

UNE APPROCHE VARIATIONNELLE DES ORBITES QUASI-PÉRIODIQUES DES SYSTÈMES HAMILTONIENS

JOËL BLOT

RÉSUMÉ. Après la redémonstration de résultats sur les tores (topologiques) invariants et les orbites quasi-périodiques d'une manière fonctionnelle nouvelle, nous énonçons des rudiments de Calcul des Variations en Moyenne afin de caractériser les orbites quasi-périodiques des systèmes hamiltoniens comme points critiques de fonctionnelles définies sur des espaces de Banach. Enfin, nous démontrons le Principe de Percival et examinons très brièvement les liens avec notre approche variationnelle.

ABSTRACT. After giving new functional analytic proofs of results on (topological) invariant tori and quasi-periodic orbits, we state some elements of the Calculus of Variations in Mean in order to characterize the quasi-periodic orbits of the Hamiltonian systems as critical points of certain functional on Banach spaces. Finally, we prove Percival's Principle and very quickly we examine the relations with our variational approach.

1. Tores et fonctions presque-périodiques. Une fonction $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^d$ sera dite *presque-périodique* si chacune de ses composantes est presque-périodique au sens de Bohr; nous noterons $AP(\mathbb{C}^d)$ l'ensemble de ces fonctions. (AP pour "almost periodic"). La théorie des fonctions scalaires presque-périodiques au sens de Bohr est exposée dans [38], [12], [14], [10]. Quitte à travailler composante par composante de très nombreuses propriétés s'étendent au cas des fonctions presque-périodiques à valeurs vectorielles, en particulier, toute $x \in AP(\mathbb{C}^d)$ possède une moyenne temporelle

$$M\{x\} = M\{x(t)\}_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \in \mathbb{C}^d$$

Sur le modèle de la représentation des fonctions périodiques par les séries de Fourier, les éléments de $AP(\mathbb{C}^d)$ sont représentables par des familles sommables d'exponentielles complexes dotées de coefficients vectoriels, précisément, pour $x \in AP(\mathbb{C}^d)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit le coefficient (vectoriel) de Fourier-Bohr

$$a(x, \lambda) = M\{x(t)e^{-i\lambda t}\}_t \in \mathbb{C}^d$$

et l'on écrit

$$x(t) \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a(x, \lambda) e^{i\lambda t}.$$

En fait $\mathcal{F}$ désignant l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ est dirigé par l'inclusion (on dit encore filtrant croissant) et ainsi $(\sum_{\lambda \in F} a(x, \lambda) e^{i\lambda(\cdot)})_{F \in \mathcal{F}}$ est une suite généralisée (traduction du terme anglais "net", cf. e.g. [43]) de fonctions qui converge toujours en moyenne quadratique vers x

$$\lim_{F \in \mathcal{F}} M \left\{ \left| x(t) - \sum_{\lambda \in F} a(x, \lambda) e^{i\lambda(\cdot)} \right|^2 \right\}_t = 0.$$

On a en outre l'égalité de Parseval

$$M \{ |x(t)|^2 \}_t = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |a(x, \lambda)|^2.$$

- $AP(\mathbb{R}^d) = \{x \in AP(\mathbb{C}^d) \mid \forall t \in \mathbb{R} \ x(t) \in \mathbb{R}^d\}$ les éléments de $AP(\mathbb{R}^d)$ sont caractérisés parmi ceux de $AP(\mathbb{C}^d)$ par: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ a(x, -\lambda) = \overline{a(x, \lambda)}$.

Dorénavant $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Pour $x \in AP(\mathbb{K}^d)$, $\Lambda(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid a(x, \lambda) \neq 0\}$, l'égalité de Parseval qui assure la sommabilité de la famille $\left(|a(x, \lambda)|^2\right)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ induit ([19, p. 220]) que $\Lambda(x)$ est au plus dénombrable. Nous introduisons aussi $\text{Mod}(x) = \{\sum_{\nu=1}^n k_\nu \lambda_\nu \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_\nu \in \Lambda(x)\}$ appelé le *module des fréquences* de x , c'est le $\mathbb{Z}$ -module (ou le groupe abélien) engendré par $\Lambda(x)$.
- Suivant Bohl et Eslangon (cf. [38, p. 47]) lorsque $\text{Mod}(x)$ est un module libre de type fini on dit que x est *quasi-périodique*. Signalons que dans [56] ce terme est réservé à des fonctions qui vérifient en outre certaines conditions de décroissance exponentielle des coefficients de Fourier-Bohr; nous n'imposons pas ici de telles conditions supplémentaires.

Lorsque des nombres réels $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j$ sont linéairement indépendants par rapport à $\mathbb{Z}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j)$ on notera $QP(\omega : \mathbb{K}^d) = \{x \in AP(\mathbb{K}^d) \mid \omega \text{ engendre } \text{Mod}(x)\}$.

- $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}^d)$ désigne l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}^d$, et pour $\phi \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}^d)$ $\|\phi\|_\infty = \sup \{|\phi(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}$. Rappelons que toute fonction presque-périodique au sens de Bohr est continue (uniformément et bornée (cf. [14, p. 34]) d'où $AP(\mathbb{K}^d) \subset C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}^d)$, et que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions presque-périodiques au sens de Bohr (cf. [14]) donc $AP(\mathbb{K}^d)$ est un sous-espace de Banach de $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}^d)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- À tout $x \in AP(\mathbb{K}^d)$ on peut associer l'ensemble de ses translatés $\text{Trans}(x) = \{\tau_a x \mid a \in \mathbb{R}\}$, $\tau_a x(t) = x(t+a)$, on a $\text{Trans}(x) \subset AP(\mathbb{K}^d)$ car la presque-périodicité au sens de Bohr est conservé par translation (cf. [14]). Nous noterons $\mathcal{G}(x) = \text{cl}(\text{Trans}(x))$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (cl pour "closure"). $\text{Trans}(x)$ est un groupe abélien pour la loi $\tau_a x \boxplus \tau_b x = \tau_{a+b} x$, son élément neutre est x et $\boxminus \tau_a x = \tau_{-a} x$.

LEMME 1. La loi de groupe de $\text{Trans}(x)$ se prolonge par continuité pour faire de $\mathcal{G}(x)$ un groupe abélien métrique compact séparable connexe.

