

RECHERCHE GLOBALE DES ZÉROS D'UNE FONCTION ENTIÈRE PAR LA THÉORIE DE FATOU-BAKER

SYLVIE GÉLINAS ET RÉMI VAILLANCOURT

RÉSUMÉ. On applique la théorie de l'itération des fonctions transcendentes entières de Fatou et de Baker pour la résolution numérique globale d'équations transcendentes $E(z) = cz$, telles $\cos z = cz$ et $\sin z = cz$, où $E(z)$ est une fonction transcendente entière et c et z sont des nombres complexes. On note $H(c)$ la réciproque (multivoque) de $E(z)/z$, donnée par la relation $c \rightarrow \{z \mid E(z) = cz\}$. On trace dans le plan des z le contour fruste des images de chacun des quadrants du plan des c par H . Puis on itère $E(z)/c$ ou sa réciproque ou bien on emploie la méthode de Newton pour trouver les racines de $E(z) = cz$ dans un ordre voulu. On donne une stratégie pour la résolution numérique basée sur les résultats théoriques.

ABSTRACT. The Fatou-Baker iteration theory for entire functions is applied to the global numerical solution of transcendental equations of the form $E(z) = cz$, such as $\cos z = cz$ and $\sin z = cz$, where $E(z)$ is a transcendental entire function, and c and z are complex numbers. The (multivalued) inverse $H(c)$ of $E(z)/z$ is defined by the relation $c \rightarrow \{z \mid E(z) = cz\}$. By using a rough graph in the z -plane of the contours of the images of each of the four quadrants of the c -plane under the mapping H , roots are found in a prescribed order by iterating $E(z)/c$ or its inverse or by using Newton's method. A computational root-finding strategy based on the theoretical results is given.

1. Introduction. Les équations transcendentes $E(z) = cz$, où E est une fonction entière ou méromorphe, admettent une infinité dénombrable de solutions, sauf au plus pour deux valeurs de c . Dans les applications automatisées en sciences et en génie, on doit parfois trouver la $n^{\text{ème}}$ racine suivant un ordre préétabli. Par exemple, en spectroscopie diélectrique, on doit résoudre les équations $z \tan z = c$ et $\tan z = cz$ [4, 12, 17, 18] pour les valeurs de c complexes obtenues par un analyseur de réseau automatique. L'équation $e^z = cz$ a suscité beaucoup d'études récentes, v. p.e. [5, 6, 7, 8, 9, 10, 15].

On se propose ici de trouver toutes les racines des équations $\cos z = cz$ et $\sin z = cz$. On trace d'abord dans le plan des z le contour fruste des images de chacun des quadrants du plan des c par les relations $c \rightarrow \{z \mid \cos z = cz\}$, respectivement, $c \rightarrow \{z \mid \sin z = cz\}$. Ces images établissent un ordre sur les racines de $E(z) = cz$. On remarque que $F(z) = E(z)/c$ n'admet que quelques valeurs critiques et que les bassins d'attraction immédiats de la réciproque $G(z)$ de $F(z)$ sont vastes, sauf au plus pour quelques racines pour chaque valeur de c donnée. On a donc une méthode globale pour presque toutes les racines. On a aussi recours à la méthode de Newton, qui est une méthode locale, pour la racine de $\cos z = cz$ la plus près de l'origine.

On traite d'abord de l'équation $\cos z = cz$ et on donne une stratégie de calcul numérique des racines, surtout dans les cas difficiles où la proximité de l'ensemble de Julia de G entrave la convergence ou entraîne la récurrence dans des cycles attractifs. On peut accélérer la convergence, déjà amorcée, d'une suite au moyen de la méthode de Steffensen [13, pp. 103–108]. A la fin on considère brièvement l'équation $\sin z = cz$. Töpfer [20] a déjà étudié les points fixes attractifs de $z_{n+1} = \cos z_n$ et $z_{n+1} = \sin z_n$.

Reçu le 30 août 1989.

Avec le concours du Conseil de recherche en sciences naturelles et génie, octroi n° A 7691.

©Association mathématique du Québec

2. Les images de la relation $c \rightarrow \{z \mid \cos z = cz\}$. On considère l'équation

$$f(z) := cz - \cos z = 0. \quad (2.1)$$

On sait que $\cos z$ n'admet aucune valeur exceptionnelle; or, d'après une extension du théorème de Picard [16, p. 75], l'équation (2.1) admet une infinité dénombrable de solutions pour chaque valeur de c . Les zéros de $f(z)$ sont simples, sauf pour une infinité de valeurs de c , $c = c_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$; pour chacun des c_j , $f(z)$ admet un seul zéro double $z = \xi_j$. Les ξ_j sont les solutions du système d'équations

$$f(z) := \cos z - cz = 0,$$

$$f'(z) := -\sin z - c = 0.$$

Si on élimine c du système, on obtient

$$z \tan z = -1. \quad (2.2)$$

Les solutions ξ_j de (2.2) et les valeurs correspondantes de c , $c_j = \cos(\xi_j)/\xi_j$, sont obtenues numériquement, v. [12]; les 7 premières valeurs sont données à la table 1.

