

CALCUL COMBINATOIRE DU NOMBRE D'ENDOFONCTIONS ET D'ARBORESCENCES LAISSÉES FIXES PAR UNE PERMUTATION.

IVAN CONSTANTINEAU ET JACQUES LABELLE

RÉSUMÉ. Soit β une permutation de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ de type $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ (i.e. β possède β_i cycles de longueur i ; $\sum_i i\beta_i = n$). Nous calculons, en fonction des β_i et de façon bijective, le nombre d'endofonctions et d'arborescences (i.e. contractions) sur $[n]$ laissées fixes par l'action de β (par conjugaison); i.e. les cardinalités: $|\{f \mid f: [n] \rightarrow [n] \text{ et } f = \beta f \beta^{-1}\}|$ et $|\{A \mid A \text{ est une arborescence sur } [n] \text{ et } A = \beta A \beta^{-1}\}|$.

ABSTRACT. Let β be a given permutation of $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ of type $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ (i.e. β has β_i cycles of length i ; $\sum_i i\beta_i = n$). We compute, in terms of the β_i 's and bijectively, the number of endofunctions and rooted trees (i.e. contractions) on $[n]$ kept fixed by the action of β (by conjugation); i.e. the cardinalities of the sets: $\{f \mid f: [n] \rightarrow [n] \text{ and } f = \beta f \beta^{-1}\}$ and $\{A \mid A \text{ a contraction on } [n] \text{ and } A = \beta A \beta^{-1}\}$.

0. Introduction. Soit A une espèce (voir [J], [Lj], [Lg1], [B1] ou [Y1, 2]) et β une permutation de l'ensemble fini U , nous noterons $\text{Fix}_A(\beta)$ l'ensemble des A -structures sur U laissées fixes par β :

$$\text{Fix}_A(\beta) = \{a \in A[U] \mid A[\beta](a) = a\}$$

Les cardinalités de ces ensembles sont les coefficients apparaissant dans la série indicatrice de cycles (voir [J], [Lg2, 3], [B2], [D] ou [Le]) de l'espèce A .

Pour les espèces *End* et *Ars*, des endofonctions et des arborescences respectivement, Gilbert Labelle [Lg2] a trouvé analytiquement les expressions suivantes:

$$|\text{Fix}_{\text{End}}(\beta)| = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k}. \quad (*)$$

$$|\text{Fix}_{\text{Ars}}(\beta)| = \beta_1^{\beta_1-1} \prod_{k=2}^n \left[\left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k} - k\beta_k \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k-1} \right] \quad (**)$$

Le problème de trouver une interprétation combinatoire pour (*) et surtout (**) a été posé par Gilbert Labelle à la séance de problèmes du Colloque de Combinatoire Énumérative, UQAM (1985) (voir [LL, page 383]). Quelques jours plus tard, Doron Zeilberger [Z] a donné une démonstration de (**) en utilisant le "Matrix-tree theorem".

Le but de cet article est d'interpréter combinatoirement ces expressions et d'en fournir une démonstration bijective. En plus de connaître la cardinalité des ensembles $\text{Fix}_{\text{End}}(\beta)$ et $\text{Fix}_{\text{Ars}}(\beta)$, nous pourrions ainsi en engendrer algorithmiquement les éléments.

1. Le calcul de $\text{Fix}_{\text{End}}(\beta)$. Pour la suite de l'article, soit β une permutation de $[n]$ de type $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, c'est-à-dire que β est constituée, pour tout i de $[n]$, de β_i cycles de longueur i , et soit $C(=\mathcal{C}(\beta))$ l'ensemble des cycles de β .

Reçu le 18 mai 1988 et, sous forme révisée, le 12 juillet 1988.

Travail fait dans le cadre des subventions: CRSNG A5660 (Canada) et FCAR EQ 1608 (Québec).