DÉMONSTRATION: En considérant les composantes de $x = (x_1, \dots, x_d)$, d'après un théorème de Bochner (cf. [12] ou [10]) x_k est presque-périodique au sens de Bohr ssi $\text{Trans}(x_k)$ est relativement compact dans $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, d'où la compacité de $\mathcal{G}(x)$.

Si $(\tau_{a_q})_{q \geq 1}$ et $(\tau_{b_q})_{q \geq 1}$ sont deux suites de translatés de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, des inégalités

$$\|\tau_{(a_q+b_q)} x - \tau_{(a_p+b_p)} x\|_\infty \leq \|\tau_{a_q} x - \tau_{a_p} x\|_\infty + \|\tau_{b_q} x - \tau_{b_p} x\|_\infty$$

et $\|\tau_{-a_q} x - \tau_{-a_p} x\|_\infty = \|\tau_{a_q} x - \tau_{a_p} x\|_\infty$ on déduit aisément que $(\tau_{a_q} x \boxplus \tau_{b_q} x)_{q \geq 1}$ et $(\boxminus \tau_{a_q} x)_{q \geq 1}$ sont des suites de Cauchy. Ainsi les opérations $\boxplus$ et $\boxminus$ sont uniformément continues sur respectivement $\text{Trans}(x) \times \text{Trans}(x)$ et $\text{Trans}(x)$, et donc se prolongent de

manière unique en des opérations continues $\boxplus: \mathcal{G}(x) \times \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{G}(x)$ et $\boxminus: \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{G}(x)$ faisant de $\mathcal{G}(x)$, muni de la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$, un groupe topologique abélien.

De l'uniforme continuité de la fonction x on déduit aisément que l'application $a \mapsto \tau_a x$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $C_b^0(\mathbb{R}, K^d)$, ainsi $\text{Trans}(x)$ est connexe et $\mathcal{G}(X)$ est connexe comme fermeture d'un connexe. La séparabilité résulte de la densité de $\{\tau_r x \mid r \in \mathbb{Q}\}$. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'utiliser sur $\mathcal{G}(x)$ la théorie de la dualité de Pontrjagin (cf. [52] ou [16, chap. II]).

LEMME 2. Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in AP(K^d)$, $g = (g_1, \dots, g_d) \in \mathcal{G}(x)$ et $\lambda \in \Lambda(x)$. Si $a(x_k; \lambda) \neq 0$ et $a(x_l; \lambda) \neq 0$ alors

$$\frac{a(g_k; \lambda)}{a(x_k; \lambda)} = \frac{a(g_l; \lambda)}{a(x_l; \lambda)}$$

et ce nombre est de module égal à 1.

DÉMONSTRATION: Comme $g \in \mathcal{G}(x)$, il existe $(a_q)_{q \geq 1}$ suite de réels t.q. $g = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{a_q} x$ dans $(C_b^0(\mathbb{R}, K^d), \|\cdot\|_\infty)$

$$\begin{aligned} |a(g; \lambda) - a(\tau_{a_q} x; \lambda)| &= |a(g - \tau_{a_q} x; \lambda)| = |M \{(g(t) - \tau_{a_q} x(t)) e^{-i\lambda t}\}_t| \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T (g(t) - \tau_{a_q} x(t)) e^{-i\lambda t} dt \right| \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t) - \tau_{a_q} x(t)| dt \leq \|g - \tau_{a_q} x\|_\infty \end{aligned}$$

on a:

$$a(g; \lambda) = \lim_{q \rightarrow \infty} a(\tau_{a_q} x; \lambda)$$

donc:

$$\begin{aligned} a(g_k; \lambda) &= \lim_{q \rightarrow \infty} a(\tau_{a_q} x_k; \lambda) = \lim_{q \rightarrow \infty} a(x_k; \lambda) e^{i\lambda a_q} \\ &= a(x_k; \lambda) \lim_{q \rightarrow \infty} e^{i\lambda a_q} \quad \text{cf. [14]} \end{aligned}$$

de même $a(g_l; \lambda) = a(x_l; \lambda) \lim_{q \rightarrow \infty} e^{i\lambda a_q}$ d'où

$$\frac{a(g_k; \lambda)}{a(x_k; \lambda)} = \lim_{q \rightarrow \infty} e^{i\lambda a_q} = \frac{a(g_l; \lambda)}{a(x_l; \lambda)}$$

en outre $|e^{i\lambda a_q}| = 1$ implique $|\lim_{q \rightarrow \infty} e^{i\lambda a_q}| = 1$, d'où le résultat. $\square$

Pour $\lambda \in \Lambda(x)$, en prenant un k t.q. $a(x_k; \lambda) \neq 0$, pour tout $g \in \mathcal{G}(x)$, en vertu du lemme 2, la formule $\chi_\lambda(g) = \frac{a(g_k; \lambda)}{a(x_k; \lambda)}$ définit bien une fonction $\chi_\lambda: \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathbb{U}$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. De plus pour $\mu \in \text{Mod}(x)$, $\mu = \sum_{\nu=1}^n p_\nu \lambda_\nu$ et $g \in \mathcal{G}(x)$, $\chi_\lambda(g) = \prod_{\nu=1}^n (\chi_{\lambda_\nu}(g))^{p_\nu}$ définit une fonction $\chi_\mu: \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathbb{U}$.

PROPOSITION 1. Le groupe dual de $\mathcal{G}(x)$ vérifie

$$\widehat{\mathcal{G}}(x) = \{\chi_\mu \mid \mu \in \text{Mod}(x)\}$$

et $\mu \mapsto \chi_\mu$ est un isomorphisme de groupes abéliens entre $\text{Mod}(x)$ et $\widehat{\mathcal{G}}(x)$.

