

LES FONCTIONS SPHÉRIQUES AVEC DES ZÉROS HORIZONTAUX ET VERTICAUX

NORBERT H.J. LACROIX

RÉSUMÉ. Dans cet article, on détermine toutes les fonctions sphériques qui s'annulent aux points de cercles horizontaux et aux points de grands cercles verticaux, sur la sphère, donnant ainsi lieu à des grilles semblables à celles formées par les harmoniques sphériques classiques (tessérales, zonales et sectorielles). La question s'était posée récemment dans l'étude d'un problème biomathématique. On démontre que dans presque tous les cas, les fonctions cherchées doivent être les harmoniques sphériques classiques elles-mêmes. Dans les autres cas, on découvre de nouvelles fonctions qu'on peut décrire à l'aide de critères empruntés à la théorie des nombres.

ABSTRACT. In this paper are determined all the spherical functions which, on the sphere, vanish at the points of horizontal circles and at the points of vertical great circles, so as to give rise to grids or tessera similar to those of the tesseral, zonal and sectorial spherical harmonics. The problem arose in a recent biomathematical context. It is proved that in most cases the functions sought for must be such spherical harmonics themselves. The other cases yield expressions which can be fully described, in particular by means of number-theoretic criteria.

1. Introduction. En faisant une étude mathématique du clivage binaire (division cellulaire) en embryologie animale, Goodwin et Lacroix [1] ont tiré des conclusions mathématiques complètes, ainsi que les interprétations biologiques conséquentes, en partant d'un modèle de Goodwin et Trainor [2] basé sur le calcul des variations et sur une équation d'Euler-Lagrange qui prenait essentiellement la forme de l'équation des fonctions sphériques (donnée dans quelques lignes ci-dessous). Dans leur travail, Goodwin et Lacroix rencontrèrent la question suivante à laquelle répond cet article: quelles sont les fonctions sphériques qui, sur la sphère, s'annulent aux points de cercles horizontaux et aux points de grands cercles verticaux, produisant ainsi des grilles ou tessères semblables à celles des harmoniques sphériques zonales, sectorielles et tessérales ([3, p. 94] ou [7, p. 122])?

Évidemment, une telle question aurait été plus d'actualité voilà quelque soixante ans, mais elle n'a surgi que récemment à la suite de besoins en biomathématique. De plus, une clé à sa solution est l'usage d'un résultat récent sur les zéros communs des fonctions associées de Legendre ([5]).

Les fonctions sphériques $Y_n(\theta, \phi)$ "d'ordre" $n \geq 1$ (n entier) sont les solutions (régulières) de l'équation

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + n(n+1)u = 0,$$

appelée l'équation des fonctions sphériques. (Ces fonctions sont aussi désignées fonctions sphériques de Laplace ou fonctions sphériques de surface). Chaque $Y_n(\theta, \phi)$ peut s'écrire en termes des $2n+1$ fonctions sphériques linéairement indépendantes $P_n^0(\cos \theta) = P_n(\cos \theta)$,

Reçu le 19 février 1988 et, sous forme révisée, le 17 août 1988.

Ce travail a reçu l'appui de l'Université Laval, de l'University of Sussex (Brighton, U.K.) et du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (subvention A8481).

© Association mathématique du Québec

$\cos m\phi P_n^m(\cos \theta)$, $\sin m\phi P_n^m(\cos \theta)$ où $m = 1, 2, \dots, n$. Ici $P_n = P_n^0$ est le polynôme de Legendre de degré n et chaque P_n^m est une fonction associée de Legendre. Explicitement,

$$Y_n(\theta, \phi) = A_0 P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta), \quad (1)$$

où les A et B sont des constantes (réelles) arbitraires. On en trouvera les détails dans [4, pp. 334-336] ou dans [8, pp. 72-73]. En rapport avec l'équation (1), on considère que $0 \leq \theta \leq \pi$ (colatitute) et que $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (longitude).

On appellera *zéro horizontal* de Y_n toute valeur $\theta = \theta_0$ ($\neq 0$ et $\neq \pi$) pour laquelle $Y_n(\theta_0, \phi) = 0$. Sur une sphère cette équation définit un cercle horizontal aux points duquel s'annule la fonction sphérique. On appellera *zéro vertical* de Y_n toute paire de valeurs $\phi = \phi_0$ et $\phi = \phi_0 + \pi$ telles que $Y_n(\theta, \phi_0) = 0 = Y_n(\theta, \phi_0 + \pi)$. Sur une sphère ces équations définissent les deux moitiés d'un grand cercle vertical aux points duquel la fonction sphérique s'annule.