TABLE 1. Les premières racines doubles de $cz = \cos z$ et les valeurs de c correspondantes.

n	$\pm\xi_n$	$\pm c_n$	$\pm 1/c_n$
0	1,199 678 6 i	-1,508 880 i	0,662 743 i
1	2,798 386 5	-0,336 508	- 2,971 698
2	6,121 250 5	0,161 228	6,202 395
3	9,317 866 5	-0,106 708	- 9,371 373
4	12,486 454 4	0,079 831	12,526 434
5	15,644 128 4	-0,063 792	-15,676 056
6	18,796 404 4	0,053 126	18,822 986

On partitionne maintenant le plan des z en régions fondamentales appropriées à la résolution de (2.1) et qui rendent univoque la relation multivoque

$$c \rightarrow \{z \mid \cos z = cz\}. \quad (2.3)$$

Pour ce faire, on trace à la fig. 1 les images $\pm\xi_n$ des points de branchement $\pm c_n$, les images frustres des coupures de branchement et les images frustres des axes respectivement réel et imaginaire. On trace aussi, en pointillé, les asymptotes $\Re z = \pm(2n+1)\pi/2$ quand $\Im z \rightarrow \pm\infty$. On note I, II, III et IV les quadrants du plan des c . On obtient ainsi les images respectives de ces quadrants, notées I_n, II_n, III_n et IV_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, dans un ordre obvie, en s'éloignant de l'origine. Alors la relation (2.3) devient une bijection entre I et I_n , II et II_n , etc. pour chaque n .

Dans toute la suite, il suffit de se restreindre au 1^{er} quadrant des z ; en effet,

$$\cos(-z) = (-c)(-z)$$

et

$$\cos \bar{z} = \bar{c}\bar{z}.$$

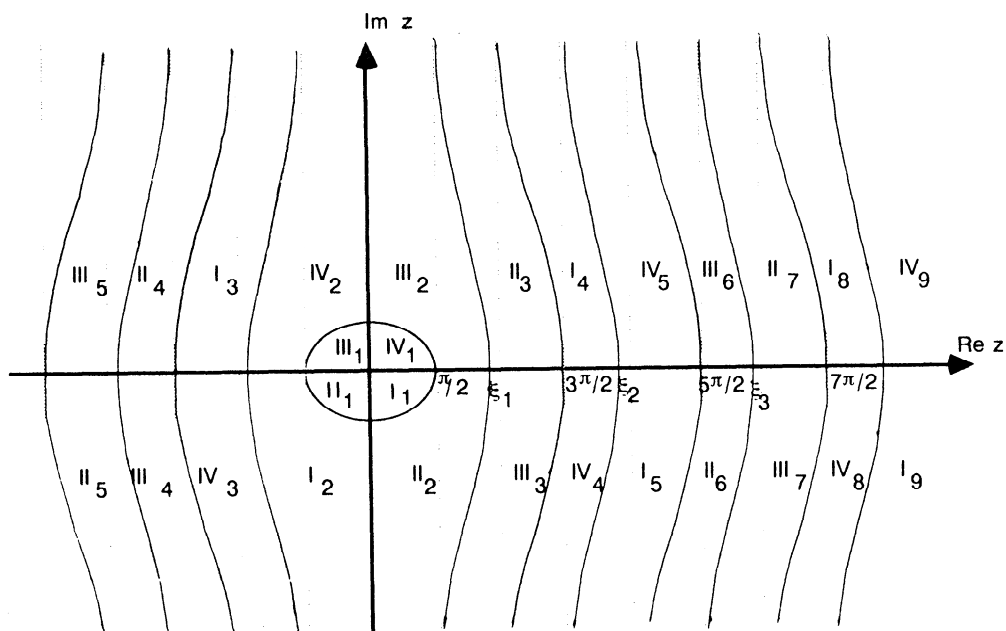


Figure 1. Les régions I_n, II_n, III_n et IV_n du plan des z sont les images par la relation multivoque $c \rightarrow \{z \mid \cos z = cz\}$ respectivement des quadrants I, II, III et IV du plan des c . Les ξ_n sont les points doubles de la relation. Les verticales pointillées sont les asymptotes $\Re z = \pm n\pi/2$. Le bord des régions coupe l'axe des réels successivement en $0, \pm\pi/2, \pm\xi_1, \pm3\pi/2, \pm\xi_2$, etc. L' "ellipse" centrale contient la première racine de $\cos z = cz$.

Il sera utile de noter Q_p la région du 1^{er} quadrant des z indicée par p , c'est-à-dire $Q_1 = IV_1, Q_2 = III_2, Q_3 = II_3$, etc. On voit que si $c \in III \cup II$, les demi-bandes:

$$B_k = \{z \mid \Im z \geq 0, 2k\pi < \Re z \leq (2k+2)\pi\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

contiennent une seule région III_p et une seule région II_{p+1} . De même, si $c \in I \cup IV$, les demi-bandes:

$$B_k = \{z \mid \Im z \geq 0, (2k+1)\pi < \Re z \leq (2k+3)\pi\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

contiennent une seule région I_p et une seule région IV_{p+1} . On remarque qu'on n'a pas considéré ici la région IV_1 qui est spéciale.