DÉMONSTRATION: Fixons tout d'abord $\lambda \in \Lambda(x)$, et prenons k t.q. $a(x_k; \lambda) \neq 0$; pour $g, h \in \mathcal{G}(x)$ on a

$$|a(g_k; \lambda) - a(h_k; \lambda)| = |a(g_k - h_k; \lambda)| \leq |a(g - h; \lambda)| \leq \|g - h\|_\infty,$$

en multipliant les deux membres par $|a(x_k; \lambda)|^{-1}$ on obtient $|\chi_\lambda(g) - \chi_\lambda(h)| \leq |a(x_k; \lambda)|^{-1} \cdot \|g - h\|_\infty$, ce qui montre la continuité de χ_λ . En outre par construction de $\mathcal{G}(x)$

$$g = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{a_q} x, \quad h = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{b_q} x, \quad g \boxplus h = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{a_q + b_q} x$$

d'où

$$g_k = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{a_q} x_k, \quad h_k = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{b_q} x_k, \quad (g \boxplus h)_k = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{a_q + b_q} x_k$$

alors

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(g) \chi_\lambda(h) &= \frac{a(g_k; \lambda) a(h_k; \lambda)}{a(x_k; \lambda) a(x_k; \lambda)} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{a(\tau_{a_q} x_k; \lambda)}{a(x_k; \lambda)} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{a(\tau_{b_q} x_k; \lambda)}{a(x_k; \lambda)} \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} e^{i\lambda a_q} \lim_{q \rightarrow \infty} e^{i\lambda b_q} = \lim_{q \rightarrow \infty} e^{i\lambda(a_q + b_q)} \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{a(\tau_{a_q + b_q} x_k; \lambda)}{a(x_k; \lambda)} = \frac{a((g \boxplus h)_k; \lambda)}{a(x_k; \lambda)} \\ &= \chi_\lambda(g \boxplus h). \end{aligned}$$

Ainsi $\chi_\lambda \in \widehat{\mathcal{G}}(x)$; par construction il s'ensuit que pour tout $\mu \in \text{Mod}(x)$: $\chi_\mu \in \mathcal{G}(x)$.

Nous allons montrer que ce sont là les seuls éléments de $\widehat{\mathcal{G}}(x)$, pour cela nous utilisons le concept d'orthogonalité associé à la dualité (cf. [30, p. 97]), i.e. si $\langle \cdot, \cdot \rangle: \widehat{\mathcal{G}}(x) \times \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathbb{U}$ est le crochet de dualité: $A^\perp = \{\chi \in \widehat{\mathcal{G}}(x) \mid \forall g \in A \langle \chi, g \rangle = 1\}$ (resp. $B^\perp = \{g \in \mathcal{G}(x) \mid \forall \chi \in B \langle \chi, g \rangle = 1\}$) pour $A \in \mathcal{G}(x)$ (resp. $B \in \widehat{\mathcal{G}}(x)$).

- Si $g \in \{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(x)\}^\perp$ alors pour tout $\lambda \in \Lambda(x)$ on a $\langle \chi_\lambda, g \rangle = 1$, et comme $g = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{a_q} x$ on a aussi $a(g; \lambda) = \lim_{q \rightarrow \infty} a(\tau_{a_q} x; \lambda) = a(x; \lambda) e^{i\lambda a_q}$ de là on déduit que $\Lambda(g) = \Lambda(x)$, et comme on a également $a(g_k; \lambda) = a(x_k; \lambda) e^{i\lambda a_q}$ on a aussi $\Lambda(g_k) = \Lambda(x_k)$.
- Lorsque $a(x_k; \lambda) = 0$ alors $a(g_k; \lambda) = 0$, donc $a(g_k; \lambda) = a(x_k; \lambda)$, lorsque $a(x_k; \lambda) \neq 0$ on a $a(g_k; \lambda) = \{\chi_\lambda\} a(x_k; \lambda) = a(x_k; \lambda)$, ainsi pour tout k $a(g_k; \lambda) = a(x_k; \lambda)$ et $\Lambda(g_k) = \Lambda(x_k)$, alors en vertu du théorème d'unicité du développement de Fourier-Bohr (cf. [14]) on a pour tout k $g_k = x_k$, donc $g = x$.

On a prouvé que $\{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(x)\}^\perp \subset \{x\}$ et puisque x est l'élément neutre de $\mathcal{G}(x)$ on a $\{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(x)\}^\perp = \{x\}$. Donc $(\{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(x)\}^\perp)^\perp = \{x\}^\perp = \widehat{\mathcal{G}}(x)$. Enfin, cf. [30, p. 97], rappelons que l'orthogonal de l'orthogonal d'une partie est exactement égal à la

fermeture du $\mathbb{Z}$ -module (i.e. sous-groupe abélien) engendré par cette partie ici $\widehat{\mathcal{G}}(x)$ est discret car $\mathcal{G}(x)$ est compact donc la fermeture d'une partie est égale à cette partie, ainsi $(\{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(x)\}^\perp)^\perp$ est égal au $\mathbb{Z}$ -module engendré par $\{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(x)\}$ qui est exactement $\{\chi_\mu \mid \mu \in \text{Mod}(x)\}$. Donc: $\{\chi_\mu \mid \mu \in \text{Mod}(x)\} = \widehat{\mathcal{G}}(x)$, ce qui montre la première assertion de l'énoncé. Quant à la seconde assertion, il est aisément vérifiable que $\mu \mapsto \chi_\mu$ soit un homomorphisme de groupes abéliens entre $(\text{Mod}(x), +)$ et $(\widehat{\mathcal{G}}(x), \times)$, il est surjectif d'après la première assertion et il nous reste à établir son injectivité, i.e. que son noyau est réduit à 0. Considérons $\mu = \sum_{\nu=1}^n p_\nu \lambda_\nu \in \text{Mod}(x)$ t.q. $\chi_\mu = 1$, i.e. $\forall g \in \mathcal{G}(x) \chi_\mu(g) = 1$, en particulier, $\forall r \in \mathbb{R} \chi_\mu(\tau_r x) = 1$, or $\chi_{\lambda_\nu}(\tau_r x) = \frac{a(\tau_r x_k; \lambda_\nu)}{a(x_k; \lambda_\nu)} = e^{i\lambda_\nu r}$, donc

$$1 = \chi_\mu(\tau_r x) = \prod_{\nu=1}^n (\chi_{\lambda_\nu}(\tau_r x))^{p_\nu} = \prod_{\nu=1}^n (e^{i\lambda_\nu r})^{p_\nu} = e^{i\mu r}$$

ceci pour tout $r \in \mathbb{R}$, d'où $\forall r \in \mathbb{R} \mu r \in 2\pi\mathbb{Z} \implies \forall s \in \mathbb{R} s\mu \in \mathbb{Z} \implies \mathbb{R} \cdot \mu \subset \mathbb{Z} \implies \mu = 0$. Ainsi est prouvé l'injectivité. $\square$