Ainsi notre problème est de trouver toutes les fonctions Y_n décrites par l'équation (1) et qui ont des zéros horizontaux et des zéros verticaux. Sa solution complète, résumée par le Tableau I, mérite quelques autres détails de présentation.

Nombre de zéros horizontaux	Nombre de zéros verticaux	Fonctions sphériques décrites par	Harmoniques zonales, sectorielles ou tessérales
$s \geq 2$	$d \geq 1$	Proposition 3.1 (iii) Corollaire 3.3 Proposition 5.1 (b)	Oui Oui Oui
$s \geq 2$	0	Corollaire 3.4	Oui
1	$d \geq 1$	Proposition 3.1 (ii) Proposition 5.1 (b) Proposition 5.1 (c), (d), (f) Corollaire 6.2 (b)	Oui Oui Non Non
1	0	Proposition 3.1 (i) Corollaire 4.2	Oui Non
0	$d \geq 1$	Corollaire 4.4 Proposition 5.1 (b) Proposition 5.1 (c), (d), (g) Corollaire 6.2 (c)	Oui Oui Non Non
0	0	(Autrement)	(Non)

Tableau I. Vue d'ensemble des fonctions sphériques avec des zéros horizontaux et verticaux.

D'abord, la plupart des fonctions déjà connues (en particulier les harmoniques sphériques zonales, sectorielles et tessérales) réapparaissent dans le cadre de notre première proposition (proposition 3.1 et corollaires immédiats), où l'on montre également qu'elles sont les

seules possibles dans presque tous les cas. Signalons un point spécial: requérir d'une fonction sphérique qu'elle ait au moins deux zéros horizontaux la force à être une harmonique zonale ou une harmonique tessérale.

Le reste de l'article (sections 4 à 6) traite des zéros verticaux et cela revient à retracer les quelques autres fonctions connues et à identifier toutes celles qui n'étaient pas encore connues et qui sont solutions de notre problème. On donne une description complète de ces dernières à l'aide de critères empruntés à la théorie des nombres et développés à la section 2.

2. Lemmes de base. On rappelle d'abord deux résultats, sans démonstration.

2.1 LEMME. Les fonctions associées de Legendre $P_n^1, P_n^2, \dots, P_n^n$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour la variable $\mu = \cos \theta$, sont linéairement indépendantes.

2.2 LEMME. Soit ϕ_1 un zéro de $A \cos m\phi + B \sin m\phi$. Avec une constante C appropriée, on peut écrire $A \cos m\phi + B \sin m\phi = C \sin m(\phi - \phi_1)$.

On définit maintenant pour tout entier positif r l'ensemble $F_r = \{0, 1/r, 2/r, \dots, (r-1)/r\}$, de r éléments.

2.3 LEMME. Soit $r \geq 1$ un entier. On peut énoncer certains faits connus de la façon suivante, en considérant l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour la longitude ϕ sur une sphère (exception passagère à l'étape (iii)).

- (i) Les zéros géométriquement distincts de $\sin r\phi$ dans $[0, 2\pi]$ sont les éléments de l'ensemble $\pi(F_r \cup (1 + F_r))$, qu'on peut considérer comme r paires, chacune formée de deux éléments dont la différence est π .
- (ii) Les zéros de $\cos r\phi$ dans $[0, 2\pi]$ sont les r paires dans l'ensemble $\pi(1/2r + F_r \cup (1 + F_r))$; cette liste est une translation de $\pi/2r$ de celle des zéros de $\sin r\phi$.
- (iii) Les zéros de $A \cos r\phi + B \sin r\phi$, où $A \neq 0$ et $B \neq 0$, sont les r paires dans l'ensemble $(-1/r) \arctan(A/B) + \pi(F_r \cup (1 + F_r)) = \pi(\gamma + F_r \cup (1 + F_r))$ où γ satisfait à $0 < |\gamma| < 1/2r$, ceci sur un intervalle approprié de longueur 2π . Cette liste est encore une translation de la liste des zéros de $\sin r\phi$.
- (iv) Chacun des trois ensembles de zéros ci-dessus est de la forme $\pi(\beta + F_r \cup (1 + F_r))$, avec $-1/2r < \beta \leq 1/2r$. Un tel ensemble de zéros reste le même géométriquement après une translation de π/r (lorsque nécessaire), de sorte qu'il peut toujours être considéré de la forme $\pi(\alpha + F_r \cup (1 + F_r))$ avec $0 \leq \alpha < 1/r$, dans $[0, 2\pi]$.