On emploiera, selon les cas, les trois fonctions de récurrence qui suivent pour la résolution de (2.1):

(a) la fonction de Newton

$$N(z) = \frac{z \sin z + \cos z}{c + \sin z},$$

(b) la fonction entière

$$F(z) = \frac{\cos z}{c},$$

(c) la fonction multivoque, réciproque de F ,

$$G(z) = -i \log(cz \pm \sqrt{(cz)^2 - 1}) + 2k\pi.$$

3. La théorie de Fatou-Baker pour les fonctions transcendentes entières.

On rappelle quelques résultats de la théorie de l'itération des fonctions transcendentes entières obtenus par Fatou [11] et complétés par Baker [1, 2].

Soit φ une fonction entière,

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

de degré au moins 2, et considérons la récurrence

$$z_{n+1} = \varphi(z_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Un point fixe de φ ,

$$w = \varphi(w),$$

est attractif, répulsif ou indifférent selon que le module de son multiplicateur $\varphi'(w)$ satisfait, respectivement,

$$|\varphi'(w)| < 1, \quad > 1, \quad \text{ou} = 1.$$

Les zéros de $\varphi'(z)$ sont les points critiques algébriques de φ et les valeurs exceptionnelles de φ sont les points critiques transcendants de φ .

Soit

$$\varphi^n(z) = \varphi[\varphi^{n-1}(z)], \quad \varphi^0(z) = z,$$

la $n^{\text{ème}}$ itérée de φ . L'ensemble de Julia¹ de φ , $\mathcal{J}(\varphi)$, est le fermé

$$\mathcal{J}(\varphi) = \{z \mid \{\varphi^n(z)\}_{n=1}^{\infty} \text{ n'est pas une famille normale}\} \cup \{\infty\},$$

noté $\mathcal{F}(\varphi)$ par Fatou.

L'ensemble de normalité, $\mathcal{N}(\varphi)$, est le complémentaire de $\mathcal{J}(\varphi)$. $\mathcal{J}(\varphi)$ est un parfait non vide; il est ou bien d'intérieur vide ou bien son adhérence est tout le plan. $\mathcal{J}(\varphi)$ et $\mathcal{N}(\varphi)$ sont complètement invariants par φ , c'est-à-dire invariants par φ et par la réciproque (possiblement multivoque) de φ .

Un cycle d'ordre k de φ est formé de k points distincts qui satisfont aux relations qui suivent:

$$w_0, w_1 = \varphi(w_0), \dots, w_{k-1} = \varphi^{k-1}(w_0), \quad \text{et } w_k = w_0.$$

Le multiplicateur du cycle,

$$(\varphi^k)'(w_j) = \varphi'(w_{k-1}) \cdots \varphi'(w_1) \varphi'(w_0), \quad j = 0, \dots, k-1,$$

est indépendant d'un point quelconque du cycle. Le cycle est attractif, répulsif ou indifférent suivant que, respectivement,

$$|(\varphi^k)'(w_j)| < 1, \quad > 1, \quad \text{ou} = 1.$$

¹I.N. Baker, au Proc. London Math. Soc. (3), 49 (1984), 563-576, par souci de l'histoire, a employé le terme "ensemble de Fatou-Julia".

Un point fixe est un cycle d'ordre 1. On remarque que l'élément w , d'un cycle de φ d'ordre k est un point fixe de φ^k . Les cycles attractifs de φ sont répulsifs pour la réciproque φ^{-1} de φ du fait que $\varphi'(z)(\varphi^{-1})'(\varphi(z)) = 1$.

Le bassin d'attraction immédiat d'un point fixe attractif w est le plus grand ouvert connexe Ω tel que

$$z_n = \varphi_n(z_0) \rightarrow w, \quad \forall z_0 \in \Omega.$$

Le bassin d'attraction immédiat d'un cycle attractif d'ordre k est la réunion des bassins d'attraction immédiats des points fixes attractifs respectifs de φ^k .

On emploiera le résultat qui suit [1, p. 6]:

THÉORÈME 1. *Le bassin d'attraction immédiat d'un cycle attractif d'une fonction transcendante entière φ contient un point critique de φ .*

Le dynamicien s'intéresse à l'explosion de l'ensemble de Julia de φ (v. [7]); d'autre part, le numéricien recherche les points fixes de φ , tout en évitant les cycles attractifs, qui sont tous dans l'ensemble de normalité, $\mathcal{N}(\varphi)$.

4. La méthode de Newton. La méthode de Newton pour (2.1),

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, \\ &=: N(z_n), \end{aligned} \quad (4.1)$$

est donnée par la fonction de récurrence

$$N(z) = \frac{z \sin z + \cos z}{c + \sin z}. \quad (4.2)$$

Les zéros de la dérivée de $N(z)$,

$$N'(z) = \frac{(cz - \cos z) \cos z}{(c + \sin z)^2},$$

sont les points critiques algébriques de $N(z)$. On voit que ces points critiques sont les racines de (2.1), toutes points critiques attractifs de (4.1), et les zéros de $\cos z$,

$$\zeta_k = \frac{2k+1}{2}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On obtient les racines de (2.1) situées respectivement dans les régions bornées et convexes I_1 , II_1 , III_1 et IV_1 de l'ellipse centrale de la fig. 1 au moyen de la méthode de Newton avec les départs suivants, où $\alpha = \frac{7}{8} - \frac{2}{3}i$:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha c + 1} \quad \text{si } z \in IV_1; & z_0 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha c - 1} \quad \text{si } z \in II_1; \\ z_0 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\bar{\alpha} c + 1} \quad \text{si } z \in I_1; & z_0 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\bar{\alpha} c - 1} \quad \text{si } z \in III_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