PROPOSITION 2. Soit $F \in C^0(\mathcal{G}(x); \mathbb{R})$ alors l'intégrale (normalisée) de Haar de F sur $\mathcal{G}(x)$ vérifie:

$$\int_{\mathcal{G}(x)} F(g) dg = M\{F(\tau_r x)\}_r \left(= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(\tau_r x) dr \right).$$

DÉMONSTRATION: Notons $\phi(r) = F(\tau_r x)$, nous commençons par montrer que $\phi \in AP(\mathbb{R})$. Comme F est continue sur un compact, elle y est uniformément continue, donc $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall g, h \in \mathcal{G}(x) \|g - h\|_\infty \leq \delta_\varepsilon \implies |F(g) - F(h)| \leq \varepsilon$. Comme les composantes de x sont presque-périodiques au sens de Bohr, on a pour tout $k = 1, \dots, d$ et tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $E(x_k; \varepsilon) = \{T \in \mathbb{R} \mid \|x_k - \tau_T x_k\|_\infty \leq \varepsilon\}$ est relativement dense (cf. [14]) or d'après [38, p. 5] $\bigcap_{1 \leq k \leq d} E(x_k; \varepsilon)$ est relativement dense, donc $\forall \alpha > 0 \exists l = \text{cl}(x; \alpha) > 0 \forall r \in \mathbb{R} \exists T \in [r, r + l[$ t.q. $\|x - \tau_T x\|_\infty \leq \alpha$. Fixons $\varepsilon > 0$, alors il existe $l = l(x; \delta_\varepsilon) > 0$ t.q. $\forall r \in \mathbb{R} \exists T \in [r, r + l[$

$$\begin{aligned} \|x - \tau_T x\|_\infty \leq \delta_\varepsilon &\implies \forall s \in \mathbb{R}, \text{ comme } \mathbb{R} = \mathbb{R} + s : \|\tau_s x - \tau_{T+s} x\|_\infty = \|x - \tau_T x\|_\infty \leq \delta_\varepsilon \\ &\implies \forall s \in \mathbb{R} |F(\tau_s x) - F(\tau_{T+s} x)| \leq \varepsilon \text{ i.e. } \forall s \in \mathbb{R} |\phi(s) - \phi(T+s)| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

donc $\forall \varepsilon > 0 \exists l = l(\phi, \varepsilon) (= l(x; \delta_\varepsilon)) \forall r \in \mathbb{R} \exists T \in [r, r + l[$ t.q. $\forall s \in \mathbb{R} |\phi(s) - \phi(T+s)| \leq \varepsilon$, en outre ϕ est continue comme composée de continues donc $\phi \in AP(\mathbb{R})$, donc $M\{\phi\}$ existe dans $\mathbb{R}$. Ceci nous permet de définir la fonctionnelle $I: C^0(\mathcal{G}(x); \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(F) = M\{F(\tau_r x)\}_r$. La linéarité et la positivité de la moyenne temporelle M impliquent que I est linéaire et positive. $I(1) = M(1) = 1$.

Montrons que I est invariante par translations; soient $F \in C^0(\mathcal{G}(x); \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{G}(x)$, la translatée de F sera notée $F_h(g) = F(g \boxplus h)$, $h = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{a_q} x$. De la continuité de l'application $g \mapsto \|g \boxplus h - g \boxplus \tau_{a_q} x\|_\infty$ et du théorème de maximum de Weierstrass, pour tout $q \geq 1$ il existe g_q dans $\mathcal{G}(x)$ t.q.

$$\sup_{g \in \mathcal{G}(x)} \|g \boxplus h - g \boxplus \tau_{a_q} x\|_\infty = \|g_q \boxplus h - g_q \boxplus \tau_{a_q} x\|_\infty.$$

Quitte à prendre une sous-suite, encore notée $(g_q)_q$ pour alléger l'écriture, par la compacité de $\mathcal{G}(x)$, il existe $g \in \mathcal{G}(x)$ t.q. $g_q \mapsto g$ ($q \rightarrow \infty$); en notant encore $(\tau_{a_q}x)_q$ la sous-suite correspondante:

$$\|g_q + h - g_q + \tau_{a_q}x\|_\infty \mapsto \|g + h - g + \tau_{a_q}x\|_\infty \quad (q \rightarrow \infty),$$

ainsi

$$\begin{aligned} \sup_{g \in \mathcal{G}(x)} \|g \boxplus h - g \boxplus \tau_{a_q}x\|_\infty &\rightarrow 0 \quad (q \rightarrow \infty) \\ \implies \sup_{r \in \mathbb{R}} \|\tau_r x \boxplus h - \tau_r x \boxplus \tau_{a_q}x\|_\infty &\rightarrow 0 \quad (q \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

comme F est uniformément continue sur $\mathcal{G}(x)$ on en déduit

$$\sup_{r \in \mathbb{R}} |F(\tau_r x \boxplus h) - F(\tau_r x \boxplus \tau_{a_q}x)| \rightarrow 0 \quad (q \rightarrow \infty).$$

De plus,

$$\begin{aligned} |M\{F(\tau_r x \boxplus h) - F(\tau_r x \boxplus \tau_{a_q}x)\}_r| &\leq M\{|F(\tau_r x \boxplus h) - F(\tau_r x \boxplus \tau_{a_q}x)|\}_r \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{R}} |F(\tau_r x \boxplus h) - F(\tau_r x \boxplus \tau_{a_q}x)| \end{aligned}$$

entraîne:

$$M\{F(\tau_r x + h)\} = \lim_{q \rightarrow \infty} M\{F(\tau_{r+a_q}x)\}$$

or $I(F_h) = M\{F(\tau_r x)\}_r$, $I(F_{\tau_{a_q}x}) = M\{F(\tau_{r+a_q}x)\}_r$ donc

$$I(F_h) = \lim_{q \rightarrow \infty} I(F_{\tau_{a_q}x}).$$

En écrivant $\phi(r) = F(\tau_r x)$ on sait que $\phi \in AP(\mathbb{R})$ et ([14]), que $M\{\phi(r)\}_r = M\{\phi(r+s)\}_r$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Or $I(F) = M\{\phi(r)\}_r$ et $I(F_{\tau_{a_q}x}) = M\{\phi(r+a_q)\}_r$ donc $I(F_{\tau_{a_q}x}) = I(F)$ pour tout $q \geq 1$. Ainsi $I(F_h) = I(F)$. En résumé, I est une forme linéaire positive invariante par translation sur $C^0(\mathcal{G}(x); \mathbb{R})$ et l'unicité de l'inégalité de Haar (normalisée) nous permet de conclure. $\square$

PROPOSITION 3. Soit $x \in AP(\mathbb{K}^d)$, $\text{val}(x) = \{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, soit $f \in C^0(\text{cl}(\text{val}(x)); \mathbb{K}^e)$. Alors $f \circ x \in AP(\mathbb{K}^e)$ et $\text{Mod}(f \circ x) \subset \text{Mod}(x)$.