©Association mathématique du Québec

DÉFINITION 1. Une β -endofonction sur $[n]$ est la donnée d'un couple (δ, Δ) de fonctions, $\delta: C \rightarrow C$ et $\Delta: C \rightarrow [n]$, telles que : $\forall c \in C, |\delta(c)|$ divise $|c|$ et $\Delta(c) \in \delta(c)$.

On désignera par $\beta\text{-End}[n]$ l'ensemble des β -endofonctions sur $[n]$.

THÉORÈME 1. Il existe une bijection Γ entre les ensembles $\text{Fix}_{\text{End}}(\beta)$ et $\beta\text{-End}[n]$.

DÉMONSTRATION: Soit $\phi \in \text{End}[n]$ telle que $\phi = \beta\phi\beta^{-1}$. On construit alors $\Gamma(\phi) = (\bar{\phi}, \phi_1)$ de la manière suivante: soit $x \in c \in C$ et $\phi(x) \in d \in C$. Comme, pour tout $i \in \mathbb{N}, \phi\beta^i(x) = \beta^i\phi(x)$, on a $\phi(c) = d$. Soit $|c| = k$ et $|d| = j$, on a $\beta^k\phi(x) = \phi\beta^k(x) = \phi(x)$, de sorte que l'ordre selon β de $\phi(x)$, soit j , divise k . La fonction $\bar{\phi}: C \rightarrow C$ est définie en posant $\bar{\phi}(c) := d$ (en d'autres mots, pour tout c dans C , $\bar{\phi}(c)$ est l'image (qui est bien un cycle) du cycle c par ϕ ou encore $\bar{\phi}(c) \ni \phi(\min(c))$). On définit ensuite $\phi_1: C \rightarrow [n]$ par $\phi_1(c) := \phi(\min(c))$. Il est clair que la fonction Γ est bien définie. Réciproquement, si $(\delta, \Delta) \in \beta\text{-End}[n]$ est donné alors on lui associe une endofonction $\phi (= \phi_{(\delta, \Delta)})$ en posant, pour tout $c \in C$ et tout s dans $\mathbb{N}$, $\phi(\beta^s(\min(c))) := \beta^s(\Delta(c))$. Puisque $|\delta(c)|$ divise $|c|$, l'endofonction ϕ est bien définie. Comme $\phi(\beta^s(\min(c))) = \beta^s(\phi(\min(c)))$, on a $\phi\beta = \beta\phi$. On vient d'obtenir Γ^{-1} . $\square$

PROPOSITION 1. On a:

$$|\beta\text{-End}[n]| = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j|k} j\beta_j \right)^{\beta_k}.$$

DÉMONSTRATION: Supposons $c \in C, |c| = k, (1 \leq k \leq n)$. L'image $\delta(c) \in C$ peut être choisie de façon arbitraire dans l'ensemble $D_c = \{d \in C \mid |d| \text{ divise } |c|\}$; une fois cette δ -image déterminée, disons $\delta(c) = w \in D_c, |w| = j$, on peut ensuite choisir, encore de façon arbitraire, $\Delta(c) \in w$. Comme on dispose de β_j -cycles de longueur j , il y a donc $\sum_{j|k} j\beta_j$ façons de définir le couple $(\delta(c), \Delta(c))$, lorsque $|c| = k$. Puisque, pour tout $k, 1 \leq k \leq n$, il y a β_k cycles de longueur k à traiter, tous indépendamment les uns des autres, de cette manière pour définir (δ, Δ) entièrement, on obtient bien la formule de la proposition. $\square$

Le théorème 1 et la proposition 1 démontrent la formule (*) bijectivement.

REMARQUE. Par des arguments semblables à ceux des démonstrations précédentes et en utilisant ensuite le "Matrix-tree theorem", Lovász (voir [Lo]; pages 229-231) trouve le nombre d'arbres sur $[n]$, où n est impair, laissés fixes par β .

