposants [19] ils obtiennent une présentation de $P_X(t)$ comme ci-dessus. Le résultat fondamental de H. Terao [28] a été de montrer que ces résultats étaient des cas particuliers de la décomposition du polynôme de Poincaré du complément d'un arrangement libre à l'aide des exposants.

THÉORÈME [30]. Soit $\mathbf{A}$ un arrangement libre de $\mathbb{C}^n$ d'exposants $[e_1, \dots, e_n]$. Alors:

$$P_X(t) = \prod_{i=1}^n (1 + e_i t).$$

Ce résultat qui s'applique aux arrangements libres de $\mathbb{C}^n$ est en fait, un corollaire d'un théorème montré par L. Solomon et H. Terao [25] valable pour tous les arrangements libre sans distinction du corps de base.

Le polynôme caractéristique de $L(\mathbf{A})$ est

$$\chi_{\mathbf{A}}(t) = \sum_{x \in L(\mathbf{A})} \mu(x) t^{n-r(x)}$$

où $n = r(\bigcup_{H \in \mathbf{A}} H)$. Alors $(-t)^n \chi_{\mathbf{A}}(-1/t) = P_X(t)$ si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Ainsi, pour un arrangement libre de $\mathbb{C}^n$, d'exposants $[e_1, \dots, e_n]$, le théorème précédent s'énonce:

$$\chi_{\mathbf{A}}(t) = \prod_{i=1}^n (t - e_i).$$

La série de Poincaré du module $D^p(\mathbf{A})$ est

$$\text{Poin}(D^p(\mathbf{A}); u) = \sum_{j \geq 0} \dim_{\mathbf{k}} D^p(\mathbf{A})_j u^j$$

où $D^p(\mathbf{A})_j$ est la $j^{\text{ième}}$ composante homogène du module gradué $D^p(\mathbf{A})$.

Notons $\Psi(\mathbf{A}; u, t) = \sum_{p \geq 0} \text{Poin}(D^p(\mathbf{A}); u)(t(x-1) - 1)^p$

- $\Psi(\mathbf{A}; u, t)$ est un polynôme en u et t .
- Pour $x \in L(\mathbf{A})$, $t^{r(x)}$ divise $\Psi(\mathbf{A}_x; u, t)$ (rappelons que $\mathbf{A}_x = \{H \in \mathbf{A} \mid x \leq H\}$).
- Si $\mathbf{A}$ est un arrangement libre d'exposants $[e_1, \dots, e_n]$ alors

$$\Psi(\mathbf{A}; u, t) = \prod_{i=1}^n (1 + u + u^2 + \dots + u^{e_i-1} - u^{e_i} t)$$

Cette dernière propriété, qui résulte d'un calcul élémentaire, donne pour $u = 1$

$$\Psi(\mathbf{A}; 1, t) = \prod_{i=1}^n (e_i - t)$$

et le lien avec le polynôme caractéristique apparaît clairement. Il reste, bien entendu à l'établir. Pour cela, L. Solomon et H. Terao [25] et auparavant H. Terao [32] définissent les propriétés qui caractérisent $\chi_{\mathbf{A}_x}(t)$.

PROPOSITION [32], [25]. Soit une application $G: L(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbb{Q}[t]$ vérifiant les conditions suivantes:

- (1) $G(V) = t^n$.
- (2) $G(x)|_{t=1} = 0$ sauf si $x = V$
- (3) $t^{r(x)}$ divise $G(x)$ pour tout $x \in L(\mathbf{A})$.
- (4) Le degré en t de $\sum_{y \in L(\mathbf{A}_x)} \mu(y, x) G(y)$ est inférieur ou égal à $r(x)$, pour tout $x \in L(\mathbf{A})$.

Alors $G(x) = \chi_{\mathbf{A}_x}(t)$ pour tout $x \in L(\mathbf{A})$.

Soit

$$\begin{aligned} L(\mathbf{A}) &\longrightarrow \mathbb{Q}[t] \\ x &\longmapsto (-1)^n \Psi(\mathbf{A}_x; 1, t) \end{aligned}$$

Cette application vérifie les quatres conditions de la proposition et est donc égale à $\chi_{\mathbf{A}_x}(t)$. Signalons que la vérification de la dernière assertion (4) est difficile et constitue une grande partie du développement de [56].

THÉORÈME [25]. $\chi_{\mathbf{A}}(t) = (-1)^n \Psi(\mathbf{A}; 1, t)$

COROLLAIRE [25]. Soit $\mathbf{A}$ un arrangement libre, d'exposants $[e_1, \dots, e_n]$ alors $\chi_{\mathbf{A}}(t) = \prod_{i=1}^n (t - e_i)$.

REMARQUE. Comme le signale G. Ziegler [37], il est possible d'établir un théorème "dual" en utilisant les modules $\Omega^p(\mathbf{A})$ au lieu de $D^p(\mathbf{A})$.

EXEMPLE. B. Grunbaum [10] a classé tous les arrangements simpliciaux de $\mathbb{R}^3$ ayant au plus 38 hyperplans, (i.e. les composantes connexes de $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{H \in \mathbf{A}} H$ sont des cônes simpliciaux). L'arrangement $\mathbf{A}_2(18)$ (fig. 1) admet un polynôme caractéristique qui se factorise dans $\mathbb{Z}[t]$:

$$\chi_{\mathbf{A}_2(18)}(t) = (t-1)(t-8)(t-9).$$

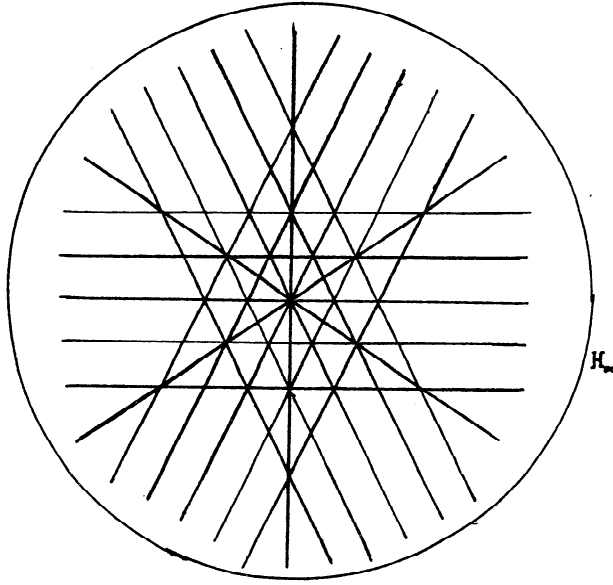


Figure 1. $\mathbf{A}_2(18)$ et $\mathbf{A}_1^*(19) = \mathbf{A}_2(18) \cup \{H_\infty\}$.