DÉMONSTRATION: Nous ne démontrons que le cas $e = 1$ qui contient toute la difficulté, quitte à travailler composante par composante. Comme les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr sont bornées (cf. [14]), alors $\text{cl}(\text{val}(x))$ est un compact de $\mathbb{K}^d$, ainsi f est uniformément continue et par un résultat classique (cf. [38]), $f \circ x \in AP(\mathbb{K})$. Construisons une nouvelle fonction $\tilde{f}: \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathbb{K}$ $\tilde{f}(g) = \delta_0(f \circ g)$ où δ_0 désigne la mesure de Dirac en 0. Comme, pour toute $g \in \mathcal{G}(x)$ $\|g - \tau_{a_q}x\|_\infty \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ $g(t) = \lim_{q \rightarrow \infty} x(t + a_q)$, donc $\text{val}(g) \subset \text{cl}(\text{val}(x))$ ainsi $f \circ g$ est bien définie et $\tilde{f}(g)$ aussi. Soit $\|h_q - h\|_\infty \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$) dans $\mathcal{G}(x)$, comme f est uniformément continue $\|f \circ h_q - f \circ h\|_\infty \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$), et $|f \circ h_q(0) - f \circ h(0)| \leq \|f \circ h_q - f \circ h\|_\infty$

entraîne $\delta_0(f \circ h_q) \rightarrow \delta_0(f \circ h)$ ($q \rightarrow \infty$) donc $\tilde{f}(h_q) \rightarrow \tilde{f}(h)$ ($q \rightarrow \infty$), ceci prouve que $\tilde{f} \in C^0(\mathcal{G}(x); \mathbf{K})$.

En outre l'ensemble des caractères de $\mathcal{G}(x)$ est un système orthonormal complet dans $L^2(\mathcal{G}(x), \mathbf{C})$ (cf. [47, p. 154]), comme $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$, $\tilde{f} \in C^0(\mathcal{G}(x); \mathbf{K})$ et $C^0(\mathcal{G}(x); \mathbf{K}) \subset L^2(\mathcal{G}(x), \mathbf{C})$; ainsi nous avons si $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des parties finies de $\text{Mod}(x)$:

$$\lim_{J \in \mathcal{F}} \int_{\mathcal{G}(x)} \left| \tilde{f}(g) - \sum_{\mu \in J} c_\mu \chi_\mu(g) \right|^2 dg = 0$$

où $c_\mu = \int_{\mathcal{G}(x)} f(g) \chi_\mu(g) dg$.

Or, $\tilde{f}$ et les χ_μ sont continues sur $\mathcal{G}(x)$ donc $\left| \tilde{f}(g) - \sum_{\mu \in J} c_\mu \chi_\mu \right|^2$ l'est aussi et l'on peut utiliser la proposition 2:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}(x)} \left| \tilde{f}(g) - \sum_{\mu \in J} c_\mu \chi_\mu \right|^2 dg \\ = M \left\{ \left| \tilde{f}(g) - \sum_{\mu \in J} c_\mu \chi_\mu \right|^2 \right\}_r = M \left\{ \left| f \circ x(r) - \sum_{\mu \in J} c_\mu e^{i\mu r} \right|^2 \right\}_r. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{J \in \mathcal{F}} M \left\{ \left| f \circ x(r) - \sum_{\mu \in J} c_\mu e^{i\mu r} \right|^2 \right\}_r = 0$$

- Soit $\beta \in \mathbf{R}$, alors en appliquant l'inégalité sur chaque intervalle $[-T, T]$ ($T \in \mathbf{R}_+$) on obtient

$$\begin{aligned} \left| M \left\{ f \circ x(r) e^{-i\beta r} - \sum_{\mu \in J} c_\mu e^{i\mu r} \cdot e^{-i\beta r} \right\}_r \right| \\ \leq (M \{ |e^{-i\beta r}|^2 \}_r)^{1/2} \left(M \left\{ \left| f \circ x(r) e^{-i\beta r} - \sum_{\mu \in J} c_\mu e^{i\mu r} \cdot e^{-i\beta r} \right|^2 \right\}_r \right)^{1/2} \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{J \in \mathcal{F}} M \left\{ f \circ x(r) e^{-i\beta r} - \sum_{\mu \in J} c_\mu e^{i\mu r} \cdot e^{-i\beta r} \right\} = 0$$

i.e.

$$\begin{aligned} a(f \circ x; \beta) &= M \{ f \circ x(r) e^{-i\beta r} \}_r = \lim_{J \in \mathcal{F}} M \left\{ \sum_{\mu \in J} c_\mu e^{i\mu r} \cdot e^{-i\beta r} \right\}_r \\ &= \lim_{J \in \mathcal{F}} \sum_{\mu \in J} c_\mu M \{ e^{i\mu r} \cdot e^{-i\beta r} \}_r \\ &= \lim_{J \in \mathcal{F}} \sum_{\mu \in J} c_\mu \delta_\mu^\beta = \sum_{\mu \in \text{Mod}(x)} c_\mu \delta_\mu^\beta \end{aligned}$$

(δ_μ^β est le symbole de Kronecker).