2. Le calcul de $\text{Fix}_{\text{Ars}}(\beta)$. Une endofonction arborescente (on dit aussi *contraction*) est une endofonction n'admettant qu'un seul point périodique (qui est donc un point fixe). Si on choisit ce point comme racine et qu'on remplace les flèches (dans le graphe sagital de ϕ) par des arêtes, on obtient une arborescence. Inversement, en orientant les arêtes d'une arborescence vers sa racine, où on ajoute une boucle, on obtient une endofonction arborescente. On peut donc considérer l'espèce Ars , des arborescences, comme une sous-espèce de End ; ainsi $\text{Fix}_{\text{Ars}}(\beta) \subseteq \text{Fix}_{\text{End}}(\beta)$.

DÉFINITION 2. Une β -endofonction (δ, Δ) sur $[n]$ est dite *arborescente* si l'endofonction δ est elle-même arborescente. Une β -arborescence sur $[n]$ est une β -endofonction arborescente (δ, Δ) sur $[n]$ où la racine $\rho \in C$ de δ est telle que $|\rho| = 1$.

On désignera par $\beta\text{-Ars}[n]$ l'ensemble des β -arborescences sur $[n]$.

THÉOREME 2. *Il existe une bijection entre les ensembles $\text{Fix}_{Ars}(\beta)$ et $\beta\text{-Ars}[n]$.*

DÉMONSTRATION: Supposons donnée A , une arborescence sur $[n]$ telle que $A = \beta A \beta^{-1}$. A étant une endofonction (arborescente), on peut, par le théorème 1, lui associer une β -endofonction sur $[n]$, $\Gamma(A) = (\bar{A}, A|_1)$, qui elle-même détermine une endofonction $\bar{A}$ sur C . Il est aisé de vérifier (on peut procéder par contradiction) que $\bar{A}$ est arborescente. D'autre part, remarquons que comme A est telle que $A = \beta A \beta^{-1}$, on a $\beta_1 \geq 1$. En effet, si $r \in [n]$ est racine de A alors $A(r) = r$ et r est le seul élément de $[n]$ ayant cette propriété. Comme $A\beta(r) = \beta A(r) = \beta(r)$, on a $\beta(r) = r$ et $\beta_1 \geq 1$. Soit ρ le 1-cycle de β contenant r , i.e. ρ est la boucle en r . On a que r est la racine de l'endofonction arborescente $\bar{A}$. Réciproquement, donnons-nous une β -arborescence (δ, Δ) sur $[n]$. Associons lui $A := \Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$, où Γ est la bijection du théorème 1. Il est aisé (toujours par contradiction) de montrer que A est arborescente. $\square$

DÉFINITION 3. Pour tout $k \in [n]$, soit $C\langle k \rangle$ l'ensemble des cycles de longueur k de β . Une β -endofonction de niveau k sur $[n]$ est un couple (δ_k, Δ_k) formé de deux fonctions, $\delta_k: C\langle k \rangle \rightarrow C$ et $\Delta_k: C\langle k \rangle \rightarrow [n]$, telles que : $\forall c \in C\langle k \rangle$, $|\delta_k(c)|$ divise $|c|$ et $\Delta_k(c) \in \delta_k(c)$. L'ensemble des β -endofonctions de niveau k sera noté $\beta\text{-End}_k[n]$. De plus, on dira que (δ_k, Δ_k) boucle si l'endofonction δ_k admet au moins un cycle. Notons que les éléments d'un tel cycle sont eux-même des cycles (en fait tous dans $C\langle k \rangle$); pour éviter la confusion, on parlera dans ce cas d'un cycle*.

