

UNE NOUVELLE CARACTÉRISATION DES ESPACES DE HILBERT

JOCELYN DESBIENS

RÉSUMÉ. Nous présentons dans cet article une nouvelle caractérisation des espaces de Hilbert. Elle est basée sur une relation entre la définition de l'orthogonalité de Carlsson et celle de Birkhoff-James.

ABSTRACT. A new characterization of inner product space is given. It is based on a relation existing between Carlsson's definition of orthogonality and Birkhoff-James' definition.

1. Notation. Dans cet article $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ désignera un espace de Banach réel, $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathcal{B}$ c'est-à-dire $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{B} \mid \|x\| = 1\}$ et $\mathcal{C}(x, y) = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ avec $\mathcal{P}$ le plan contenant les vecteurs indépendants x, y et l'origine $\mathcal{O}$. Donc $\mathcal{C}(x, y)$ est le cercle unité du plan $\mathcal{P}$. Nous le noterons par $\mathcal{C}$ lorsque le contexte sera clair. Par $\dim(\mathcal{B})$ nous dénoterons toujours la dimension algébrique de $\mathcal{B}$ et par $[x, y]$ le segment de droite ayant les vecteurs x et y pour extrémités. L'abréviation $\perp_A \implies \perp_B$ signifiera que la relation d'orthogonalité au sens de A entraîne l'orthogonalité au sens de B .

2. Introduction. Rappelons en premier lieu les définitions suivantes:

DÉFINITION 1. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $(x, y) \in \mathcal{B}^2$. Nous dirons que

- (1) x est *orthogonal à y au sens de Birkhoff-James*, ce que nous noterons par $x \perp_{BJ} y$, si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- (2) x est *orthogonal à y au sens isocèle*, ce que nous noterons par $x \perp_I y$, si et seulement si $\|x + y\| = \|x - y\|$.
- (3) x est *orthogonal à y au sens de Roberts*, ce que nous noterons par $x \perp_R y$, si et seulement si $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- (4) x est *orthogonal à y au sens de Pythagore*, ce que nous noterons par $x \perp_P y$, si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

La définition originale de la relation de Birkhoff-James a été donnée par Birkhoff [2] en 1935. Elle fut reprise un peu plus tard par Fortet [8] et James [11]. Les relations d'orthogonalité isocèle et de Pythagore furent aussi données par James [10]. La plus ancienne quant à elle est l'oeuvre de Roberts [16]. Toutes ces définitions généralisent aux espaces de Banach la notion d'orthogonalité telle qu'on l'entend dans le cadre des espaces de Hilbert ($x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$).

Plusieurs auteurs se sont servis du fait qu'une relation d'orthogonalité pouvait entraîner une autre pour caractériser les espaces de Hilbert (nous renvoyons le lecteur curieux aux livres d'Amir [1] et d'Istratescu [9] pour une description exhaustive des différentes caractérisations de ces espaces). Ainsi Ohira [15] a-t-il montré que si $\perp_{BJ} \implies \perp_P$ alors $\mathcal{B}$ est hilbertien. La condition spécifiée par Ficken [7] était que $\perp_I \implies \perp_R$. Quant à Day [4],

il montra qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace $\mathcal{B}$ soit hilbertien et que soit $\perp_I \implies \perp_P$, ou soit $\perp_P \implies \perp_I$.

Les relations d'orthogonalité isocèle et de Pythagore telles que définies ci-dessus sont en fait des cas particuliers d'une définition beaucoup plus large donnée par Carlsson [3] en 1963. À cette fin, soit $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, k = 1, \dots, n$ une collection fixée de nombres réels satisfaisant les relations suivantes:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k \gamma_k^2 = 0; \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \gamma_k = 1.$$

DÉFINITION 2. Soit $(x, y) \in \mathcal{B}^2$. Nous dirons que x est *orthogonal à y au sens de Carlsson*, ce que nous noterons par $x \perp_C y$, si et seulement si

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \|\beta_k x + \gamma_k y\|^2 = 0.$$

Nous avons posé dans l'article [5] la question suivante: une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{B}$ soit hilbertien est-elle que

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{B}^2) \quad (x \perp_{BJ} y \implies x \perp_C y)?$$

Le but du présent article est de donner une réponse affirmative à cette question. C'est aussi la raison d'être du théorème suivant.