Ainsi $\beta \notin \text{Mod}(x) \implies \forall \mu \in \text{Mod}(x) \delta_\mu^\beta = 0 \implies a(f \circ x; \beta) = 0$. Par contraposition on obtient $\Lambda(f \circ x) \subset \text{Mod}(x)$, donc $\text{Mod}(f \circ x) \subset \text{Mod}(x)$. $\square$

COROLLAIRE. Soient $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ une liste de nombres réels $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants, $x \in QP(\omega; K^d)$ et $f \in C^0(\text{cl}(\text{val}(x)), K^e)$ alors $f \circ x \in QP(\omega; K^e)$

REMARQUE. La proposition 3 pourrait être démontrée à l'aide d'un théorème d'approximation de Weierstrass, car la compacité de $G(x)$ permet d'approcher uniformément f sur $G(x)$ par des polynômes, néanmoins, il existe une théorie des fonctions presque-périodiques "du type Bohr" à valeurs dans des espaces de Banach, (cf. [25, 3]), et dans ce cas si l'on sait par ailleurs que $G(x)$ est compact on ne peut affirmer que $G(x)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie et utiliser Weierstrass, alors que notre argument reste valide.

Considérons l'équation différentielle ordinaire autonome

$$\dot{x} = X(x) \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} \right) \quad (*)$$

où X est un champ de vecteurs localement lipschitzien sur $\mathbb{R}^d$. Lorsque $x \in AP(\mathbb{R}^d)$ est une solution de (*) sur $\mathbb{R}$ tout entier, il est classique (cf. [50, p. 394]) de lui associer un autre groupe $G(x) = \text{cl}(\text{val}(x))$.

Rappelons que la structure de groupe est définie ainsi pour $y = \lim_{q \rightarrow \infty} x(r_q)$, $z = \lim_{q \rightarrow \infty} x(s_q)$, $y \oplus z = \lim_{q \rightarrow \infty} x(r_q + s_q)$, $x(0)$ est l'élément neutre et $-y = \lim_{q \rightarrow \infty} x(-r_q)$; rappelons aussi que l'unicité de la solution des problèmes de Cauchy associés à (*) est essentielle pour cette construction de structure de groupe. En outre, cf. [50, p. 394], $G(x)$ est un groupe compact (pour la métrique induite par $\mathbb{R}^d$) connexe et séparable.

Nous noterons $\mathcal{X}(t, \eta)$, pour $t \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^d$, la valeur à l'instant t de la solution (lorsqu'elle y existe) du problème de Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = X(y) \\ y(0) = \eta \end{cases}$.

PROPOSITION 4. Soit $x \in AP(\mathbb{R}^d)$ solution de (*) sur $\mathbb{R}$. Alors $\eta \mapsto \mathcal{X}(t, \eta)$ est un isomorphisme de groupes topologiques de $(G(x), \oplus)$ sur $(\mathcal{G}(x), \boxplus)$.

DÉMONSTRATION: Comme x est solution de (*) qui est autonome, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\tau_r x$ est aussi solution de (*) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Soit $g \in \mathcal{G}(x)$, alors il existe une suite $(r_q)_{q \geq 1}$ telle que $\|g - \tau_{r_q} x\|_\infty \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$). On a:

$$\begin{aligned} \forall q \geq 1 \forall t \in \mathbb{R} \tau_{r_q} \dot{x}(t) = X(\tau_{r_q} x(t)) &\implies \forall q \geq 1 \forall t \in \mathbb{R} \tau_{r_q} x(t) - \tau_{r_q} x(0) = \int_0^t X(\tau_{r_q} x(s)) ds \\ &\implies (q \rightarrow \infty) \forall t \in \mathbb{R} g(t) - g(0) = \int_0^t X(g(s)) ds \\ &\implies \forall t \in \mathbb{R} \dot{g}(t) = X(g(t)). \end{aligned}$$

Ainsi toute $g \in \mathcal{G}(x)$ est solution de (*) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Si δ_0 désigne la mesure de Dirac en 0, la convergence uniforme impliquant la convergence simple, on a $\delta_0(\mathcal{G}(x)) \subset G(x)$ ce qui permet de considérer l'application $\delta_0: \mathcal{G}(x) \rightarrow G(x)$ qui est continue. Soit $g, h \in \mathcal{G}(x)$, avec $\|g - \tau_{r_q} x\|_\infty \rightarrow 0$ et $\|h - \tau_{s_q} x\|_\infty \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$) ainsi:

$$\begin{aligned} \delta_0(g \boxplus h) &= \delta_0(\lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{r_q + s_q} x) = \delta_0(\lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{r_q} x \oplus \tau_{s_q} x) \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} x(r_q + s_q) = \lim_{q \rightarrow \infty} (x(r_q) \oplus x(s_q)) \\ &= (\lim_{q \rightarrow \infty} x(r_q)) \oplus (\lim_{q \rightarrow \infty} x(s_q)) = g(0) \oplus h(0) \\ &= \delta_0(g) \oplus \delta_0(h) \end{aligned}$$

ce qui prouve que δ_0 est un homomorphisme de groupes.

Si $\delta_0(g) = x(0)$ l'élément neutre de $G(x)$ alors $g(0) = x(0)$ et puisque g et x sont solutions de $(*)$ elles sont solutions du même problème de Cauchy, X étant localement lipschitzien, on a $g = x$ l'élément neutre de $\mathcal{G}(x)$, ce qui prouve que δ_0 est injectif. Si $\eta \in G(x)$ alors $\eta = \lim_{q \rightarrow \infty} x(r_q)$, et par la compacité de $\mathcal{G}(x)$ et Bolzano-Weierstrass, il existe $(s_q)_{q \geq 1}$ sous-suite de $(r_q)_{q \geq 1}$ t.q. $(\tau_{s_q})_{q \geq 1}$ soit uniformément convergente vers $g \in \mathcal{G}(x)$; notons qu'alors $\eta = \lim_{q \rightarrow \infty} x(s_q)$ et $\delta_0(g) = \lim_{q \rightarrow \infty} \delta_0(\tau_{s_q} x) = \lim_{q \rightarrow \infty} x(s_q) = \eta$; ce qui prouve que δ_0 est surjectif. En résumé, $\delta_0: \mathcal{G}(x) \rightarrow G(x)$ est un isomorphisme continu de groupes, et la compacité de $\mathcal{G}(x)$ implique, cf. [43, p. 141], que δ_0 est un homéomorphisme, donc un isomorphisme de groupes topologiques, et $\eta \mapsto \mathcal{X}(\cdot, \eta)$ est son inverse, d'où le résultat annoncé. $\square$

Nous allons maintenant décrire $\widehat{G}(x)$ le groupe dual de $G(x)$. Pour $\mu \in \text{Mod}(x)$, $\chi_\mu \in \widehat{G}(x)$, $\eta \in G(x)$, la formule $\alpha_\mu(\eta) = \chi_\mu(\mathcal{X}(\cdot, \eta))$ définit une application $\alpha_\mu: G(x) \rightarrow \mathbb{U}$.