Par application itérée du théorème d'addition, on montre que l'arrangement $\mathbf{A}_1^*(19)$ est libre d'exposants [1, 7, 11]. Comme $\mathbf{A}_1^*(19) = \mathbf{A}_2(18) \cup \{H_\infty\}$, on en déduit que $\mathbf{A}_2(18)$ ne peut pas être libre. Ainsi la factorisation dans $\mathbb{Z}[t]$ du polynôme caractéristique n'est pas une propriété qui caractérise la liberté.

EXEMPLE 2. Les arrangements de type fibré [9].

Un arrangement $\mathbf{A}$ de type fibré de $\mathbb{C}^n$ définit la tour de fibration suivante:

$$X = X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \dots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{p_2} X_1 = \mathbb{C}^*$$

où la fibre F_k de p_k est homéomorphe à $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_{e_k}\}$.

M. Falk et R. Randell [9] montrent que

- chaque projection p_k admet une section.
- $\pi_1(X_{k-1})$ agit trivialement sur $H_1(F_k)$.

Ils en déduisent que:

$$P_{X_k}(t) = P_{X_{k-1}}(t) \cdot P_{F_k}(t) \quad \text{pour tout } k = 2, \dots, n.$$

Comme $P_{F_k}(t) = 1 + e_k t$, on retrouve le résultat:

$$P_X(t) = \prod_{i=1}^n (1 + e_i t).$$

De plus $[e_1, \dots, e_n]$ est l'ensemble des exposants de l'arrangement $\mathbf{A}$ qui est libre [9], [15].

REMARQUE. H. Terao [31] a défini la notion d'arrangements projectifs (resp. affines) libres. Il a montré dans ces cas une formule semblable pour la factorisation du polynôme de Poincaré à l'aide d'une notion convenable d'exposants.

2.4. L'algèbre des formes différentielles [2] [20]. Soit k un corps et $V = k^n$. Nous avons noté S l'algèbre symétrique de V^* et S' son corps de fractions.

Soit $\Omega_{\text{rat}}^\bullet(V)$ l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel $S' \otimes_k V^*$ sur V' , $\Omega_{\text{rat}}^\bullet(V) = \bigoplus_{p=0}^n \Omega_{\text{rat}}^p(V)$ où $\Omega_{\text{rat}}^0(V) = S'$ (cf. 1.1) munie de la différentielle extérieure:

$$d: \Omega_{\text{rat}}^\bullet(V) \rightarrow \Omega_{\text{rat}}^\bullet(V)$$

qui est l'unique extension k -linéaire de l'application k -linéaire unique $d: S' \rightarrow S' \otimes_k V^*$ telle que $d(fg) = f dg + g df$ pour f et $g \in S'$ et $d\alpha = 1$ pour $\alpha \in V^*$.

DÉFINITION. Soit A un arrangement d'hyperplans de $k^n = V$. Soit $\mathcal{R}$ la k -sous-algèbre de $\Omega_{\text{rat}}^\bullet(V)$ engendré par les $\alpha^H = \frac{dh}{h} \in \Omega_{\text{rat}}^1(V)$ pour tous les $H = \ker h \in A$ et par l'identité. Si $A = \emptyset$, on pose $\mathcal{R} = k$. Alors

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{p=0}^n \mathcal{R}^p \quad \text{où } \mathcal{R}^p = \mathcal{R} \cap \Omega_{\text{rat}}^p(V).$$

Le choix d'un hyperplan H_0 de l'arrangement A détermine deux autres arrangements $A \setminus \{H_0\}$ noté A' et A_{H_0} noté A'' et par suite deux algèbres de formes différentielles notées $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$.

Rappelons que l'on avait obtenu une suite exacte de cohomologie, où $k = \mathbb{C}$:

$$0 \longrightarrow H^*(X') \xrightarrow{i^*} H^*(X) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(X'') \longrightarrow 0.$$

On va, de même, définir une suite exacte reliant les algèbres de formes différentielles. Tout d'abord, $\mathcal{R}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}$. Notons $i_{\mathcal{R}}: \mathcal{R}' \hookrightarrow \mathcal{R}$. Pour définir le morphisme convenable de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}''$, examinons l'exemple suivant: Soit $n = 1$, i.e. $k = V$ et $A = \{0\}$; alors $A' = A'' = \emptyset$. On veut obtenir une suite exacte:

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{i} k + k \frac{dx}{x} \xrightarrow{j} k \longrightarrow 0.$$

alors nécessairement $j\left(a + b \frac{dx}{x}\right) = b$, ce qui, dans le cas où $k = \mathbb{C}$, est le résidu de la 1-forme $b \frac{dx}{x}$.

Dans le cas général, nous allons voir que le *résidu de Leray* sur les formes différentielles permettra de définir le morphisme cherché de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}''$.

Soit $h_0 \in V^*$ tel que $H_0 = \ker h_0$. Soit S_0 la localisation de S en h_0 , i.e. le sous-anneau de S' constitué des f/g tels que f et $g \in S$ et g premier à h_0 .

La restriction $\rho: V^* \rightarrow H_0^*$ admet une extension unique comme morphisme de k -algèbres $\rho: S_0 \rightarrow k(H_0)$. On définit la k -sous-algèbre de $\Omega_{\text{rat}}^\bullet(V)$:

$$\Omega_0 = \bigoplus_{p=0}^n \bigoplus S_0 dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

où $i_1 < \dots < i_p$ et $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une base de V^* .

Il existe une unique extension de ρ comme application linéaire de $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels:

$$\rho: \Omega_0 \rightarrow \Omega(H_0)$$

telle que

- $\rho(\omega \wedge \eta) = \rho(\omega) \wedge \rho(\eta)$, ω et $\eta \in \Omega_0$
- $\rho(f\omega) = \rho(f) \wedge \rho(\omega)$, $f \in S_0$, $\omega \in \Omega_0$
- $\rho(d\alpha) = d\rho(\alpha)$, $\alpha \in V^*$

On a noté ρ les trois applications.