Le lemme suivant peut être énoncé sans démonstration; à noter cependant que (ii) s'établit en prenant d'abord deux ensembles.

2.4 LEMME. (i) $F_d \subseteq F_r$ si et seulement si $d \mid r$.

(ii) $F_r \cap F_s \cap \dots \cap F_t = F_d$ si et seulement si $(r, s, \dots, t) = d$.

2.5 LEMME. Soient $r \neq s$ des entiers positifs avec $(r, s) = d \geq 1$, $r = du$, $s = dv$ et $M = [r, s]$. Soient α et β des nombres réels satisfaisant à $0 \leq \alpha < 1/r$ et $0 \leq \beta < 1/s$. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:

- (i) $(\alpha + F_r) \cap (\beta + F_s)$ est non vide;
- (ii) $\alpha - \beta = c/M$, c est un entier et $c = 0$ ou $-u < c < 0$ ou $0 < c < v$.

Et dans de telles conditions, l'intersection vaut, dans le premier cas, $\alpha + F_d$; dans le second cas, elle est $\alpha + x_1/r + F_d$, où $x_1 \neq 0$ est l'unique solution fondamentale de la congruence $vx \equiv -c \pmod{u}$; dans le troisième cas, elle vaut $\beta + w_1/s + F_d$, où $w_1 \neq 0$ est l'unique solution fondamentale de la congruence $ux \equiv c \pmod{v}$. Ces trois ensembles sont de la forme $\omega + F_d$, avec $0 \leq \omega < 1/d$.

DÉMONSTRATION: Si $r = 1$, on vérifie facilement que (i) et (ii) sont équivalents. À noter qu'ici le cas $-u < c < 0$ ne se réalise pas car $u = 1$. Et l'intersection est $\{\alpha\}$ dans les deux cas possibles car $w_1 = c$ et $\beta + c/s = \alpha$.

Si $s = 1$, les conclusions sont semblables.

Soient donc r et s autres que ci-dessus. Selon le lemme 2.4 (ii), on peut prendre $\alpha \neq \beta$. On voit facilement que $(\alpha + F_r) \cap (\beta + F_s)$, $F_r \cap [(\beta - \alpha) + F_s]$ et $[(\alpha - \beta) + F_r] \cap F_s$ sont tous vides ou ont exactement le même nombre d'éléments. La démonstration repose alors sur l'étude des deux cas suivants.

Cas 1. Supposons que $\beta - \alpha = \delta > 0$. On montre sans difficulté que ce cas et l'hypothèse (i) ont lieu simultanément en autant que $r \nmid s$. Alors $u > 1$. Notre δ satisfait à $0 < \delta < 1/s$ et on considère $F_r \cap (\delta + F_s)$. Sous l'hypothèse que $F_r \cap (\delta + F_s)$ est non vide, on peut écrire une équation $x/r = \delta + y/s$, où x et y sont des entiers. Une multiplication par M donne $\delta = c/M$, c entier et $0 < c < u$. À ce stade, remarquons que tout élément x/r dans l'intersection fournit une solution x de la congruence $vx \equiv c \pmod{u}$, avec $0 \leq x \leq r-1$. Montrons la réciproque, à savoir: l'hypothèse que $\beta - \alpha = \delta = c/M$, avec c entier et $0 < c < u$, entraîne que $F_r \cap (\delta + F_s)$ est non vide. Notons que l'hypothèse inclut le fait que $u > 1$. La congruence $vx \equiv c \pmod{u}$ a exactement une solution fondamentale ($\neq 0$) modulo u ([8, p. 32]). Ainsi, dans l'intervalle de 0 à $r-1$, on a d solutions x_k , où $0 < x_1 \leq u-1$, $x_2 = x_1 + u, \dots$, $x_d = x_1 + (d-1)u \leq du-1 = r-1$. Pour chaque x_k , on peut écrire $vx_k = c + uy_k$, y_k entier et satisfaisant à $0 \leq y_k \leq s-1$; en divisant chaque équation par M on voit que notre intersection est l'ensemble $x_1/r + F_d$.