On obtient ces formules par une interpolation rationnelle de degré 1. Par exemple, pour $z \in IV_1$,

$$\begin{aligned} \text{à } c &= 0, & z_0 &= \frac{\pi}{2}, \\ \text{à } c &= \infty, & z_0 &= 0, \\ \text{et à } c &= -1,5i, & z_0 &= \frac{\pi}{2} \frac{16}{21} i \approx 1,196\,797\,202i \approx \xi_0. \end{aligned}$$

On remarque que le pôle

$$c = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|^2} \left(\frac{7}{8} + \frac{2}{3}i \right) \in III_1,$$

n'est pas dans IV_1 . On trace l'image du 4^{ème} quadrant des c ,

$$c \mapsto z_0 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha c + 1};$$

à la fig. 2 où l'on peut remarquer le léger dépassement à l'extérieur de la région IV_1 le long du segment vertical et de la partie courbe.

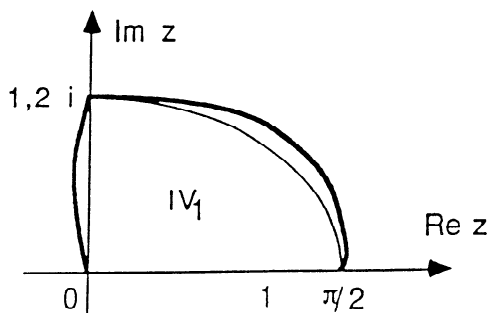


Figure 2. Région des valeurs de départ de la méthode de Newton pour trouver la première racine de $cz - \cos z = 0$ dans la région IV_1 .

Avec les z_0 donnés, Newton converge rapidement vers la 1^{ère} racine, sauf près des points doubles $\pm \xi_0 = \pm 1, 2i$. Dans ce dernier cas on peut itérer F , comme on verra plus loin.

On verra aussi plus loin que du fait qu'une bande de largeur 2π ne peut recouvrir la région IV_1 sans toucher à la région IV_3 ou à la région IV_2 , l'emploi de la fonction réciproque G peut conduire soit à l'une des racines dans IV_1 , dans IV_2 ou dans IV_3 , soit à des cycles attractifs.

5. La récurrence par la fonction entière $F(z)$. Soit la récurrence

$$z_{n+1} = \frac{\cos z_n}{c} =: F(z_n), \quad (5.1)$$

donnée au moyen de la fonction entière univoque

$$F(z) = \frac{\cos z}{c}. \quad (5.2)$$

Les zéros de $F'(z)$,

$$F'(z) = -\frac{\sin z}{c},$$

$w_k = k\pi$, sont les points critiques algébriques de $F(z)$. $F(z)$ n'admet aucun point critique transcendant. Puisque les w_k n'ont que deux images,

$$F(k\pi) = \pm \frac{1}{c},$$

il suit du théorème 1 que $F(z)$ admet au plus deux points fixes attractifs et que les valeurs critiques $z_0 = \pm 1/c$ sont dans leur domaine respectif d'attraction immédiat.

Les racines doubles de (2.1) sont des points fixes indifférents de (5.2) de multiplicateur égal à 1,

$$F'(\xi_j) = -\frac{\sin \xi_j}{c_j} = \frac{c_j}{c_j} = 1;$$

elles appartiennent donc à l'ensemble de Julia de F . En théorie, on peut les rejoindre à partir de $z_0 = \pm 1/c_j$ au moyen de (5.1) et de (6.1), mais, en pratique, en arithmétique à 15 chiffres décimaux, on arrive à peine à obtenir les trois premiers chiffres de $\pm \xi_j$.

On précise maintenant la position des deux points fixes attractifs de $F(z)$, s'ils existent. Ces points doivent appartenir à la région d'attraction de F , c'est-à-dire la région $\mathcal{A}$ des z tels que

$$|F'(z)| = \left| \frac{\sin z}{c} \right| < 1,$$

et qu'on note

$$\mathcal{A} = \{z \mid |\sin z| < |c|\}, \quad (5.3)$$

(v. [14, Addenda, p. 66, fig. 25]). Soit maintenant $\mathcal{B}$, l'image de $\mathcal{A}$ par F :

$$\mathcal{B} = F(\mathcal{A}).$$

On caractérise $\mathcal{B}$ géométriquement. Soient $z \in \mathcal{A}$ et $w = (\cos z)/c \in \mathcal{B}$; alors

$$w - \frac{1}{c} = \frac{\cos z}{c} - \frac{1}{c},$$

$$w + \frac{1}{c} = \frac{\cos z}{c} + \frac{1}{c},$$

et

$$\left| w - \frac{1}{c} \right| \left| w + \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{\cos^2 z}{c^2} - \frac{1}{c^2} \right| = \left| -\frac{\sin^2 z}{c^2} \right| < 1, \quad \forall z \in \mathcal{A}.$$

On voit donc que l'ensemble $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{B} = \left\{ z \mid \left| z - \frac{1}{c} \right| \left| z + \frac{1}{c} \right| < 1 \right\}, \quad (5.4)$$

est la région bornée par l'ovale de Cassini:

$$\mathcal{O} := \left\{ z \mid \left| z - \frac{1}{c} \right| \left| z + \frac{1}{c} \right| = 1 \right\} \quad (5.5)$$

qu'on décrit maintenant.