On dit que $\phi \in \Omega_{\text{rat}}^*(V)$ a un *pôle simple* le long de H_0 si $h_0\phi \in \Omega_0$. Soit $\phi \in \Omega_{\text{rat}}^*(V)$ tel que $h_0\phi \in \Omega_0$ et $d\phi = 0$. Alors il existe ψ et $\theta \in \Omega_0$ tels que $\phi = \frac{dh_0}{h_0} \wedge \psi + \theta$ et $\rho(\psi) \in \Omega(H_0)$ est déterminé de façon unique par ϕ . C'est le *résidu de ϕ le long de H_0* , noté $\text{res}(\phi)$.

Soit $H_0 \notin \{H_1, \dots, H_p\} \subseteq \mathbf{A}$, alors:

- $\text{res} \left(\frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p} \right) = 0$
- $\text{res} \left(\frac{dh_0}{h_0} \wedge \frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p} \right) = \frac{dh_1^0}{h_1^0} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p^0}{h_p^0}$

où $H_i = \ker h_i$, $i = 1, \dots, p$ et $H_i \cap H_0 = \ker h_i^0$, $i = 1, \dots, p$.

THÉORÈME [20].

- (1) La suite $0 \longrightarrow \mathcal{R}' \xrightarrow{i^*} \mathcal{R} \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{R}'' \longrightarrow 0$ est exacte.
- (2) Si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, l'homomorphisme $\gamma: \mathcal{R} \rightarrow H^*(X)$ défini par

$$\gamma \left(\frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p} \right) = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p,$$

où ω^i est la classe d'homologie de $\frac{dh_i}{h_i}$, est un isomorphisme de $\mathbf{k}$ -algèbres graduées.

REMARQUE. E. Brieskorn [2] a montré l'assertion (2) du théorème (conjecture de V.I. Arnold [1]). En fait le résultat a mis en évidence un isomorphisme entre la $\mathbb{Z}$ -sous-algèbre de $\mathcal{R}$ et la cohomologie singulière $H^*(X; \mathbb{Z})$ (en prenant soin de considérer les formes $\frac{1}{2i\pi} \frac{dh}{h}$).

DÉMONSTRATION: Nous allons nous restreindre au cas $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Pour le cas général voir [12] [20].

Montrons que le diagramme est commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^*(X') & \xrightarrow{i^*} & H^*(X) & \xrightarrow{\Delta^*} & H^*(X'') \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \gamma' & & \uparrow \gamma & & \uparrow \gamma'' \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}' & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{R} & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{R}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

La commutativité du carré de gauche est claire. Vérifions celle du carré de droite:

Soit $H_i \neq H_0$, $i = 1, \dots, p$ et $\frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p} \in \mathcal{R}$. Alors $\gamma \left(\frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p} \right) = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p \in \text{Im } i^*$; donc par l'exactitude de la suite de cohomologie, on a:

$$\Delta^* \cdot \gamma \left(\frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p} \right) = \gamma'' \cdot \text{res} \left(\frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p} \right).$$

Soit $\frac{dh_0}{h_0} \wedge \frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p} \in \mathcal{R}$, Comme $\Delta^*(\phi) = \psi$ ssi $\rho^* \delta^*(\phi) = \mu_{H_0} \cup \eta^*(\psi)$, on obtient:

$$\begin{aligned} \rho^* \delta^* (\omega^0 \cup \omega^1 \cup \dots \cup \omega^p) &= \rho^* (\delta^* (\omega^0 \cup \omega^1 \cup \dots \cup \omega^p)) \\ &= \rho^* (\delta^* (\omega^0) \cup \omega'^1 \cup \dots \cup \omega'^p) \quad (\text{car } \delta(\omega \cup \phi) = \delta(\omega) \cup \phi') \\ &= \rho^* (\delta(\omega^0)) \cup \rho^* (\omega'^1 \cup \dots \cup \omega'^p) \\ &= \mu_{H_0} \cup \eta^* (\omega_0'^1 \cup \dots \cup \omega_0'^p) \end{aligned}$$

où ω' est la classe de $\frac{dh}{h}$ dans $H^*(X')$ et ω_0^i celle de $\frac{dh_i^0}{h_i^0}$ dans $H^*(X'')$.

D'où

$$\begin{aligned} \Delta^* (\omega^0 \cup \dots \cup \omega^1) &= \omega_0^1 \cup \dots \cup \omega_0^p \\ &= \gamma \cdot \text{res} \left(\frac{dh_0}{h_0} \wedge \frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p} \right). \end{aligned}$$

la démonstration est complétée par récurrence sur le nombre des hyperplans de $\mathbf{A}$.

- Si $\mathbf{A} = \emptyset$, alors $H^*(X) = \mathbb{C} = \mathcal{R}$.
- Si $\mathbf{A} = \{H\}$ alors on se trouve dans le cas de l'exemple ci-dessus.
- Si $\# \mathbf{A} > 1$. Il faut montrer que $\ker(\text{res}) \subset \text{Im } i_{\mathcal{R}}$, ce qui se déduit de la commutativité du diagramme car par hypothèse de récurrence γ' et γ'' sont des isomorphismes. Par le lemme des cinq, on obtient que γ est un isomorphisme. $\square$

COROLLAIRE 1. *Le polynôme de Poincaré de $\mathcal{R}$ est*

$$P_{\mathcal{R}}(t) = \sum_{x \in L(\mathbf{A})} \mu(x)(-t)^{\text{codim } x}.$$

COROLLAIRE 2. *Pour $x \in L(\mathbf{A})$ soit $\mathcal{R}_x = \sum \mathbf{k} \frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_p}{h_p}$ où la somme est prise sur les $\{H_1, \dots, H_p\} \subseteq \mathbf{A}$ tels que $\text{codim } x = \text{codim } H_1 \cap \dots \cap H_p$. Alors $\mathcal{R}^p = \bigoplus_{r(x)=p} \mathcal{R}_x$.*

2.5. L'algèbre d'Orlik et Solomon [18]. Soit $\mathcal{T}$ la catégorie dont les objets sont les treillis géométriques et les morphismes sont les applications $f: T \rightarrow T'$ entre les ensembles sous-jacents aux treillis géométriques (que nous noterons aussi T et T'), vérifiant:

- (i) $f(A_T) \subseteq A_{T'}$ où A_T est l'ensemble des éléments de rang 1 de T ; i.e. les atomes de T .
- (ii) $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y)$
- (iii) $r_{T'}(f(x)) \leq r_T(x)$ où r est la fonction rang du treillis.