3. Résultat principal.

THÉORÈME. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (1) $\mathcal{B}$ est un espace de Hilbert.
- (2) $(\forall (x, y) \in \mathcal{B}^2) \quad (x \perp_{BJ} y \implies x \perp_C y)$.

Remarquons que ce théorème est une généralisation des résultats dûs à Ohira [15] et à Leduc [13]. La preuve du théorème est basée sur la définition et les lemmes suivants.

DÉFINITION 3. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Nous dirons que la norme de $\mathcal{B}$ est *différentiable au sens de Gâteaux* si pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ avec $x \neq 0$ la limite suivante existe:

$$N(x; y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h}.$$

$N(x; y)$ est la différentielle au sens de Gâteaux de la norme au point x dans la direction du vecteur y . De façon générale cette limite n'existe pas toujours. Cependant, grâce à la convexité de la fonction norme $\|\cdot\|$, les limites à gauche et à droite de ce rapport, que nous dénoterons par $N_-(x; y)$ et $N_+(x; y)$, existent toujours.

LEMME 1. (James [11, corollaire 2.2 et théorème 2.3]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ on a:

- (1) $x \perp_{BJ} y \implies \alpha x \perp_{BJ} \beta y, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- (2) Il existe au moins un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + \alpha y \perp_{BJ} y$ et $x \perp_{BJ} \beta x + y$.

LEMME 2. (James [10, corollaire 4.7]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Si pour tout vecteur $x \in \mathcal{B}$ et tout plan $\mathcal{P}$ contenant x et l'origine $\mathcal{O}$ il existe un vecteur non nul $y \in \mathcal{P}$ tel que $x \perp_R y$ alors $\mathcal{B}$ est un espace de Hilbert.

LEMME 3. (James [11, théorème 4.1]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Pour que la norme sur $\mathcal{B}$ soit différentiable au sens de Gâteaux il faut et il suffit que pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ avec $x \neq \mathcal{O}$ il existe un unique nombre réel β tel que $x \perp_{BJ} \beta x + y$.

LEMME 4. (Carlsson [3, lemmes 4.1 et 4.2]). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach avec $\dim(\mathcal{B}) = 2$.

- (1) Si $(x, y) \in \mathcal{C}^2$ alors $\|x + \lambda y\|^2 = \lambda^2 + O(\lambda)$ pour $\lambda \rightarrow \pm\infty$.
- (2) Il existe un sous-ensemble dense $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ tel que si $(x, y) \in \mathcal{C}^2$ avec $x \in \mathcal{D}$ et $x \perp_{BJ} y$ alors $\|x + \lambda y\| = 1 + O(\lambda^2)$ pour $\lambda \rightarrow 0$.

LEMME 5. (Carlsson [3, théorèmes 6.3 et 6.4]). Soit $\varphi(\lambda)$ une solution continûment différentiable de l'équation fonctionnelle non dégénérée

$$\sum_{k=1}^r p_k F(q_k \lambda) = C_1 + c_2 \lambda^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

où

$$C_1 = \sum_{k=1}^r p_k; C_2 = \sum_{k=1}^r p_k q_k^2; \sum_{k=1}^r p_k q_k = 1; \quad q_k \neq 0, \quad k = 1, \dots, r.$$

(Ici on peut avoir $C_1 = C_2 = 0$) Si la fonction φ a le comportement asymptotique suivant:

$$\varphi(\lambda) = 1 + O(\lambda^2) \quad \text{pour } \lambda \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda) = \lambda^2 + O(\lambda) \quad \text{pour } \lambda \rightarrow \pm\infty$$

alors $\varphi(\lambda) = \varphi(-\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

LEMME 6. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Supposons que $\perp_{BJ} \implies \perp_C$. La norme sur $\mathcal{B}$ est alors continûment différentiable au sens de Gâteaux, c'est-à-dire que la fonction $N(x; y)$ existe et est continue pour tout $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ avec $x \neq \mathcal{O}$.