Un ovale de Cassini est le lieu des points z du plan dont le produit des distances à deux points fixes, f et g , qu'on appellera les foyers de l'ovale, est constant ($= k^2$). A une rotation et une translation près, on peut prendre $f \geq 0$ et $g = -f$; on a alors l'ovale

$$\{z \mid |z + f||z - f| = k^2\},$$

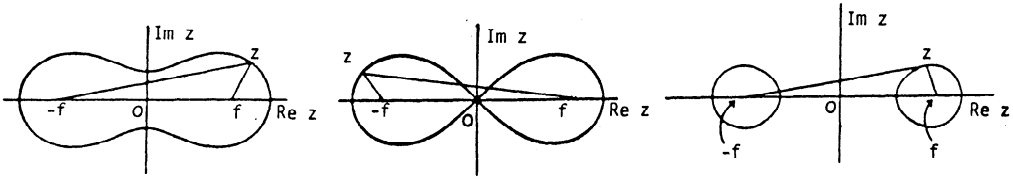


Figure 3. Les ovales de Cassini de foyers f et $-f$. Le produit des distances du point z aux foyers est k^2 . À gauche, $f < k$; au centre, $f = k$: c'est la lemniscate de Bernoulli; à droite, $f > k$.

(v. [21, pp. 78 et 231], ou [22, pp. 218–21]). Quand $f > k$, l'ovale est formé de deux boucles ou courbes simples, fermées et disjointes; quand $f = k$, on a une lemniscate de Bernoulli; enfin, quand $f < k$, on a une seule boucle ou courbe simple et fermée; v. la fig. 3.

Pour l'ovale (5.5) que l'on considère ici, les foyers sont $\pm 1/c$, le produit des distances est 1 et les points de l'ovale les plus éloignés, respectivement, rapprochés, de l'origine satisfont, respectivement,

$$|z|_{\max} = \sqrt{1 + |c|^{-2}}, \quad |z|_{\min} = \sqrt{1 - |c|^{-2}}. \quad (5.6)$$

Le théorème qui suit caractérise les points fixes attractifs de F .

THÉOREME 2. F admet deux points fixes attractifs si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et seulement si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$; dans ce cas, ils sont atteints à partir des valeurs critiques $z_0 = \pm 1/c$.

DÉMONSTRATION: Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $F(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Puisque $|F'(z)| < 1$, pour $z \in \mathcal{A}$, F est contractante sur $\mathcal{B}$ qui est borné. Enfin, les points fixes sont les limites respectives des orbites des valeurs critiques $\pm 1/c$.

D'autre part, si F admet un point fixe attractif w , alors $w \in \mathcal{A}$. Puisque $F(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, w est donc aussi dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Alors $\pm w$ sont les limites respectives des orbites de $\pm 1/c$. $\square$

6. La récurrence par la fonction réciproque $G(z)$. Pour rejoindre les racines de (2.1) qui sont à l'extérieur de l'"ellipse" centrale et les points fixes répulsifs de F , qui sont tous, comme on remarquera plus loin, à l'extérieur de l'ovale de Cassini $\mathcal{O}$, on itère la fonction réciproque

$$z^{n+1} = G(z_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.1)$$

où

$$G(z) = -i \log(cz \pm \sqrt{(cz)^2 - 1}) + 2k\pi. \quad (6.2)$$

On fixe maintenant la détermination de G . Soit

$$w_{\pm} = cz \pm \sqrt{(cz)^2 - 1}. \quad (6.3)$$

On voit que $w_+ w_- = 1$. Pour avoir $\Im G(z) \geq 0$, on prend le signe $\pm$ dans (6.3) qui donne

$$|w_{\pm}| \leq 1. \quad (6.4)$$

De plus, si $c \in III \cup II$, on prend

$$0 < \arg \log w_{\pm} \leq 2\pi$$

et si $c \in I \cup IV$, on prend

$$-\pi < \arg \log w_{\pm} \leq \pi.$$

Puisqu'on cherche les racines de (2.1), on choisira la valeur de k telle que la région Q_p , qui contient la racine $z^{(p)}$ désirée, soit dans la demi-bande B_k .

Des considérations qui précèdent découlent le lemme qui suit.

LEMME 1. Avec les déterminations, respectivement, du signe $\pm$ dans $w_{\pm}$, de l'argument de $\log w_{\pm}$ et de k , qu'on vient de donner, G applique B_k dans B_k .

On démontre le lemme qui suit.

LEMME 2. L'itération de G en (6.1) converge si les segments $[z_n, z_{n+1}]$ ne coupent pas l'ovale de Cassini $\mathcal{O}$.

DÉMONSTRATION: Puisque $\mathcal{A} = G(\mathcal{B})$, $[z_n, z_{n+1}] \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Alors

$$\begin{aligned} |z_{n+2} - z_{n+1}| &= |G(z_{n+1}) - G(z_n)| \\ &= \left| \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{-c}{\sqrt{1 - (cz)^2}} dz \right|, \\ &\quad \text{l'intégrale étant prise sur le segment } [z_n, z_{n+1}], \\ &\leq \max_{z \in [z_n, z_{n+1}]} \frac{|c|}{\sqrt{|1 - cz||1 + cz|}} |z_{n+1} - z_n| \\ &\leq d |z_{n+1} - z_n|, \quad d < 1. \quad \square \end{aligned}$$

On remarque que le complémentaire de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} - \mathcal{A}$, ne peut contenir de point fixe w : en effet, $F^{-1}(w) \in \mathcal{A}$ puisque $F(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, mais ceci est absurde puisque $w \notin \mathcal{A}$.