On va définir un foncteur covariant noté $\mathcal{A}$ de la catégorie $\mathcal{T}$ dans la catégorie des $\mathbf{k}$ -algèbres graduées anticommutatives.

Soit $\mathcal{E}(T) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{E}_p(T)$ l'algèbre extérieure du $\mathbf{k}$ -espace vectoriel (ou $\mathbf{k}$ -module libre si $\mathbf{k}$ est un anneau) ayant pour base les atomes du treillis géométrique T .

On dit que le sous-ensemble $\{a_1, \dots, a_p\} \subseteq A_T$ est *indépendant* ssi:

$$r \left(\bigvee_{i=1}^p a_i \right) = p$$

et *dépendant* ssi:

$$r \left(\bigvee_{i=1}^p a_i \right) < p.$$

Soit $\partial: \mathcal{E}(T) \rightarrow \mathcal{E}(T)$ l'application $\mathbf{k}$ -linéaire définie par

$$\partial(a_1 \wedge \dots \wedge a_p) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} a_1 \wedge \dots \wedge \widehat{a_k} \wedge \dots \wedge a_p,$$

$\partial(1) = 0$ et $\partial(a) = 1$. Alors $\partial^2 = 0$.

Soit $\mathcal{I}_T$ l'idéal de $\mathcal{E}(T)$ engendré par les éléments $\partial(a_1 \wedge \dots \wedge a_p)$ où $\{a_1, \dots, a_p\}$ est dépendant. Comme $\mathcal{I}_T$ est engendré par des éléments homogènes, le quotient $\mathcal{E}/\mathcal{I}_T$ noté $\mathcal{A}(T)$ est une $\mathbf{k}$ -algèbre graduée anticommutative, ce qui définit le foncteur $\mathcal{A}$.

THÉORÈME [18]. *Le polynôme de Poincaré de $\mathcal{A}(T)$ est*

$$P_{\mathcal{A}(T)}(t) = \sum_{x \in T} \mu(x) (-t)^{r(x)}.$$

Rappelons que si nous notons $\chi_T(t)$ le polynôme caractéristique du treillis T alors $P_{\mathcal{A}(T)}(t) = \sum (-t)^{r(T)} \chi_T(-t^{-1})$ où $r(T)$ désigne le rang du plus grand élément de T . Si $T = L(\mathbf{A})$ et si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, on retrouve le polynôme de Poincaré du complément $X = C^I \setminus \bigcup_{H \in \mathbf{A}} H$.

Soit T' un sous-treillis de T , l'inclusion $\mathcal{E}(T') \subseteq \mathcal{E}(T)$ induit un homomorphisme de $\mathbf{k}$ -algèbres

$$\begin{aligned} i: \mathcal{A}(T') &\longrightarrow \mathcal{A}(T) \\ a + \mathcal{I}_{T'} &\longmapsto a + \mathcal{I}_T, \quad a \in A_{T'} \end{aligned}$$

et si $\mathcal{I}_T \cap \mathcal{E}_{T'} = \mathcal{I}_{T'}$, i est un monomorphisme. En particulier, cette dernière égalité est vérifiée si $T' = T_x$, i.e. T' est le treillis des éléments y de T tels que $y \leq x$ où $x \in T$.

Soit $a_0 \in A_T$; on lui associe (comme pour les arrangements) le treillis T' , sous-treillis de T tel que $A_{T'} = A_T \setminus \{a_0\}$ et T'' le treillis formé des $x \vee a_0$ où $x \in T$. On définit alors les algèbres $\mathcal{A}(T')$ et $\mathcal{A}(T'')$ correspondantes.

PROPOSITION. *Il existe un homomorphisme $j: \mathcal{A}(T) \rightarrow \mathcal{A}(T'')$ surjectif tel que:*

- (i) $j(\overline{a_{i_1}} \cdots \overline{a_{i_p}}) = 0$ où $\overline{a_{i_j}} = a_{i_j} + \mathcal{I}_T$, $\overline{a_{i_1}} \cdots \overline{a_{i_p}}$ désigne le produit dans $\mathcal{A}(T)$ et $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_p}\} \subseteq A_T$.
- (ii) $j(\overline{a_{i_0}} \overline{a_{i_1}} \cdots \overline{a_{i_p}}) = \overline{a''_{i_1}} \cdots \overline{a''_{i_p}}$ où $\overline{a''_{i_j}} = a_{i_j} \vee a_0 + \mathcal{I}_{T''}$.

PROPOSITION [20].

- (1) $0 \rightarrow \mathcal{A}(T') \xrightarrow{i} \mathcal{A}(T) \xrightarrow{j} \mathcal{A}(T'')$ est une suite exacte.
 (2) Si $T = L(\mathbf{A})$ où $\mathbf{A}$ est un arrangement d'hyperplans d'un espace vectoriel sur $\mathbf{k}$, alors il existe un isomorphisme de $\mathbf{k}$ -algèbres $\mathcal{A}(L(\mathbf{A})) \rightarrow \mathcal{R}$ qui associe à H la 1-forme $\alpha^H = \frac{d\phi_H}{\phi_H}$ avec $H = \ker \phi_H$ tel que:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(L(\mathbf{A}')) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{A}(L(\mathbf{A})) & \xrightarrow{j} & \mathcal{A}(L(\mathbf{A}'')) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}' & \xrightarrow{i\pi} & \mathcal{R} & \xrightarrow{j\pi} & \mathcal{R}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

soit commutatif

REMARQUE. L'application linéaire $\partial: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définit l'application $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ qui s'interprète par l'isomorphisme précédent si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ et si la dimension est l comme le produit intérieur $i(\xi)$ où $\xi = \sum_{i=1}^l z_i \partial_{c_i}$, ∂_{c_i} étant la dérivée dans la direction de l'élément de base c_i et $\{z_1, \dots, z_l\}$ la base de $(\mathbb{C}^l)^*$ duale de la base $\{c_1, \dots, c_l\}$ de $\mathbb{C}^l$.