PROPOSITION 2. *Le nombre de β -endofonctions de niveau k qui bouclent est donné par:*

$$k \cdot \beta_k \cdot \left(\sum_{d|k} d \beta_d \right)^{\beta_k - 1}.$$

DÉMONSTRATION: Convenons, lorsque $(\delta_k, \Delta_k) \in \beta\text{-End}_k[n]$ est définie, de nommer tout cycle $c \in C\langle k \rangle$ tel que $\delta_k(c) \in C\langle k \rangle$ un cycle rigide. Autrement, c sera dit flexible ($\delta_k(c) \notin C\langle k \rangle$). Ainsi la donnée d'une β -endofonction de niveau k détermine une partition de $C\langle k \rangle$ en deux classes (possiblement vides): celle des cycles rigides, notée $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k)$, et l'autre, notée $\mathcal{F}(\delta_k, \Delta_k)$, des cycles flexibles. Remarquons maintenant qu'une condition nécessaire pour qu'une β -endofonction de niveau k , (δ_k, Δ_k) , boucle, est que $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k) \neq \emptyset$. Sinon $\delta_k(C\langle k \rangle)$ est un ensemble de cycles tous de longueur strictement inférieure à k et δ_k ne peut pas avoir de cycle*. Ce dernier raisonnement entraîne, par ailleurs, qu'un cycle flexible ne peut jamais faire partie d'un cycle* de δ_k . Fixons r , $1 \leq r \leq \beta_k$. Choisissons R un ensemble constitué de r cycles (arbitraires) de $C\langle k \rangle$. On va chercher à dénombrer les (δ_k, Δ_k) de $\beta\text{-End}_k[n]$ qui bouclent, et qui sont telles que $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k) = R$ et $\mathcal{F}(\delta_k, \Delta_k) = C\langle k \rangle \setminus R = F$. Pour ce faire on calcule le nombre de manières possibles de définir les fonctions δ_k et Δ_k d'abord sur R (en a.), puis sur F (en b.). Il est clair qu'en multipliant ces deux résultats on obtient la solution au problème.

- a. Si on veut que les r cycles de R soient rigides, on doit définir la δ_k -image de chacun d'eux dans $C\langle k \rangle$. Il y a donc, a priori, $(\beta_k)^r$ manières de définir δ_k sur R . Mais de ces dernières, on ne veut dénombrer que l'ensemble de celles qui mènent à au moins un cycle* dans δ_k . Pour trouver ce nombre il suffit de soustraire de $(\beta_k)^r$ les choix qui ne donnent aucun cycle* à δ_k (LaPalisse!). Ce dernier nombre est facile à calculer, grâce à l'observation suivante: le nombre de choix qui ne donnent aucun cycle* à δ_k est le nombre de forêts de $(\beta_k - r)$ arborescences qu'on peut faire avec les β_k cycles ($C\langle k \rangle$ devient le support de ces arborescences) une fois les $(\beta_k - r)$

racines choisies comme étant les $(\beta_k - r)$ cycles flexibles. On sait (voir, par exemple, [Lg1]) que le nombre de forêts de $(\beta_k - r)$ arborescences sur un ensemble de β_k éléments où les racines ont déjà été déterminées est :

$$(\beta_k - r) \frac{\beta_k^r}{\beta_k} = \beta_k^r - r\beta_k^{r-1}.$$

Ainsi, le nombre de façons de définir δ_k sur R de manière à avoir au moins un cycle* sera:

$$\beta_k^r - (\beta_k^r - r\beta_k^{r-1}) = r\beta_k^{r-1}.$$

Pour terminer ce premier calcul, il reste seulement à déterminer, pour tout c dans R , $\Delta_k(c)$ lorsque $\delta_k(c)$ a été choisi. Mais, pour tout c , $|\delta_k(c)| = k$ et $\Delta_k(c)$ peut être arbitrairement choisi dans $\delta_k(c)$. Bref, on a clairement k^r manières de définir Δ quand δ est déterminée. Il y a donc $k^r r (\beta_k)^{r-1}$ manières de définir les β -endofonctions (δ_k, Δ_k) de $\beta\text{-End}_k[n]$ sur R , telles que $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k) = R$ et qu'elles bouclent.