Des deux lemmes qui précèdent, on déduit un théorème de convergence pour G .

THÉORÈME 3. Soit $z^{(p)}$ la racine de (2.1) dans une région Q_p donnée. Si la demi-bande verticale B_k de largeur 2π ne contient aucune autre racine pour la même valeur de c ni ne coupe l'ovale de Cassini $\mathcal{O}$, alors $G(z_n)$, $z_0 \in Q_p - \mathcal{A}$, converge vers la racine unique $z^{(p)}$.

Sous les hypothèses du théorème qui précède, le choix des valeurs $z_{n+1} \in B_k$ de la fonction réciproque G en (6.1) donne une suite normale; on a ici un cas particulier d'un lemme de Baker [1, Lemma 1, p. 4].

REMARQUE. Puisque

$$G'(z) = -\frac{c}{\sqrt{1 - (cz)^2}}$$

ne s'annule pas dans le plan fini, G n'a pas de point critique à distance finie. On peut donc prendre un z_0 quelconque dans $Q_p - \mathcal{A}$ comme valeur de départ au théorème qui précède. Du fait que l'aire de l'ovale de Cassini $\mathcal{O}$ est assez petite, l'une des boucles de l'ovale coupe au plus deux bandes B_k dans le 1^{er} quadrant des z . Enfin F admet au plus un point fixe attractif dans le 1^{er} quadrant des z . Donc G convergera pour presque toutes les racines de (2.1).

7. Une stratégie de résolution numérique. On se restreint au 1^{er} quadrant des z . On note les racines $z^{(1)} \in IV_1$, $z^{(2)} \in III_2$, $z^{(3)} \in II_3$, etc., selon l'ordre établi à la fig. 1. Si $c \in III \cup II$, on considère les demi-bandes verticales (2.4), $B_k: 2k\pi < \Re z \leq (2k+2)\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, et on prend la détermination $0 < \arg w \leq 2\pi$ de $\log w$ dans (6.2). D'autre part, si $c \in I \cup IV$, on considère les demi-bandes verticales (2.5), $B_k: (2k+1)\pi < \Re z \leq (2k+3)\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, et on prend la détermination $-\pi < \arg w \leq \pi$ de $\log w$ dans (6.2). On prend, aussi dans (6.2), le signe de $w_{\pm} = cz \pm \sqrt{(cz)^2 - 1}$ qui rend $|w_{\pm}| \leq 1$; ceci est possible puisque $w_+ w_- = 1$.

Si l'ovale de Cassini $\mathcal{O}$ ne coupe pas la bande B_k en question qui contient la racine $z^{(p)}$ désirée, alors, par le théorème 3, la récurrence G de (6.1) converge à $z^{(p)}$ avec une valeur de départ $z_0 \notin \mathcal{A}$ quelconque.

Si l'une des boucles de l'ovale de Cassini $\mathcal{O}$ contient une racine pour une valeur de c donnée, alors la récurrence F de (5.1) converge à cette racine avec $z_0 = \pm 1/c$, où le signe est tel que z_0 est dans la boucle en question.

Si l'on cherche $z^{(1)} \in IV_1$, la récurrence de Newton (4.1) avec z_0 donnée en (4.3) pour $c \in IV$, convergera à $z^{(1)}$, à condition que $z^{(1)}$ ne soit pas trop près de la racine double ξ_0 , dans lequel cas, (4.1) pourrait converger à $z^{(2)} \in IV_2$; mais alors F aurait déjà convergé à $z^{(1)}$.

Enfin, si l'une des boucles de l'ovale de Cassini $\mathcal{O}$ coupe la bande B_k qui contient la racine $z^{(p)}$, le bassin d'attraction immédiat de $z^{(p)}$ peut être exigu. Si F converge dans B_k , on a la racine. Sinon, on itère G avec $-\pi < \arg w \leq \pi$ ou $0 < \arg w \leq 2\pi$ selon le cas; si on a convergence dans B_k , on a la racine. Mais si les itérées de $G(z_0)$ convergent à un cycle attractif d'ordre ≥ 2 , on prend une nouvelle valeur de départ z_0 . On trouvera un exemple à la fig. 4: avec la valeur $c = 0,1537 - 0,00032i$, G converge à $z^{(5)}$, à $z^{(9)}$ ou à un 3-cycle attractif selon la valeur de départ z_0 et selon la détermination de $\arg w$.