REMARQUE. Dans la partie 2, nous donnerons deux autres algèbres isomorphes aux précédentes complétant ainsi l'étude de cette situation.

Soit $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. L'anneau de cohomologie $H^*(X)$ du complément d'un arrangement $\mathbf{A}$ est déterminé dès que l'on connaît l'algèbre $\mathcal{A}$ définie par les générateurs et relations qui dépendent seulement du treillis $L(\mathbf{A})$. D'où le problème: Trouver deux treillis géométriques non isomorphes L_1 et L_2 ayant des algèbres $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ isomorphes et construire des arrangements $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ tels que $L(\mathbf{A}_1) = L_1$ et $L(\mathbf{A}_2) = L_2$.

Tout d'abord, les polynômes de Poincaré de $\mathcal{A}_1$ et de $\mathcal{A}_2$ sont calculés à l'aide de la fonction de Möbius de L_1 et L_2 , d'où une première restriction sur L_1 et L_2 qui nous donne un isomorphisme de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ comme modules. Suivant M. Falk [8], nous allons définir des invariants de l'algèbre $\mathcal{A}$. Soit $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{E}/I$, la projection canonique. Soit $m: \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$, la multiplication dans $\mathcal{E}$, où l'indice i signifie la partie homogène de degré i . Posons $V = \ker m$ et soit W le sous-espace engendré par les éléments décomposables de V i.e. de la forme $e \otimes r$. Alors $\psi = \dim W$ et $\phi = \dim V$ sont des invariants de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION [8]. Soit $x \in L(\mathbf{A})$, $r(x) = 2$. Définissons $V_x = \ker (\mathcal{E}_{1x} \otimes \mathcal{E}_{2x} \xrightarrow{m} \mathcal{E}_{3x})$. Alors

$$i: \bigoplus_{r(x)=2} V_x \longrightarrow V$$

est un isomorphisme sur W .

COROLLAIRE [8]. Soit c_p le nombre de tels $x \in L(\mathbf{A})$ de multiplicité p i.e. contenus dans p hyperplans de $\mathbf{A}$ et tels que $r(x) = 2$. Alors

$$\dim W = \sum_{p \geq 3} 2 \binom{p}{3} c_p.$$

On peut aussi déterminer $\dim V = 2 \binom{\#\mathbf{A}}{3}$.

EXEMPLE [8]. Soient A_1 et A_2 deux arrangements de type fibré de $\mathbb{C}^3$, d'exposants $[l_1, l_2, l_3]$. Alors $H^p(X_1) \approx H^p(X_2)$ pour tout p . Nous verrons par la suite que X_1 et X_2 sont des espaces de type $K(\pi, 1)$ dont les groupes gradués associés aux séries centrales descendantes de π sont isomorphes. De plus l'invariant ϕ est le même pour les deux algèbres. Est-ce que $H^*(X_1)$ et $H^*(X_2)$ sont des anneaux isomorphes?

Soit A_1 l'arrangement défini par $y(x+z)(x-z)(y-z)z$ et A_2 celui défini par $x(x+z)(y+z)y(x-y)z$. les exposants sont $[1, 2, 3]$ pour les deux arrangements et $\psi_1 = 10$ tandis que $\psi_2 = 8$. Donc les anneaux $H^*(X_1)$ et $H^*(X_2)$ ne sont pas isomorphes.

Cependant M. Falk montre que ces invariants sont encore insuffisants pour répondre à la question essentielle suivante:

Est-ce que X_1 et X_2 ont le même type d'homotopie ssi $L(A_1)$ et $L(A_2)$ sont isomorphes?

Appendices.

1. **Hypersurfaces libres.** Soit $\mathcal{O}(x)$ l'anneau des germes d'applications différentiables:

$$(\mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

et considérons $f \in \mathcal{O}(x)$, avec une *singularité isolée à l'origine*. Soit (F, μ) la déformation universelle de f définie par:

$$F: (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\mu, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

où $F \in \mathcal{O}(x, a)$, telle que:

- (1) $F(x, 0) = f(x)$
- (2) $\left\{ \frac{\partial F}{\partial a_i}(x, 0) \mid i = 2, \dots, \mu \right\}$ détermine avec l'unité 1 une base de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}\{x\}/J_f$ où J_f est l'idéal jacobien et $\mathbb{C}\{x\}$ l'anneau des séries convergentes en $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Définissons l'application holomorphe:

$$\phi: (\mathbb{C}^m, 0) \times (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \times (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0)$$

par $\phi^*a_1 = F(x, a')$ et $\phi^*(a') = (a')$ où (x, a') (resp. (a_1, a')) sont les coordonnées de $(\mathbb{C}^m, 0) \times (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0)$ (resp. $(\mathbb{C}, 0) \times (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0)$).

Soit Σ le *discriminant* de ϕ , i.e. l'ensemble des $a \in \mathbb{C}^\mu$ tels que l'application $x \rightarrow F(x, a)$ ait un point critique en 0. Alors Σ est une hypersurface de $\mathbb{C}^\mu$ définie par une équation (réduite) de la forme:

$$a_1^k + \delta \quad \text{où } \delta \in (a_2, \dots, a_\mu)\mathbb{C}\{a_1, a'\}$$

comme nous le verrons par la suite

THÉORÈME [3-4-5] [22-23] [33-35]. Σ est une hypersurface libre.

DÉMONSTRATION: Posons $g_1 = -1$ et $g_i = \frac{\partial F}{\partial a_i}$, $i = 2, \dots, \mu$ et

$$J(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m} \right) \mathcal{O}(x, a').$$

les germes $g_2, \dots, g_\mu$ forment une base du $\mathcal{O}(a')$ -module libre $\mathcal{O}(x, a')/J(F)$. Soit $\Pi: (\mathbb{C}^m, 0) \times (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0)$ la projection naturelle. Par le théorème de préparation de Malgrange, le $\mathcal{O}(x, a')$ -module $\mathcal{O}(x, a')/J(F)$ est de type fini considéré comme un $\mathcal{O}(a')$ -module par Π si et seulement si l'espace vectoriel complexe $(\mathcal{O}(x, a')/J(F))/(\mathcal{M} \cdot \mathcal{O}(x, a')/J(F))$ est de dimension finie, c'est-à-dire $\mathcal{M}(x)/J_f$ est de dimension finie, ce qui est le cas. En appliquant le lemme de Nakayama, on obtient que $\{g_1, \dots, g_\mu\}$ engendrent $\mathcal{O}(x, a')/J(F)$ car il engendrent $\mathcal{O}(x)/J_f$. Ici $\mathcal{M}(x)$ désigne l'idéal maximal $\langle x \rangle$ dans $\mathcal{O}(x)$. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour montrer que ce système de générateurs est libre.