Cas 2. Si $\delta = \alpha - \beta > 0$, on a $0 < \delta < 1/r$ et on considère $(\delta + F_r) \cap F_s$. Le cas 1 s'applique, avec un changement approprié de notation. Ici $0 < c < v$ et l'intersection est $w_1/s + F_d$ où $w_1 \neq 0$ est l'unique solution fondamentale de la congruence $ux \equiv c \pmod{v}$.

Le dernier énoncé du lemme est clair. $\square$

La description des zéros verticaux d'une fonction sphérique se fera par l'intersection d'ensembles $\alpha_m + F_m$, ce qui se calcule comme une chaîne d'intersections du genre de celles du lemme 2.5. Ainsi on n'a pas besoin de s'arrêter au cas $r = s$.

3. Sur les zéros horizontaux. Il est bien connu qu'en général P_n^m a $n-m$ zéros distincts (et simples) pour $0 < \theta < \pi$, placés par paires symétriques de part et d'autre de $\theta = \pi/2$, qui est lui-même un zéro si et seulement si $n-m$ est impair (cf. [3, p. 94]).

3.1 PROPOSITION. Soient $s \geq 1$ et $n \geq 1$ des entiers et $Y_n(\theta, \phi)$ une fonction sphérique non nulle, qui peut s'exprimer selon l'équation (1).

- (i) Dans le cas $n = 1$, quatre énoncés sont équivalents, comme suit:
 - (a) Y_1 a au moins un zéro horizontal;
 - (b) Y_1 a au moins un zéro horizontal et aucun zéro vertical;
 - (c) Y_1 a exactement un ($s = 1$) zéro horizontal en $\pi/2$;
 - (d) $Y_1 = A_0 \cos \theta = A_0 P_1(\cos \theta)$, avec $A_0 \neq 0$.
- (ii) Quand $n \geq 2$, les trois énoncés suivants sont équivalents:
 - (a) Y_n a exactement un ($s = 1$) zéro horizontal;
 - (b) Y_n a exactement un ($s = 1$) zéro horizontal égal à $\pi/2$;
 - (c) on a soit Y_n réduite au seul terme $Y_n = [A \cos(n-1)\phi + B \sin(n-1)\phi] P_n^{n-1}(\cos \theta)$, où A et B sont des constantes avec $(A, B) \neq (0, 0)$, soit Y_n égale à une somme d'au moins deux termes provenant de l'équation (1), avec leur paire respective

d'indices n et m satisfaisant à $n - m$ impair, où m prend ses valeurs dans $0, 1, 2, \dots, n$.

(iii) Quand $n \geq 2$, les trois énoncés suivants sont équivalents:

- (a) Y_n a $s \geq 2$ zéros horizontaux;
- (b) Y_n a au moins un ($s \geq 1$) zéro horizontal différent de $\pi/2$;
- (c) $Y_n = [A \cos(n-s)\phi + B \sin(n-s)\phi] P_n^{n-s}(\cos \theta)$, avec $s \geq 2$ et où A et B sont des constantes telles que $(A, B) \neq (0, 0)$. Et dans de telles situations équivalentes, on a $2 \leq s \leq n$.

DÉMONSTRATION: Pour établir (i), on note que dans le cas $n = 1$, toute fonction sphérique non nulle a la forme ([3, p. 93]):

$$Y_1(\theta, \phi) = A_0 \cos \theta - (A \cos \phi + B \sin \phi) \sin \theta.$$

Il est alors facile de montrer l'équivalence des premier, troisième et quatrième énoncés: on fait usage de l'indépendance linéaire des fonctions $1, \cos \phi, \sin \phi$ sur $[0, 2\pi]$. Le reste est clair.

Allons à (iii) et prenons l'hypothèse que Y_n a au moins un zéro horizontal $\theta_1 \neq \pi/2$. En posant $\theta = \theta_1$ dans l'équation (1), on déduit par l'indépendance linéaire des fonctions $1, \cos \phi, \sin \phi, \cos 2\phi, \sin 2\phi, \dots$ sur $[0, 2\pi]$ que

$$\begin{aligned} A_i P_n^i(\cos \theta_1) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \\ B_m P_n^m(\cos \theta_1) &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Donc θ_1 est un zéro d'au moins un P_n^i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Mais on ne peut avoir plus d'une telle fonction P_n^i , car autrement elles auraient un zéro commun, différent de $\pi/2$, ce qui n'est jamais le cas (voir [5]). La seule fonction P_n^i qu'il nous reste doit être P_n^{n-s} , d'où Y_n a la forme donnée à l'énoncé (iii) (c).