PROPOSITION 5. *Si $x \in AP(\mathbb{R}^d)$ est solution de $(*)$ alors on a $\widehat{G}(x) = \{\alpha_\mu \mid \mu \in \text{Mod}(x)\}$, et de plus, $\mu \rightarrow \alpha_\mu$ est un isomorphisme de groupes de $\text{Mod}(x)$ sur $\widehat{G}(x)$.*

DÉMONSTRATION: L'application α_μ est composée des applications $\eta \rightarrow \mathcal{X}(\cdot, \eta)$ et de χ_μ , toutes deux homomorphismes de groupes topologiques d'après les propositions 1 et 4, donc $\alpha_\mu \in \widehat{G}(x)$.

Si $\alpha \in \widehat{G}(x)$, alors $\alpha \circ \delta_0 \in \widehat{G}(x)$ et par la proposition 1 il existe $\mu \in \text{Mod}(x)$ t.q. $\alpha \circ \delta_0 = \chi_\mu$, donc pour tout $\eta \in G(x)$ $\chi_\mu(\mathcal{X}(\cdot, \eta)) = \alpha \circ \delta_0(\eta) = \alpha(\eta)$, d'où $\alpha = \alpha_\mu$. Ainsi $\widehat{G}(x) = \{\alpha_\mu \mid \mu \in \text{mod}(x)\}$.

Si $\mu_1, \mu_2 \in \text{Mod}(x)$,

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu_1 + \mu_2}(\eta) &= \chi_{\mu_1 + \mu_2}(\mathcal{X}(\cdot, \eta)) \\ &= \chi_{\mu_1}(\mathcal{X}(\cdot, \eta)) \chi_{\mu_2}(\mathcal{X}(\cdot, \eta)) \quad \text{par la proposition 1} \\ &= \alpha_{\mu_1}(\eta) \alpha_{\mu_2}(\eta); \end{aligned}$$

donc $\mu \rightarrow \alpha_\mu$ est un homomorphisme de groupes de $\text{Mod}(x)$ dans $\widehat{G}(x)$, surjectif par la première assertion. Enfin, si $\alpha_\mu = 1$, l'élément neutre du groupe $\mathbb{U}$ alors, pour tout $\eta \in G(x)$, $\chi_\mu(\mathcal{X}(\cdot, \eta)) = 1$, donc par la proposition 4 $\chi_\mu = 1$ et avec la proposition 1 on a $\mu = 0$, ce qui prouve l'injectivité de $\mu \rightarrow \alpha_\mu$. $\square$

PROPOSITION 6. *Soit $x \in AP(\mathbb{R}^d)$ solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}$. Alors x est quasi-périodique, i.e. il existe $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ une liste de s nombres réels $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants t.q. $x \in QP(\omega; \mathbb{R}^d)$.*

DÉMONSTRATION: Avec ces hypothèses, le groupe $G(x)$ est bien défini et est compact, donc est contenu dans un pavé de $\mathbb{R}^d$, ainsi il existe $R > 0$ t.q. $G(x) \subset [-R, R]^d$. Les propriétés de la dimension topologique (d'espaces métriques compacts, cf. [42, p. 26]) nous permettent d'affirmer $\dim G(x) \leq \dim([-R, R]^d)$ et $\dim([-R, R]^d) = d$, donc $s = \dim G(x) \leq d$. Alors cf. [52, p. 259] le rang de $\widehat{G}(x)$ est s , donc d'après la proposition 5, le $\mathbb{Z}$ -module $\text{Mod}(x)$ est engendré par s éléments indépendants $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$; ainsi $x \in QP(\omega; \mathbb{R}^d)$ où $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$. $\square$

Rappelons deux concepts de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires; une partie A de $\mathbb{R}^d$ est dite *invariante* pour $(*)$ si toute les solutions de $(*)$ passant par un point de A reste toujours dans A , et $M \subset \mathbb{R}^d$ est dite *minimale* pour $(*)$ si elle est invariante et si aucune de ses parties propres non-vides fermées n'est invariante.

PROPOSITION 7. Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$ une liste de s nombres réels $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants et soit $x \in QP(\omega; \mathbb{R}^d)$ une solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}$. Alors $G(x) = \text{cl}(\text{val}(x))$ est un s -tore topologique invariant (et même minimal) pour $(*)$. De plus $G(x)$ est localement connexe donc est un groupe de Lie. En outre $s \leq d - 1$

DÉMONSTRATION: Par la proposition 5, $\widehat{G}(x)$ est isomorphe à $\text{Mod}(x)$, lui-même isomorphe à $\mathbb{Z}^s$ par $(k_1, \dots, k_s) \mapsto \sum_{\nu=1}^s k_\nu \omega_\nu$; donc, cf. [52, p. 259], l'espace métrique compact $G(x)$ est de dimension s . plus précisément, que $\widehat{G}(x)$ soient isomorphes implique que $\widehat{G}(x)$ et $\mathbb{Z}^s = \mathbb{T}^s$ sont isomorphes, or par le théorème de Pontrjagin (cf. [52, p. 273]) nous savons que les groupes $G(x)$ et $\widehat{G}(x)$ sont topologiquement isomorphes, donc les groupes $G(x)$ et $\mathbb{T}^s$ sont topologiquement isomorphes, i.e. $G(x)$ est un s -tore topologique et comme $G(x) = \text{cl}(\text{val}(x))$ c'est aussi un ensemble minimal (cf. [50, p. 385]).

Comme $\widehat{G}(x)$ est engendré par un nombre fini (égal à s) d'éléments, on sait cf. [52, p. 260], que $G(x)$ est localement connexe. D'après la solution de Pontrjagin du 5^{ème} Problème de Hilbert (pour le cas compact), cf. [52, p. 337] et [58, p. 93], comme $G(x)$ est un groupe abélien métrique compact connexe séparable et localement connexe, $G(x)$ est un groupe de Lie.