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice $(\mu \times \mu)$, à coefficients dans $\mathbb{C}^{\mu-1}, 0$ définie par:

$$Fg_j - \sum_{i=1}^{\mu} a_{ij}g_i \in J(F), \quad j = 1, \dots, \mu.$$

On obtient une base du $\mathcal{O}(a)$ -module libre $\text{Der}(\log \Sigma)$ par:

$$\theta_j = a_1 \frac{\partial}{\partial a_j} - \sum_{i=1}^{\mu} a_{ij}(a') \frac{\partial}{\partial a_i}, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

(voir [6] pour une démonstration simple). $\square$

Comme conséquence, on en déduit une équation (réduite) de Σ $\det(a_1 I - A) = 0$ en appliquant le critère de Saito (cf. 1.3).

EXEMPLE. Singularités du type $\mathbf{A}_k$.

Soit $f(x) = x^{k+1}$. On peut choisir $g_1 = 1, g_2 = x, \dots, g_k = x^{k-1}$. L'idéal $J(F)$ est engendré par $(k+1)x^k + (k-1)a_k x^{k-2} + \dots + a_2$. Ainsi dans l'anneau quotient on peut remplacer x^k par:

$$-\frac{1}{k+1} \sum_{p=1}^{k-1} (k-p)a_{k-p+1} x^{k-p-1}.$$

Par exemple prenons le cas $k = 3$

$$\begin{aligned} Fg_1 = F &\equiv \frac{a_3}{2}x^2 + \frac{3a_2}{4}x \mod J(F) \\ Fg_2 = Fx &\equiv \frac{3a_2}{4}x^2 - \frac{a_3^2}{4}x - \frac{a_2a_3}{8} \mod J(F) \\ Fg_3 = Fx^2 &\equiv -\frac{a_3^2}{4}x^2 - \frac{a_2a_3}{2}x - \frac{3a_2^2}{16} \mod J(F) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} \theta_1 = a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \frac{3a_2}{4} \frac{\partial}{\partial a_2} + \frac{a_3}{2} \frac{\partial}{\partial a_3} \\ \theta_2 = \frac{a_2a_3}{8} \frac{\partial}{\partial a_1} + \left(a_1 - \frac{a_3^2}{4}\right) \frac{\partial}{\partial a_2} + \frac{3a_2}{4} \frac{\partial}{\partial a_3} \\ \theta_3 = -\frac{3a_2^2}{16} \frac{\partial}{\partial a_1} - \frac{a_2a_3}{2} \frac{\partial}{\partial a_2} + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{4}\right) \frac{\partial}{\partial a_3} \end{cases}$$

Dans [6], les calculs sont effectués pour les singularités de type $\mathbf{D}_k$ et $\mathbf{E}_7$.

2. Ensemble de bifurcation. Soit $p: (\mathbb{C}, 0) \times (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0)$ la projection naturelle. L'ensemble de bifurcation de F , noté $\text{Bif}(F)$ est défini par $p(\text{sing } \Sigma) \subseteq (\mathbb{C}^{\mu-1}, 0)$

THÉORÈME [33]. $\text{Bif}(F)$ est une hypersurface libre.

Suivant H. Terao, nous allons déterminer une base du $\mathcal{O}(a')$ -module libre $\text{Der}(\log \text{Bif}(F))$.

Soit $\tilde{A} = (a_{ij})_{2 \leq i, j \leq \mu}$ et $e = {}^t[a_{21}, \dots, a_{\mu 1}]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ e & & \tilde{A} & \end{bmatrix}.$$

Posons ${}^t[b_{2i}, \dots, b_{\mu i}] = \tilde{A}^{i-r}e$, pour $i = 2, \dots, \mu$.

THÉORÈME [31]. Les champs de vecteurs $\omega_i = \sum_{j=2}^{\mu} b_{ij} \frac{\partial}{\partial a_j}$, $i = 2, \dots, \mu$, forment une base du $\mathcal{O}(a')$ -module libre $\text{Der}(\log \text{Bif}(F))$.

COROLLAIRE [31]. Une équation (réduite) de $\text{Bif}(F)$ est donnée par $\det(b_{ij}) = 0$.

Reprenons l'exemple de la singularité du type A_3 .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2 a_3}{8} & -\frac{3a_2^2}{16} \\ \frac{3a_2}{4} & -\frac{a_3^2}{4} & -\frac{a_2 a_3}{2} \\ -\frac{a_3}{2} & \frac{3a_2}{4} & -\frac{a_3^2}{4} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{a_3^2}{4} & -\frac{a_2 a_3}{2} \\ \frac{3a_2}{4} & -\frac{a_3^2}{4} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \frac{3a_2}{4} \\ \frac{a_3}{2} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\omega_2 = \frac{3a_2}{4} \frac{\partial}{\partial a_2} + \frac{a_3}{2} \frac{\partial}{\partial a_3}$$

$$\omega_3 = -\frac{7a_2 a_3^2}{16} \frac{\partial}{\partial a_2} + \left(\frac{9a_2^2}{16} - \frac{a_3^3}{8} \right) \frac{\partial}{\partial a_3}.$$

Une équation (réduite) de $\text{Bif}(F)$ est $a_2(27a_2^2 + 8a_3^3)/64 = 0$. Il est alors naturel de se poser la question suivante:

Étant donné que $\text{Bif}(F)$ est une hypersurface libre, est-ce que le complément de l'ensemble de bifurcation $\text{Bif}(F)$ de la déformation est un espace de type $K(\pi, 1)$?

E. Looijenga a résolu ce problème dans un cas particulier [16]. Pour cela, soit P^μ l'espace vectoriel complexe des polynômes unitaires de degré μ et soit $\alpha: U \rightarrow P^\mu$ où U est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^\mu$, l'application définie par $\alpha(a) = X^\mu + \alpha_1(a)X^{\mu-1} + \dots + \alpha_\mu(a)$.