Avec le zéro $\theta_1 \neq \pi/2$ de P_n^{n-s} on voit qu'on a aussi un second zéro horizontal (de Y_n) $\theta_2 = \pi - \theta_1$, symétrique avec θ_1 autour de $\pi/2$. Le reste de la démonstration de (iii) est très simple.

On va enfin à (ii). Prenons d'abord l'hypothèse que Y_n a exactement un zéro horizontal $\pi/2$. Comme ci-dessus, on obtient les relations

$$\begin{aligned} A_i P_n^i(0) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \\ B_m P_n^m(0) &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Quand $n - i$ et $n - m$ sont pairs, $P_n^i(0) \neq 0$ et $P_n^m(0) \neq 0$, de sorte que les A_i et les B_m correspondants sont 0.

Les autres coefficients A et B (indices appropriés sous-entendus) ne peuvent pas tous être 0. S'ils sont tels qu'un seul terme demeure dans l'expression pour Y_n , ce doit être celui avec $m = n - 1$. Si deux termes ou plus nous restent, alors Y_n est telle qu'elle apparaît dans l'énoncé.

Réciproquement, l'énoncé (c) entraîne l'énoncé (b), dans un premier cas parce que P_n^{n-1} a exactement un zéro égal à $\pi/2$ et dans l'autre cas parce que les deux ou plus P_n^m présentes ont exactement un zéro commun, soit $\pi/2$ (voir [5]).

Enfin c'est grâce à (iii) que les énoncés (a) et (b) en (ii) sont équivalents. $\square$

3.2 COROLLAIRE. Le choix d'une fonction sphérique avec $s \geq 2$ zéros horizontaux est restreint aux fonctions $(A \cos d\phi + B \sin d\phi)P_{d+s}^d(\cos \theta)$, où $d \geq 0$ est un entier et A et B sont des constantes, $(A, B) \neq (0, 0)$. Il est équivalent d'écrire $n = d + s$, $n \geq s$, et $d = n - s$.

3.3 COROLLAIRE. Lorsque $d \geq 1$ dans le corollaire précédent, la fonction sphérique s'annule aussi sur exactement d grands cercles verticaux, c'est-à-dire qu'elle a aussi d zéros verticaux.

C'est une conséquence du lemme 2.3. Nos fonctions ici sont les harmoniques sphériques tessérales. Les divers choix sur A et B ne font que déplacer rigidement (rotation) les d grands cercles verticaux en diverses positions sur la sphère (voir encore lemme 2.3 ou [7, p. 123]).

3.4 COROLLAIRE. Le choix d'une fonction sphérique avec $s \geq 2$ zéros horizontaux qui ne s'annule sur aucun grand cercle vertical est restreint aux fonctions $AP_s(\cos \theta)$, où A est une constante $\neq 0$.

Dans ce cas, on a les harmoniques sphériques zonales ([7, p. 122]).

4. Sur les zéros verticaux: considérations générales.

4.1 PROPOSITION. Pour une fonction sphérique $Y_n(\theta, \phi)$, les quatres énoncés suivants sont équivalents:

- (i) Y_n a un zéro en $\phi = \phi_1$;
- (ii) la paire $\phi = \phi_1$ et $\phi = \phi_1 + \pi$ est un zéro vertical de Y_n ;
- (iii) $A_0 = 0$ et $\phi = \phi_1$ est un zéro de chaque terme $A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi$, $m = 1, 2, \dots, n$;
- (iv) $A_0 = 0$ et $\phi = \phi_1$ et $\phi = \phi_1 + \pi$ sont des zéros de chaque terme $A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi$, $m = 1, 2, \dots, n$.

DÉMONSTRATION: Montrons que (i) entraîne (iii). Comme $Y_n(\theta, \phi_1) = 0$ pour $0 \leq \theta \leq \pi$, alors pour $\theta = 0$ ou $\mu = 1$, on obtient $A_0 \cdot 1 = 0$, car $P_n(1) = 1$ et $P_n^m(1) = 0$ pour $m \neq 0$ (cf. [9, p. 65, p. 87]). On fait ensuite appel au lemme 2.1 pour compléter (iii). Le reste est clair. $\square$

4.2 COROLLAIRE. Soit $n \geq 2$. Les deux énoncés suivants sont équivalents:

- a) Y_n est une fonction sphérique ayant exactement un zéro horizontal et aucun zéro vertical;
- b) Y_n est de la deuxième forme décrite à la proposition 3.1 (ii) et satisfait cette condition additionnelle: $A_0 \neq 0$ ou les fonctions $A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi$ qui apparaissent n'ont pas de zéro commun.