DÉMONSTRATION: La démonstration du lemme suit de près le texte de Carlsson [3]. Soit $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ avec $x \neq \mathcal{O}$. Par le lemme 1.2 ci-dessus on peut trouver au moins un nombre réel β tel que $x \perp_{BJ} \beta x + y$. Par homogénéité de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James (lemme 1.1 ci-dessus) on a que $x \perp_{BJ} \frac{1}{m}(\beta x + y)$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Donc par hypothèse $x \perp_C \frac{1}{m}(x + \beta y)$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \left\| \beta_k x + \gamma_k \left(\frac{1}{m}(\beta x + y) \right) \right\|^2 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \alpha_k \|m\beta_k x + \gamma_k(\beta x + y)\|^2 = 0.$$

En reprenant maintenant mot à mot le théorème 3.3 de [3] on montre que

$$\beta = -\frac{1}{\|x\|} (pN_+(x; y) + qN_-(x; y))$$

où

$$p = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \beta_k \gamma_k > 0}} \alpha_k \beta_k \gamma_k; \quad q = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \beta_k \gamma_k < 0}} \alpha_k \beta_k \gamma_k.$$

On sait que les limites $N_+(x; y)$ et $N_-(x; y)$ existent. Par conséquent, pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ avec $x \neq \mathcal{O}$ il existe un unique nombre réel β tel que $x \perp_{BJ} \beta x + y$. Ainsi, par le lemme 3 ci-dessus, la norme définie sur $\mathcal{B}$ est différentiable au sens de Gâteaux. Donc

$$\beta = -\frac{1}{\|x\|}(p + q)N(x; y).$$

Nous affirmons maintenant que la fonction $(x, y) \mapsto N(x; y)$ est continue pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ avec $x \neq \mathcal{O}$. La continuité de cette fonction provient en fait de la continuité de la fonction $(x, y) \mapsto \beta_{(x, y)}$. Soit en effet une suite x_k convergeant vers x ($x_k, x \neq \mathcal{O}$), une suite y_k convergeant vers y et β_k, β des nombres tels que $x_k \perp_{BJ} \beta_k x_k + y_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $x \perp_{BJ} \beta x + y$. Puisque $|N(x_k, y_k)| \leq \|y_k\|$, $\forall k \in \mathbb{N}$, la suite des β_k est alors bornée. Soit donc $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de la suite $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. On peut extraire de cette suite une sous-suite $\{\beta_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un nombre réel α . Puisque

$$x_{k_j} \perp_{BJ} \beta_{k_j} x_{k_j} + y_{k_j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

alors

$$x \perp_{BJ} \alpha x + y.$$

Par unicité on a que $\alpha = \beta$. Ainsi $\beta_k \rightarrow \beta$ et la fonction $(x, y) \mapsto N(x; y)$ est continue en (x, y) . $\square$

Définissons maintenant une fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$\varphi(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

LEMME 7. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach avec $\dim(\mathcal{B}) = 2$ et $(x, y) \in \mathcal{C}^2$ avec $x \perp_{BJ} y$. Si $\perp_{BJ} \implies \perp_C$ alors

$$\varphi(\lambda) = \varphi(-\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION: Rappelons que $x \perp_C y \iff \sum_{k=1}^n \alpha_k \|\beta_k x + \gamma_k y\|^2 = 0$. Réécrivons l'expression de gauche sous la forme suivante:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \|\beta_k x + \gamma_k y\|^2 = \sum_{k=1}^r p_k \|x + q_k y\|^2 - C_1 \|x\|^2 - C_2 \|y\|^2$$

où

$$C_1 = \sum_{k=1}^r p_k; \quad C_2 = \sum_{k=1}^r p_k q_k^2; \quad \sum_{k=1}^r p_k q_k = 1; \quad q_k \neq 0, \quad k = 1, \dots, r.$$

Soit maintenant $x \in \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est le sous-ensemble dense de $\mathcal{C}$ défini au lemme 4.2 ci-dessus. Soit de plus $y \in \mathcal{C}$ avec $x \perp_{BJ} y$ (tout vecteur $y \in \mathcal{C}$ parallèle à une tangente à $\mathcal{C}$ au point x a cette propriété). Par hypothèse $x \perp_C y$. De plus, par homogénéité de la relation de Birkhoff-James (lemme 1.1 ci-dessus), $x \perp_c \lambda y, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \|\beta_k x + \gamma_k \lambda y\|^2 = 0$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^r p_k \|x + q_k \lambda y\|^2 = C_1 + C_2 \lambda^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Par conséquent la fonction $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

est une solution continûment différentiable (voir le lemme 6) de l'équation fonctionnelle

$$\sum_{k=1}^r p_k F(\lambda q_k) = C_1 + C_2 \lambda^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Puisque $x \in \mathcal{D}$ et $x \perp_{BJ} y$ alors (voir le lemme 4.1 ci-dessus)

$$\varphi(\lambda) = 1 + O(\lambda)^2 \quad \text{pour } \lambda \rightarrow 0 \text{ et } \quad \varphi(\lambda) = \lambda^2 + O(\lambda) \quad \text{pour } \lambda \rightarrow \pm\infty.$$