Si Δ est le discriminant dans P^μ alors on a $B = \text{Bif}(F) \times \mathbb{C} = \alpha^{-1}(\Delta)$.

THÉORÈME [16].

- (1) B est une variété dans U dont le germe ne dépend que de f .
- (2) Il existe un voisinage $U' \subseteq U$ de l'origine tel que $\alpha|_{U' \setminus B}$ est localement un isomorphisme analytique.
- (3) 0 est un point isolé de $\alpha^{-1}\alpha(0)$.
- (4) Soit $B_\varepsilon = \{a \in U \mid |a| < \varepsilon\}$. Si ε est plus petit qu'un $\varepsilon_0 > 0$, alors $B_\varepsilon \setminus B$ est un espace classifiant d'un sous-groupe H_f du groupe des tresses à k brins.

COROLLAIRE [16]. *Le complément de B pour une singularité simple est un $K(\pi, 1)$ -espace où $\pi = H_f$.*

3. Surfaces de Hirzebruch [11], [26]. Considérons le plan projectif complexe $P_2(\mathbb{C})$ avec les coordonnées homogènes $(z_0 : z_1 : z_2)$ et un arrangement $\mathbf{A}$ de k droites $L_1, \dots, L_k$, définies par les formes linéaires $l_1, \dots, l_k$ en z_0, z_1, z_2 . Nous supposons, dans la suite, $k \geq 3$ et que toutes ces droites ne passent pas par un même point.

Soit $\mathbb{C}(z_1/z_0, z_2/z_0)$ le corps des fonctions de $P_2(\mathbb{C})$ et soit l'extension de Kummer $\mathbb{C}(z_1/z_0, z_2/z_0)((l_2/l_1)^{1/n}, \dots, (l_k/l_1)^{1/n})$ où n est un entier au moins égal à 2. Cette extension est de degré n^{k-1} et de groupe de Galois $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{k-1}$.

Ce corps détermine une surface algébrique X avec des singularités normales et un revêtement ramifié:

$$\Pi: X \rightarrow P_2(\mathbb{C})$$

l'arrangement $\mathbf{A}$ étant le lieu de ramification.

La *surface de Hirzebruch* associée à l'arrangement $\mathbf{A}$ et à l'entier n , notée $\mathcal{H}(\mathbf{A}; n)$ est la surface algébrique obtenue par "désingularisation minimale" de X comme suit; soit un point p du plan appartenant à r droites et soit (u, v) un système de coordonnées au point p (on choisit une droite quelconque de l'arrangement ne passant pas par p comme droite à l'infini).

L'anneau local d'un point de X dans $\Pi^{-1}(p)$ est l'extension de l'anneau local en p par $(\tilde{l}_1)^{1/n}, \dots, (\tilde{l}_r)^{1/n}$ où $\tilde{l}_1 = 0, \dots, \tilde{l}_r = 0$ sont les équations des droites passant par p écrites à l'aide du système de coordonnées u, v .

Le point de X est singulier si $r \geq 3$. Cette singularité est résolue par éclatement de p en une droite projective E_p , d'où la courbe $\mathcal{C}$ au dessus de E_p qui est une surface de Riemann au dessus de E_p avec n^{r-1} feuillettes définie par les fonctions $(\tilde{l}_2/\tilde{l}_1)^{1/n}, \dots, (\tilde{l}_r/\tilde{l}_1)^{1/n}$ où u et v sont pris cette fois comme coordonnées homogènes sur E_p .

Soit, de même $\tau: \hat{P}_2 \rightarrow P_2(\mathbb{C})$, obtenu par éclatements de tous les points d'intersection d'au moins trois droites de $\mathbf{A}$. Alors $\mathcal{H}(\mathbf{A}; n)$ est définie comme le produit fibré suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\mathbf{A}; n) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \hat{P}_2 & \xrightarrow{\tau} & P_2(\mathbb{C}) \end{array}$$

A.J. Sommese [26] donne une description locale du revêtement à n^{k-1} feuillettes $\mathcal{H}(\mathbf{A}; n) \rightarrow \hat{P}_2$ ainsi obtenu.

Les nombres de Chern c_1^2 et c_2 des surfaces algébriques sont particulièrement intéressants. Ces surfaces fournissent des exemples qui ont permis à A.J. Sommese de montrer que pour chaque nombre $r \in [1/5, 3]$, il existe des surfaces de Hirzebruch $\mathcal{H}(\mathbf{A}; n)$ telle que

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1^2(\mathcal{H}(\mathbf{A}; n))}{c_2(\mathcal{H}(\mathbf{A}; n))}.$$

De plus pour tout surface algébrique S minimale et de type général, on a $c_1^2(S) \leq 3c_2(S)$, (inégalité de Miyaoka-Yau).

Soit $\mathcal{H}(\mathbf{A}; n)$ la surface de Hirzebruch associée à l'arrangement $\mathbf{A}$ et à l'entier n . Alors

$$\frac{1}{n^{k-3}}(3c_2(\mathcal{H}(\mathbf{A}; n)) - c_1^2(\mathcal{H}(\mathbf{A}; n))) =$$

$$n^2(f_0 - k) + n(-2f_1 - 2f_0 + 2k) + 2f_1 + f_0 - k - 4t_2$$

où t_r est le nombre de points distincts de $P_2(\mathbb{C})$ appartenant à exactement r droites de $\mathbf{A}$, $r \geq 2$,

$$f_0 = \sum_{r=2}^k t_r, \quad f_1 = \sum_{r=2}^k r t_r.$$

Faisons $n = x + 1$, on obtient, à partir du second membre de l'égalité ci-dessus, un polynôme quadratique

$$F(x) = x^2(f_0 - k) - 2x(f_1 - 2f_0) + 4(f_0 - t_2)$$

qui ne dépend que de l'arrangement $\mathbf{A}$.

F. Hirzebruch [11] pose la conjecture suivante:

Si $t_k = t_{k-1} = t_{k-2} = 0$, la forme quadratique $(f_0 - k)u^2 - 2(f_1 - 2f_0)uv + 4(f_0 - t_2)v^2$ est semi définie positive.