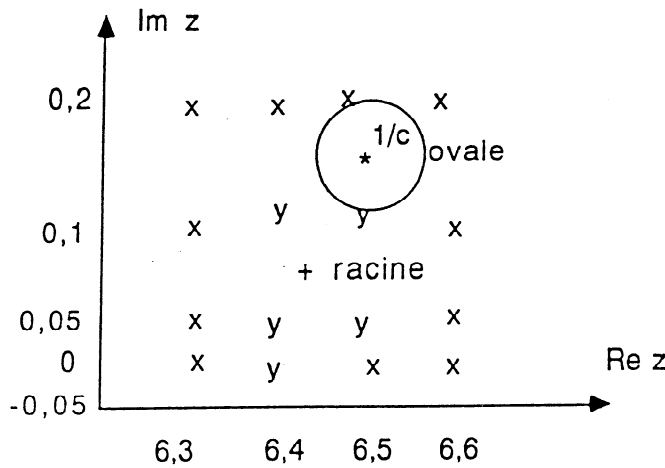


Figure 4. Orbites des points notés x et y par la relation G pour $c = 0,1537 - 0,00032i \in IV$. Si $-\pi < \arg z \leq \pi$, x aboutit dans un 3-cycle et y va à la racine $z^{(5)} = 6,44 + 0,069i \in IV_5$. Si $0 < \arg z \leq 2\pi$, x va à la racine $z^{(9)} = 12,47 + 1,28i \in IV_9$ et y va à la racine $z^{(5)}$.

A la racine double ξ_0 , on voit que l'une des boucles de l'ovale de Cassini $\mathcal{O}$ est tangente à la frontière de l'"ellipse" et est à l'intérieur de celle-ci. Si l'on rapproche le foyer $\pm 1/c$ de l'ovale vers l'origine sur l'axe imaginaire, la racine double bifurque verticalement et $z^{(1)}$ entre dans l'ovale; mais si on éloigne le foyer, la bifurcation est horizontale et les deux racines sortent de l'ovale.

Aux autres racines doubles ξ_k , $k = 1, 2, \dots$, l'une des boucles de l'ovale de Cassini $\mathcal{O}$ est tangente à la frontière verticale et à droite de celle-ci comme on peut le voir à la table 1: $\xi_n < |1/c_n|$. Si l'on rapproche le foyer $\pm 1/c$ de l'ovale vers l'origine sur l'axe réel, la bifurcation est verticale et les racines se retrouvent à l'extérieur de l'ovale; mais si on éloigne le foyer, la bifurcation est horizontale et une racine se retrouve dans l'ovale.

Les racines qui sont près du bord des ovales ont un multiplicateur près de 1 en module. Dans ce cas, on peut accélérer la convergence de la récurrence par la méthode de Steffensen [13], à condition que la convergence soit déjà amorcée; sinon Steffensen, qui rend attractif tout point fixe répulsif, pourrait converger à une racine voisine.

8. Les racines de $\sin z = cz$. L'équation

$$cz - \sin z = 0 \quad (8.1)$$

se traite presque en tout point comme (2.1). Les racines doubles sont les racines $\pm\eta_n$ de l'équation

$$\tan z = z. \quad (8.2)$$

On obtient ainsi la table 2 des premières racines doubles et des valeurs de c correspondantes.

TABLE 2. Les premières racines doubles de $cz = \sin z$ et les valeurs de c correspondantes.

n	$\pm\eta_n$	$\pm c_n$	$\pm 1/c_n$
0	0	0	∞
1	4,493 409 5	-0,217 234	-4,603 339
2	7,725 251 8	0,128 375	7,789 706
3	10,904 121 7	-0,091 325	-10,949 880
4	14,066 193 9	0,070 913	14,101 695
5	17,220 755 3	-0,057 972	-17,249 766
6	20,371 303 0	0,049 030	20,395 833

Les images des quadrants, resp. I, II, III et IV , du plan des c dans les régions respectives I_n, II_n, III_n et IV_n du plan des z par la relation

$$c \rightarrow \{z \mid \sin z = cz\}$$

donnent la fig. 5. On remarque l'absence d'"ellipse" centrale. On peut trouver des demi-bandes B_k de largeur 2π qui contiennent une seule racine de (8.1) pour une valeur de c donnée. Donc la méthode de Newton ne joue plus le rôle spécial qu'elle avait joué pour (2.1).

On emploie les fonctions de récurrence

$$F(z) = \frac{\sin z}{c} \quad (8.3)$$

et

$$G(z) = -i \log(icz \pm \sqrt{1 - (cz)^2}) + 2k\pi. \quad (8.4)$$

La région d'attraction de F est donné par l'inégalité

$$\mathcal{A} = \{z \mid |\cos z| < |c|\};$$

la région $\mathcal{B} = F(\mathcal{A})$, donnée par (5.4), est bornée par l'ovale de Cassini (5.5). Le reste suit comme pour (5.1) et (6.1) avec les modifications appropriées.