DÉMONSTRATION: Ceci découle des propositions 3.1 (ii) et 4.1. (Les zéros des $A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi$ sont décrits par le lemme 2.3). $\square$

4.3 COROLLAIRE. Soit Y_n une fonction sphérique ayant $d \geq 1$ zéros verticaux. Alors $n \geq d$ et tous les termes d'indices $\leq d - 1$ sont absents.

DÉMONSTRATION: On fait appel à la proposition 4.1 et au lemme 2.3. $\square$

4.4 COROLLAIRE. Les seules fonctions sphériques Y_n qui ont exactement n zéros verticaux sont celles de la forme $[A \cos n\phi + B \sin n\phi]P_n^n$. Elles n'ont pas de zéros horizontaux.

DÉMONSTRATION: Voir corollaire 4.3. $\square$

Les fonctions du corollaire 4.4 sont les harmoniques sectorielles. Les divers choix sur A et B ne font que déplacer rigidement (rotation) les n grands cercles verticaux en diverses positions sur la sphère; voir lemme 2.3 ou [7, p. 123].

4.5 PROPOSITION.

- (i) Une fonction sphérique Y_n ayant $A_0 \neq 0$ ne possède pas de zéros verticaux.
- (ii) Le nombre de zéros verticaux d'une fonction sphérique Y_n ayant $A_0 = 0$ est soit 0, soit $d = (r, s, \dots, t) \geq 1$, pour les indices $m > 0$, $m = r, s, \dots, t$ effectivement présents dans l'expression (1).
- (iii) L'ensemble des zéros verticaux d'une Y_n ayant $A_0 = 0$ est

$$S = \pi \left[\bigcap_m (\alpha_m + F_m) \right] \cup \pi \left[1 + \bigcap_m (\alpha_m + F_m) \right],$$

ce qui est soit un ensemble vide, soit un ensemble comprenant d paires, chacune formée de deux éléments qui diffèrent par π , où α_m est le nombre réel $0 \leq \alpha_m < 1/m$ qu'on peut rattacher à $A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi$ selon le mode prescrit au lemme 2.3 (iv).

- (iv) Dans les deuxièmes cas cités ci-dessus, l'ensemble des zéros verticaux de Y_n peut s'écrire $\phi_1 + \pi[F_d \cup (1 + F_d)]$, où ϕ_1 est un zéro quelconque dans le sens de la proposition 4.1.

DÉMONSTRATION: Pour (i), voir proposition 4.1. Lorsque $A_0 = 0$, Y_n est une somme de termes d'indices $m > 0$, disons $m = r, s, \dots, t$. Selon la proposition 4.1 et le lemme 2.3, l'ensemble S des zéros verticaux de Y_n est contenu dans une intersection, ce qui peut s'écrire

$$S \subseteq \pi \left[\bigcap_m (\alpha_m + F_m) \right] \cup \pi \left[1 + \bigcap_m (\alpha_m + F_m) \right].$$

Une intersection vide correspond aux premiers cas mentionnés en (ii) et (iii). Soit donc l'intersection non vide. Il est alors clair que les deux ensembles ci-dessus sont égaux.

Si on considère un zéro vertical ϕ_1 , $\phi_1 + \pi$, on peut écrire (lemme 2.2)

$$A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi = C_m \sin m(\phi - \phi_1),$$

pour nos indices $m = r, s, \dots, t$, d'où selon les lemmes 2.3 et 2.4,

$$\begin{aligned} S &= \bigcap_m \{ \phi_1 + \pi [F_m \cup (1 + F_m)] \} \\ &= \phi_1 + \pi \left\{ \bigcap_m [F_m \cup (1 + F_m)] \right\} \\ &= \phi_1 + \pi [F_d \cup (1 + F_d)], \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. $\square$

Les deux dernières sections ci-dessous servent à préciser ce que sont les zéros verticaux et les formes possibles de Y_n .