A.J. Sommese [26] introduit la définition suivante:

DÉFINITION. Un arrangement $\mathbf{A}$ de $P_2(\mathbb{C})$ est *simple* si:

- (i) étant donnés deux points p et q tels que $r_p \geq 3$ et $r_q \geq 3$, il existe $L_{i_1}, \dots, L_{i_t}$ éléments de $\mathbf{A}$ tels que $p \in L_{i_1}$, $q \in L_{i_t}$ éléments de $\mathbf{A}$ et pour tout $j = 1, \dots, t-1$, $L_{i_j} \cap L_{i_{j+1}} = \{z\}$ avec $r_z \geq 3$.
- (ii) l'ensemble des points $p \in P_2(\mathbb{C})$ vérifiant $r_p \geq 3$ n'est pas aligné.

Les arrangements simples déterminent des surfaces de Hirzebruch ayant des propriétés intéressantes, en particulier [26, question 4.2]:

Est-ce que $\mathcal{H}(\mathbf{A}; n)$ est un espace de type $K(\pi, 1)$ si $\mathbf{A}$ est un arrangement simple?

Signalons qu'aucune des propriétés étudiées ici pour les arrangements, n'est vérifiée pour les arrangements simples.

BIBLIOGRAPHIE

1. Arnold, V.I., *The cohomology ring of the colored braid group*, Mat. Zametki (1969), 227-231.
2. Brieskorn, E., "Sur les groupes de tresses (d'après V.I. Arnold)," Séminaire Bourbaki, 24^{ème} année 1971/72, Springer Lecture Notes 317, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
3. Bruce, J.W., *Functions on discriminants*, J. London Math. Soc. (2) 30 (1984), 551-567.
4. Bruce, J.W., *Vector Fields on discriminants and bifurcation varieties*, Bull. London Math. Soc. 17 (1985), 257-262.
5. Bruce, J.W., *Generic functions on semialgebraic sets*, Quat. J. Math. Oxford (2) 37 (1986), 137-165.
6. Cartier, P., "Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire," Séminaire Bourbaki, 33^{ème} année 1980/81, Springer Lecture Notes 901, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
7. Falk, M., "Geometry and topology of hyperplanes arrangements," thèse de doctorat, University of Wisconsin, 1983.
8. Falk, M., *On the algebra associated with a geometric lattice*, preprint.
9. Falk, M., Randell R., *The lower central series of a fiber-type arrangement*, Invent. Math. 82 (1985), 77-88.
10. Grünbaum, B., *Arrangements of hyperplanes*, dans "Proc. Second Louisiana Conference on Combinatoric and Graph Theory," Baton Rouge, 1971, pp. 41-106.
11. Hirzebruch, F., *Arrangements of lines and algebraic surfaces. Arithmetic and geometry II*, Progress in Math. 36 (1983), 113-140.
12. Jambu, M., *Sur l'algèbre d'Orlik-Solomon*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I 307 (1988), 125-128.
13. Jambu, M., *Arrangements d'hyperplans I: Les groupes de réflexions*, Annales des sc. math. du Québec 12 (1988), 73-99.
14. Jambu, M., Terao, H., *Arrangements libres et treillis hyper-résolubles*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I 296 (1983), 623-624.

15. Jambu, M., Terao, H., *Free arrangements of hyperplanes and supersolvable lattices*, Advances in Math. **52** (1984), 248–258.
16. Looijenga, E.J., *The complement of the bifurcation variety of a simple singularity*, Invent. Math. **23** (1974), 775–792.
17. Orlik, P., “Introduction to Arrangements,” CBMS Regional Conference Series in Mathematics **72**, Amer. Math. Soc., Providence R.I..
18. Orlik, P., Solomon, L., *Combinatorics and topology of complements of hyperplanes*, Invent. Math. **56** (1980), 167–189.
19. Orlik, P., Solomon, L., *Unitary reflection groups and cohomology*, Invent. Math. **59** (1980), 77–94.
20. Orlik, P., Solomon, L., Terao, H., *Arrangements of hyperplanes and differential forms*, Contemporary Math. **34** (1984), 29–65.
21. Saito, K., *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 265–291.
22. Saito, K., *On the periods of primitive integrals I*, RIMS Report **412**, Kyoto.
23. Saito, K., *Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1982), 775–792.
24. Shephard, G.C., Todd J.A., *Finite unitary reflexion groups*, Canadian J. Math. **6** (1954), 274–304.
25. Solomon, L., Terao, H., *A formula for the characteristic polynomial of an arrangement*, Advances in Math. **64** (1987), 305–325.
26. Sommese, A.J., *On the density of ratio of Chern numbers of algebraic surfaces*, Math. Ann. **268** (1984), 207–221.
27. Stanley, R.P., *T-free arrangements of hyperplanes*, dans “Progress in Graph Theory,” J.A. Boudy et U.S.R. Murty, éditeurs, Academic Press, 1984.
28. Terao, H., *Arrangements of hyperplanes and their freeness I*, J. Fac. Sci.: Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 293–312.
29. Terao, H., *Free arrangements and unitary reflection groups*, Proc. Japan Acad. **56 A** (1980), 389–397.
30. Terao, H., *Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula*, Invent. Math. **63** (1981), 159–179.
31. Terao, H., *On Betti numbers of complement of hyperplanes*, Publ. RIMS **17** (1981), 657–663.
32. Terao, H., *The exponents of a free hypersurface. Singularities*, dans “Proc. Symp. Pure Math **40** Providence,” 1983, pp. 561–566.
33. Terao, H., *The bifurcation set and logarithmic vector fields*, Math. Ann. **263** (1983), 313–321.
34. Terao, H., *Free arrangements of hyperplanes over an arbitrary field*, Proc. Japan Acad. **59A** (1983), 301–303.
35. Terao, H., *Discriminant of a holomorphic and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci.: Univ. Tokyo Sect. IA Math. **30** (1983), 379–391.
36. Terao, H., *Modular elements of lattices and topological fibration*, Advances in Math. **62** (1986), 135–154.
37. Ziegler, G.M., *Combinatorial construction of logarithmic differential forms*, Advances in Math. **76** (1989), 116–154.
38. Ziegler, G.M., *Matroid representations and free arrangements*, Trans. A.M.S. (à paraître).

M. Jambu

Département de mathématiques et d'informatique

Faculté des sciences et techniques

Université de Nantes

2 rue de la Houssinière

44072 Nantes Cedex 03 (France)