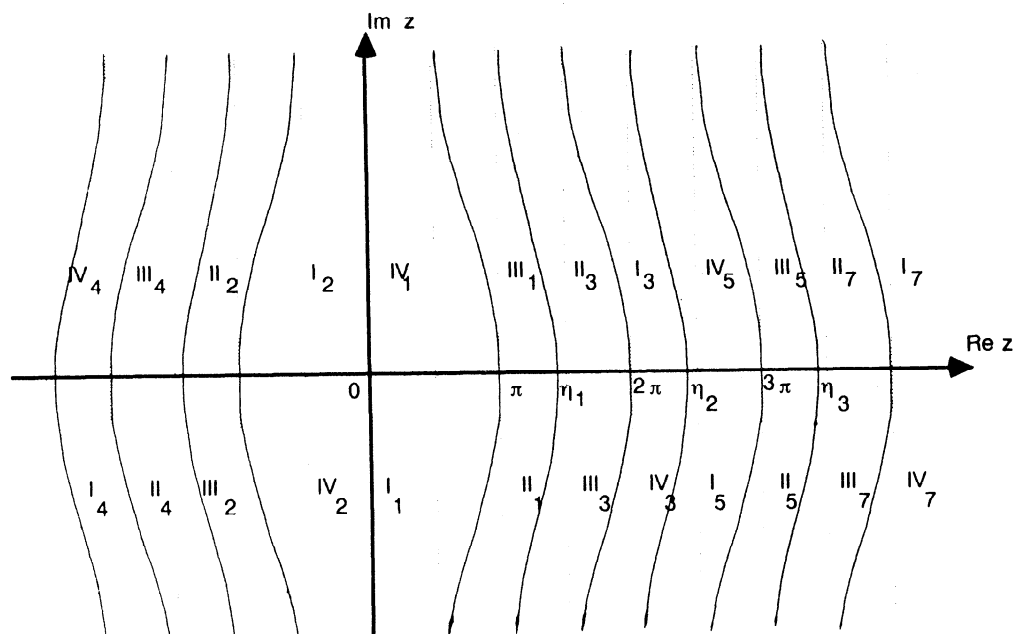


Figure 5. Les régions I_n , II_n , III_n et IV_n du plan des z sont les images par la relation multivoque $c \rightarrow \{z \mid \sin z = cz\}$ respectivement des quadrants I , II , III et IV du plan des c . Les η_n sont les points doubles de la relation. Les verticales pointillées sont les asymptotes $\Re z = \pm n\pi/2$. Le bord des régions coupe l'axe des réels successivement en $0, \pm\pi, \pm\eta_1, \pm2\pi, \pm\eta_2$, etc.

BIBLIOGRAPHIE

1. I.N. Baker, *Limit functions and sets of non-normality in iteration theory*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I no 467 (1970), 11 pp.
2. I.N. Baker, *The domains of normality of an entire function*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1 (1975), 277–283.
3. P. Blanchard, *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 11 (1984), 85–141.
4. H.E. Bussey, *Dielectric measurements in a shielded open circuit coaxial line*, IEEE Trans. Instrum. Meas. IM-29 (1980), 120–124.
5. R.L. Devaney, *Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 11 (1984), 167–171.
6. R.L. Devaney and F. Tangerman, *Dynamics of entire functions near the essential singularity*, Ergod. Th. & Dynam. System 6 (1986), 489–503.
7. R.L. Devaney, *Chaotic burst in nonlinear dynamical systems*, Science 237 (1987), 342–345.
8. R.L. Devaney and M. Krych, *Dynamics of $\exp(z)$* , Ergod. Th. & Dynam. System 4 (1984), 35–52.
9. N. Doual, "Résolution globale d'une équation transcendante par l'itération d'une fonction entière transcendante et de sa réciproque," Université d'Ottawa, Ottawa, Canada K1N 6N5, juin, 1988, thèse de M.Sc., pp. 97.
10. N. Doual, J.L. Howland and Rémi Vaillancourt, *Global iterative solutions of elementary transcendental equations*, Proc. of Intern. Conf. on Numer. Math., Singapore, Intern. Series of Numer. Math., vol. 86, pp. 127–136, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1988.
11. P. Fatou, *Sur l'itération des fonctions transcendentes entières*, Acta Math. 47 (1926), 337–370.

12. J.L. Howland and Rémi Vaillancourt, *Attractive cycles in the iteration of meromorphic functions*, Numer. Math. **46** (1985), 323–337.
13. E. Isaacson and H.B. Keller, "Analysis of Numerical Methods," Wiley, New York, London, Sydney, 1966, pp. 103–108.
14. E. Jahnke and F. Emde, "Tables of Functions with Formulae and Curves," Dover, New York, 1945, Addenda, p. 66.
15. M. Misiurewicz, *On iterates of e^z* , Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1** (1981), 103–106.
16. R. Nevanlinna, "Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes," Gauthier-Villars, Paris, 1929, par. 39, p. 75.
17. W.R. Scott, Jr., "Dielectric Spectroscopy Using Shielded Open-Circuited Coaxial Lines and Monopole Antennas of General Length," Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332, October, 1985, Ph.D.Thesis, pp. xviii–230.
18. W.R. Scott, Jr. and G.S. Smith, *Error analysis for dielectric spectroscopy using shielded open-circuited coaxial lines of general length*, IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-35** (1986), 130–137.
19. Lucie Tanguay and Rémi Vaillancourt, *Numerical solution of the dielectric equation for a coaxial line*, IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-33** (1984), 88–90.
20. Hans Töpfer, *Über die Iteration der ganzen transzendenten Funktionen, insbesondere von $\sin z$ und $\cos z$* , Math. Ann. **117** (1940), 65–84.
21. André Warusfel, "Dictionnaire raisonné de mathématiques," Éd. du Seuil, Paris, 1966, p. 78 et 231.
22. CRC Standard Mathematical Tables, 27th Edition, Ed. by W.H. Beyer, CRC Press, Boca Raton, FL, 1984, pp. 218–219.

S. Gélinas

Département de mathématiques

Université du Québec à Trois-Rivières

C.P. 500, Trois-Rivières, QC, Canada G9A 5H7

R. Vaillancourt

Département de mathématiques

Université d'Ottawa

Ottawa, ON, Canada K1N 6N5