- b. En se référant à la proposition 1, on voit facilement que le nombre cherché est cette fois

$$\left(\sum_{\substack{d|k \\ d \neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k - r}$$

la seule distinction apparaissant dans le fait qu'étant voulus flexibles, les $(\beta_k - r)$ cycles ne peuvent avoir pour δ -image que des cycles de longueur divisant strictement k .

De là, lorsqu'on a fixé les ensembles R et F , $|R| = r$, on obtient l'expression suivante pour le nombre de β -endofonctions (δ_k, Δ_k) de $\beta\text{-End}_k[n]$ qui bouclent, et qui sont telles que $\mathcal{F}(\delta_k, \Delta_k) = F$ et $\mathcal{R}(\delta_k, \Delta_k) = R$.

$$\left(\sum_{\substack{d|k \\ d \neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k - r} k^r r (\beta_k)^{r-1}.$$

Finalement, R étant un sous-ensemble arbitraire (de cardinalité non-nulle) de $C\langle k \rangle$, on aura au total

$$\sum_{r=1}^{\beta_k} \binom{\beta_k}{r} \left(\sum_{\substack{d|k \\ d \neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k - r} k^r r (\beta_k)^{r-1}$$

β -endofonctions (δ_k, Δ_k) de $\beta\text{-End}_k[n]$ qui bouclent. On a alors:

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=1}^{\beta_k} \binom{\beta_k}{r} \left(\sum_{\substack{d|k \\ d \neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k-r} k^r r (\beta_k)^{r-1} &= \sum_{r=1}^{\beta_k} \frac{(\beta_k-1)!}{(r-1)!(\beta_k-r)!} \left(\sum_{\substack{d|k \\ d \neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k-r} k^r (\beta_k)^r \\
 &= \sum_{t=0}^{\beta_k-1} \binom{\beta_k-1}{t} \left(\sum_{\substack{d|k \\ d \neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k-t-1} k^{t+1} (\beta_k)^{t+1} \\
 &= \left(k\beta_k + \sum_{\substack{d|k \\ d \neq k}} d\beta_d \right)^{\beta_k-1} k\beta_k \\
 &= \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k-1} k\beta_k. \quad \square
 \end{aligned}$$

Il est clair que toute β -endofonction (δ, Δ) sur $[n]$ admet une décomposition unique

$$(\delta, \Delta) = \sum_{k=1}^n (\delta_k, \Delta_k)$$

en β -endofonctions de niveau k sur $[n]$, non triviales pour tout k où $\beta_k > 0$. On a aussi qu'une β -endofonction sur $[n]$ est une β -arborescence ssi, pour tout $k \geq 2$ où $\beta_k > 0$, (δ_k, Δ_k) ne boucle pas et que (δ_1, Δ_1) s'identifie à une arborescence sur β_1 points (qui boucle, elle, à la racine). On sait qu'il y a $\beta_1^{\beta_1-1}$ arborescences possibles avec ces β_1 cycles de longueur 1 (nous avons déjà remarqué que $\beta_1 \geq 1$). De plus, un peu comme l'observation dégagée plus haut, le nombre total β -endofonctions de niveau k qui ne bouclent pas est évidemment le nombre total de β -endofonctions de niveau k moins le nombre total de β -endofonctions de niveau k qui bouclent. Le nombre total β -endofonctions de niveau k est donné par la proposition 1 et le nombre de celles qui bouclent vient d'être calculé. Finalement, une β -arborescence sera déterminée dès que, pour tout $k \geq 2$ où $\beta_k \geq 1$, sera déterminée une β -endofonction de niveau k ne bouclant pas, et que sera donnée une arborescence sur les β_1 points fixes de β .