5. Sur les zéros verticaux: terme d'indice d présent.

5.1 PROPOSITION. Soient $d \geq 1$ un entier et Y_n une fonction sphérique ayant d zéros verticaux et dans laquelle le terme d'indice d est non nul. Alors les sept énoncés suivants sont vrais:

- a) les zéros verticaux de Y_n sont précisément ceux du terme d'indice d ;
- b) lorsque Y_n ne comprend que le terme d'indice d , alors Y_n a exactement $s \geq 0$ zéros horizontaux si et seulement si $n = d + s$ et $Y_n = Y_{d+s} = (A \cos d\phi + B \sin d\phi)P_{d+s}^d$;
- c) pour tout terme d'indice r ($> d$) qui apparaît, on a $d \mid r$;
- d) en général, Y_n est telle que donnée si et seulement si elle a l'une des trois formes suivantes, où certains coefficients d'indices $> d$ peuvent être 0:
 - (i) $A_d \neq 0, B_d = 0$ et $Y_n = A_d \cos d\phi P_n^d + B_{2d} \sin 2d\phi P_n^{2d} + A_{3d} \cos 3d\phi P_n^{3d} + B_{4d} \sin 4d\phi P_n^{4d} + \dots$, où les multiples entiers q de d satisfont $qd \leq n$;
 - (ii) $A_d = 0, B_d \neq 0$ et $Y_n = \sum B_{qd} \sin qd\phi P_n^{qd}$, la somme étant sous-entendue pour $q = 1, 2, \dots$ et $qd \leq n$;
 - (iii) $A_d \neq 0, B_d \neq 0$ et Y_n est une somme comprenant le terme $(A_d \cos d\phi + B_d \sin d\phi)P_n^d$ d'indice d et des termes d'indices $r = qd$ ($q = 2, 3, \dots$) où $qd \leq n$; le terme d'indice qd est $A_{qd} \cos qd\phi P_n^{qd}$ ou $B_{qd} [\tan(q \arctan A_d/B_d) \cos qd\phi + \sin qd\phi] P_n^{qd}$ selon que $\arctan A_d/B_d$ est ou n'est pas un multiple impair (positif ou négatif) de $\pi/2q$, lequel multiple impair, s'il se présente, est ni l'un ni l'autre des angles $\pm\pi/2$; à noter que la deuxième forme comprend le cas $B_{qd} \sin qd\phi P_n^{qd}$;
- e) lorsque Y_n comprend plus de termes que celui d'indice d , alors Y_n ne peut pas avoir $s \geq 2$ zéros horizontaux;
- f) lorsque Y_n comprend plus de termes que celui d'indice d , alors ($n > d \geq 1$ et) Y_n a exactement un zéro horizontal, si et seulement si, Y_n a exactement un zéro horizontal à l'équateur, si et seulement si, les entiers $n - d$ et $n - r$, pour tout indice r présent, sont tous impairs;
- g) quand Y_n comprend plus de termes que celui d'indice d , alors ($n > d \geq 1$ et) Y_n ne possède pas de zéro horizontal si et seulement si au moins un des entiers $n - d$ ou $n - r$ (chaque indice r présent étant compris ici) est pair.

DÉMONSTRATION:

- a) Cela vient du corollaire 4.3 et de la proposition 4.1.
- b) L'énoncé est évident.
- c) Voir proposition 4.5 (ii).
- d) Discutons de la partie "nécessité", en commençant par $A_d \neq 0, B_d = 0$. Les d zéros verticaux de Y_n sont alors les d paires de zéros de $\cos d\phi$ (selon lemme 2.3 et proposition 4.1) et ils sont aussi des zéros de tout terme présent d'indice r . De (c), r a la forme qd et en liant ceci au fait que $\pi/2d$ est un zéro de $A_r \cos r\phi + B_r \sin r\phi$, on voit que $A_r = 0$ quand q est pair et que $B_r = 0$ pour q impair. On est donc arrivé à la première forme pour Y_n .
 Dans le cas $A_d = 0, B_d \neq 0$, une démarche semblable montre, avec $\phi = 0$, que $A_r = 0$. C'est la deuxième forme de Y_n .
 Pour $A_d \neq 0, B_d \neq 0$, on est amené, avec la valeur $\phi = (-1/d) \arctan(A_d/B_d)$, à l'équation $A_{qd} \cos(q \arctan A_d/B_d) - B_{qd} \sin(q \arctan A_d/B_d) = 0$. Le reste s'ensuit.
 La partie "suffisance" vient directement des lemmes 2.3 à 2.5 et de calculs directs dans le cas (d) (iii).
- e) Cela découle du corollaire 3.2.
- f) Cela découle de la proposition 3.1 (ii).
- g) Cela vient de (e) et (f) ci-dessus. $\square$