Donc, par le lemme 5, $\|x + \lambda y\|^2 = \|x - \lambda y\|^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$. Maintenant $x \in \mathcal{D}$. Puisque $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{C}$ et que la fonction $\|\cdot\|$ est continue alors

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x - \lambda y\|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

et ce, pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{C}^2$ avec $x \perp_{BJ} y$. $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME:

1 $\Rightarrow$ 2

Soit $(\mathcal{B}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ avec $x \perp_{BJ} y$. Alors $\langle x, y \rangle = 0$ et

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \|\beta_k x + \gamma y\|^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k^2 \|x\|^2 + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \gamma_k \langle x, y \rangle + \sum_{k=1}^n \alpha_k \gamma_k^2 \|y\|^2 = 0.$$

Ainsi $x \perp_{\mathcal{C}} y$.

2 $\Rightarrow$ 1

Soit $x \in \mathcal{B}$ avec $x \neq \mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$ un plan contenant x et l'origine $\mathcal{O}$. Pour les besoins de la preuve on peut supposer que $\mathcal{B} = \mathcal{P}$ et que $x \in \mathcal{C} = \mathcal{S}$. On peut assurément trouver un vecteur $y \in \mathcal{C}$ tel que $x \perp_{BJ} y$. Par le lemme 7, $\|x + \lambda y\|^2 = \|x - \lambda y\|^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$. Donc

$$\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Par conséquent $x \perp_R y$. Par le lemme 2, $\mathcal{B}$ ($= \mathcal{P}$) est hilbertien. Tout sous-espace de $\mathcal{B}$ de dimension ≤ 2 étant hilbertien il suffit maintenant d'appliquer le résultat de von Neumann-Jordan¹ [14] pour conclure que $\mathcal{B}$ est lui-même hilbertien. $\square$

¹C'est-à-dire qu'un espace de Banach est hilbertien si et seulement si tous ses sous-espaces de dimension deux partagent eux-mêmes cette propriété.

BIBLIOGRAPHIE

1. Amir D., "Characterizations of Inner Product Spaces," Birkhäuser, 1986.
2. Birkhoff G., *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J. **1** (1935), 169-172.
3. Carlsson S., *Orthogonality in normed linear spaces*, Ark. Mat. **4** (1963), 297-318.
4. Day M., *Some characterizations of inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 320-337.
5. Desbiens J., *Caractérisation d'un espace préhilbertien au moyen de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James*, Ann. sc. math. Québec **11** (1987), 295-303.
6. Diminie C., *A new orthogonality relation for normed linear spaces*, Math Nachr. **114** (1983), 197-203.
7. Ficken F., *Note on the existence of scalar products in normed linear spaces*, Ann. of Math. **45** (1944), 362-366.
8. Fortet R., *Remarques sur les espaces uniformément convexes*, Bull. Soc. Math. France **67-69** (1939-41), 23-46.
9. Istratescu V.I., "Inner Product Structures, Theory and Applications," Reidel Publishing Company, 1987.
10. James R., *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Math. J. **12** (1945), 291-302.
11. James R., *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 265-292.
12. James R., *Inner products in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 559-566.
13. Leduc M., *Caractérisation des espaces euclidiens*, C.R. Acad. Sci. Paris **268** (1969), 943-946.
14. Neumann J. von et Jordan P., *On inner inner products in linear, metric spaces*, Ann. of Math. **36** (1935), 719-723.
15. Ohira K., *On some characterization of abstract Euclidean spaces by properties of orthogonality*, Kumamoto Jour. Sci. **1** (1952), 23-26.
16. Roberts B., *On the geometry of abstract vector spaces*, Tôhoku Math. J. **39** (1934), 42-59.

J. Desbiens

Département d'ingénierie et d'informatique

Collège militaire royal de Saint-Jean

Saint-Jean-sur-Richelieu

Québec, Canada J0J 1R0