Ces choix étant indépendants les uns des autres on vient de démontrer:

PROPOSITION 3. *Le nombre de β -arborescences sur $[n]$ est donné par la formule suivante:*

$$|\beta\text{-Ars}[n]| = \begin{cases} \beta_1^{\beta_1-1} \prod_{k=2}^n \left\{ \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k} - k\beta_k \left(\sum_{d|k} d\beta_d \right)^{\beta_k-1} \right\} & \text{si } \beta_1 \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème 2 et la proposition 3 démontrent la formule (**) bijectivement.

REMARQUE. Pierre Leroux [Le] montre comment obtenir la série indicatrice de cycles de l'espèce A (des arbres) à partir de celle des arborescences (dont les coefficients sont donnés par (**)), grâce à l'équation combinatoire:

$$\text{Ars} + E_2 \circ \text{Ars} = A + (\text{Ars})^2,$$

où E_2 désigne l'espèce des ensembles de cardinalité deux. Il est donc possible de déterminer de façon bijective le nombre d'arbres laissés fixes par l'action d'une permutation donnée; ceci est fait dans [CL], où plusieurs autres espèces (d'endofonctions et autres) sont également traitées.

BIBLIOGRAPHIE

- [B1] F. Bergeron, "Une systématique de la combinatoire énumérative," Thèse de Ph.D., UQAM et Université de Montréal, 1986.
- [B2] F. Bergeron, *Une combinatoire du pléthysme*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **46** (1987), 291-305.
- [C] I. Constantineau, "Théorie des espèces et endofonctions," Mémoire de M.Sc., UQAM, 1987.
- [CL] I. Constantineau et J. Labelle, *On Combinatorial Structures Kept Fixed by the Action of a Given Permutation*, Studies in Applied Mathematics (à paraître)..
- [D] H. Décoste, "Séries indicatrices d'espèces pondérées et q -analogues," Thèse de Ph.D., UQAM et Université de Montréal (à paraître).
- [J] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. **42** (1981), 1-82, Acad. Press.
- [Lg1] G. Labelle, *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange*, Adv. in Math. **42** (1981), 217-247, Acad. Press.
- [Lg2] G. Labelle, *Some New Computational Methods in the Theory of Species*, in "Combinatoire Énumérative, Montréal, Québec 1985, Proceedings," G. Labelle et P. Leroux, eds. Lecture Notes in Mathematics no. 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 192-209.
- [Lg3] G. Labelle, "The computation of the cycle index series of some combinatorial species," Notes: Combinatorial Year, M.I.T., Nov. 1984.
- [LL] G. Labelle et P. Leroux, "Combinatoire numérative, Montréal, Québec 1985, Proceedings," G. Labelle et P. Leroux, éditeurs. Lecture Notes in Mathematics no. 1234, Springer-Verlag, 1986.
- [Lj] J. Labelle, *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Ann. Sc. Math. du Québec **7** (1983), 59-94.
- [LY1] J. Labelle et Y.N. Yeh, *The Relation between Burnside Rings and Combinatorial Species*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **50** (1989), 269-284.
- [LY2] J. Labelle et Y.N. Yeh, *Several Variables Combinatorial Species*, (soumis).
- [Le] P. Leroux, *Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen*, Bayreuther mathematische Schriften **26** (1988), 1-36.
- [Lo] L. Lovász, "Combinatorial Problems and Exercises," North-Holland, 1979.
- [Y1] Y.N. Yeh, "On the Combinatorial Species of Joyal," Ph.D. thesis, State University of New-York at Buffalo, 1985.
- [Y2] Y.N. Yeh, *The Calculus of Virtual Species and K-Species*, in "Combinatoire Énumérative," Montréal, Québec 1985, Proceedings G. Labelle et P. Leroux, eds. Lecture Notes in Mathematics no. 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 351-369.
- [Z] D. Zeilberger, communication personnelle, (juin 1985).

I. Constantineau et J. Labelle
 Département de mathématiques et d'informatique
 Université du Québec à Montréal
 Case postale 8888, Succ. A, Montréal
 Québec H3C 3P8, Canada