6. Sur les zéros verticaux: terme d'indice d absent.

6.1 PROPOSITION. Soient d et n des entiers tels que $1 \leq d < n$. Alors Y_n est une fonction sphérique ayant d zéros verticaux et dont le terme d'indice d est absent si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- Y_n est une fonction sphérique comprenant au moins deux termes, disons d'indices $r < s < \dots < t$, où $d < r$ et $t \leq n$;
- pour nos indices $m = r, s, \dots, t$ l'intersection $\bigcap_m (\alpha_m + F_m)$ possède d éléments, où α_m désigne le nombre réel $0 \leq \alpha_m < 1/m$ qu'on peut rattacher à $A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi$ selon le mode prescrit au lemme 2.3 (iv).

Et dans de telles situations équivalentes, on a:

- $d = (r, s, \dots, t)$;
- l'intersection ci-dessus est calculable ou constructible à l'aide du lemme 2.5;
- l'ensemble des zéros verticaux est donné par la proposition 4.5.

DÉMONSTRATION: Discutons de la nécessité. On ne peut pas avoir un seul terme d'indice plus grand que d (proposition 4.1). L'énoncé (b) vient de la proposition 4.5. Le reste est clair. $\square$

6.2. COROLLAIRE. Soit Y_n comme dans la proposition 6.1. Alors:

- Y_n ne peut pas avoir $s \geq 2$ zéros horizontaux;
- Y_n a exactement un zéro horizontal, si et seulement si Y_n a exactement un zéro horizontal à l'équateur, si et seulement si, les entiers $n - r, n - s, \dots, n - t$ sont tous impairs;
- Y_n n'a pas de zéro horizontal si et seulement si au moins un des entiers $n - r, n - s, \dots, n - t$ est pair.

DÉMONSTRATION: Voir corollaire 3.2 et proposition 3.1 (ii). $\square$

Pour les fonctions sphériques de cette section-ci, la forme du premier terme présent n'impose pas en général une forme particulière aux autres termes (contrairement à ce qu'on avait à la proposition 5.1 (d)). Voici des exemples basés sur le lemme 2.5, où on liste la partie $A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi$ des deux premiers termes d'indices $m = r$ et $m = s$.

Indice r	Indice s
$\sin 8\phi$	$\sin 10\phi$
$\sin 8\phi$	$\cos 10\phi$
$\sin 8\phi$	$\cos 10\phi - \sin 10\phi$
$\cos 3\phi$	$\sin 12\phi$
$\cos 3\phi$	$\cos 9\phi$
$\cos 4\phi$	$\cos 10\phi - \sin 10\phi$
$\cos 4\phi - \sin 4\phi$	$\sin 16\phi$
$\cos 4\phi - \sin 4\phi$	$\cos 8\phi$
$\cos \phi - \sin \phi$	$\cos 5\phi - \sin 5\phi$

Notons que dans le cas où $A_r \neq 0$ et $B_r \neq 0$, les possibilités pour A_s et B_s sont semblables à celles qu'on retrouve à la proposition 5.1 (d) (iii).

BIBLIOGRAPHIE

1. Goodwin, B.C. et Lacroix, N.H.J., *A Further Study of the Holoblastic Cleavage Field*, J. Theoret. Biol. **109** (1984), 41-58.
2. Goodwin, B.C. et Trainor, L.E.H., *A Field Description of the Cleavage Process in Embryogenesis*, J. Theoret. Biol. **85** (1980), 757-770.
3. Hobson, E.W., "The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics," Chelsea, New York, 1955.
4. Koshlyakov, N.S., Smirnov, M.M. et Gliner, E.B., "Differential Equations of Mathematical Physics," North-Holland, Amsterdam, 1964.
5. Lacroix, N.H.J., *On Common Zeros of Legendre's Associated Functions*, Math. Comp. **43** (1984), 243-245.
6. Lense, J., "Kugelfunktionen," Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1950.
7. MacRobert, T.M., "Spherical Harmonics," Pergamon, New York, 1967.
8. Niven, I. et Zuckerman, H.S., "An Introduction to the Theory of Numbers," Wiley, New York, 1966.
9. Sneddon, I.N., "Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry," 3^e édition, Longman, Londres et New York, 1980.

N.H.J. Lacroix
Département de mathématiques et de statistique
Université Laval
Québec, Canada G1K 7P4