Enfin, par un argument déjà utilisé on a $\dim(G(x)) \leq \dim([-R, R]^d) = d$ et $G(x)$ étant un groupe de Lie ne peut être de dimension égale à d donc $0 \leq s = \dim(G(x)) \leq d - 1$. $\square$

Les propositions 6 et 7 furent pour la première fois établies par Cartwright ([18]); mais notre méthode de démonstration est complètement différente, elle repose sur les propriétés de dualité du groupe fonctionnel $\mathcal{G}(x)$, qui nous serviront en d'autres circonstances dans le présent travail.

2. Orbites presque-périodiques sur une surface d'énergie ellipsoïdale. Un système hamiltonien autonome est une équation différentielle ordinaire autonome: $\dot{x} = \sigma H'(x)$ où $x \in \mathbb{R}^{2N}$ et σ est l'opérateur linéaire symplectique, $-\sigma = \sigma^* = \sigma^{-1}$ dans une base adéquate σ est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \text{id}_N \\ -\text{id}_N & 0 \end{pmatrix}$ où id_N est la matrice-identité $N \times N$.

Les équations de mouvement de la Mécanique Classique et de la Mécanique Céleste sont de cette forme (cf. [1], [4]). Adaptant un résultat célèbre de Rabinowitz (cf. [53]) nous obtenons:

THÉORÈME 1. Pour $H_i \in C^2(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, les systèmes hamiltoniens associés sont:

$$\dot{x} = \sigma H'_i(x). \quad (S_i)$$

Nous supposons qu'existent deux réels h_1 et h_2 t.q. Σ soit une composante connexe commune aux niveau d'énergie $H_1^{-1}(\{h_1\})$ et $H_2^{-1}(\{h_2\})$ et que pour tout $z \in \Sigma$ $H'_1(z) \neq 0$ et $H'_2(z) \neq 0$.

Alors tout n -tore invariant de (S_1) sur Σ construit sur un orbite ω -quasi-périodique de (S_1) est aussi un n -tore invariant de (S_2) sur Σ .

DÉMONSTRATION: Des hypothèses et du théorème de la submersion on déduit que Σ est une hypersurface différentielle de $\mathbb{R}^{2N}$ et que pour tout $z \in \Sigma$, l'espace normal à Σ en z , avec les notations de [11], est le sous-espace vectoriel engendré par le gradient, i.e. $N_z \Sigma = \mathbb{R} \cdot H'_1 = \mathbb{R} \cdot H'_2$. Donc pour tout $z \in \Sigma$, il existe un unique $r(z) \in \mathbb{R}$ t.q. $H'_1(z) = r(z)H'_2(z)$, et comme les gradients ne s'annulent pas, $r(z)$ ne s'annule jamais sur Σ . Fixant $z_0 \in \Sigma$, $H'_2(z_0) \neq 0$ implique qu'il existe un k t.q. $\frac{\partial H_2}{\partial z_k}(z_0) \neq 0$, d'où, par

continuité, il existe V voisinage de z_0 dans Σ t.q. si $z \in V$ alors $\frac{\partial H_2}{\partial z_k}(z) \neq 0$; comme on a $\frac{\partial H_1}{\partial z_k}(z) = r(z) \frac{\partial H_2}{\partial z_k}(z)$ il vient pour $z \in V$: $r(z) = \frac{\partial H_1}{\partial z_k}(z) \left(\frac{\partial H_2}{\partial z_k}(z) \right)^{-1}$, ce qui prouve que r est continue en z_0 et puisque z_0 était arbitrairement choisi, on a montré que $r \in C^0(\Sigma; \mathbb{R})$, et donc le signe de $r(\cdot)$ est constant car Σ est connexe.

Considérons $u \in QP(\omega; \mathbb{R}^d)$ une solution de (S_1) sur Σ avec $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, ainsi $G(u) = \text{cl}(\text{val}(u))$ est un n -tore invariant de (S_1) ; comme $G(u) \subset \Sigma$, car Σ est invariant, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $r(z) > 0$ sur Σ .

Posons $S(t) = \int_0^t r(u(\xi)) d\xi$, $t \in \mathbb{R}$, alors $S(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout t $S(t) = r(u(t)) > 0$; comme $G(u)$ est compact et r continue $\inf\{r(z) \mid z \in G(u)\} = \min\{r(z) \mid z \in G(u)\} = r_0 > 0$; ainsi pour tout $t \geq 0$ $S(t) \geq \int_0^t r_0 d\xi = tr_0$, d'où $S(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) et pour tout $t \leq 0$ $S(t) = \int_t^0 -r(u(\xi)) d\xi \leq \int_t^0 -r_0 d\xi = tr_0$ d'où $S(t) \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow -\infty$); ainsi $S(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et s est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; nous noterons $T = S^{-1}$ l'inverse de S , on a T de classe C^1 .

Posons $v(s) = u(T(s))$ pour tout $s \in S$; alors $\text{val}(v) = \text{val}(u)$ et

$$\begin{aligned} \dot{v}(s) &= \dot{u}(T(s)) \dot{T}(s) = \frac{1}{S'(T(s))} \dot{u}(T(s)) \\ &= \frac{1}{r(u(T(s)))} \dot{u}(T(s)) = \frac{1}{r(u(T(s)))} \sigma H'_1(u(T(s))) \\ &= \sigma H'_2(u(T(s))) = \sigma H'_2(v(s)). \end{aligned}$$

Ainsi v est solution de (S_2) . $\square$

Nous avons là un exemple de tore invariant construit sur une fonction quasi-périodique qui n'est pas une solution quasi-périodique.

COROLLAIRE. Soit $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$, le système hamiltonien associé est

$$\dot{x} = \sigma H'(x). \quad (S)$$

Supposons qu'il existe $h \in \mathbb{R}$ et Σ une composante connexe du niveau d'énergie $H^{-1}(\{h\})$ telle que Σ soit une (hyper-)ellipse de $\mathbb{R}^{2N}$; i.e. $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^{2N} \mid (1/2)Az \cdot z = 1\}$ où $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^{2N})$ est symétrique définie positive; supposons encore que pour tout $z \in \Sigma$ $H'(z) \neq 0$.

Alors sur Σ toutes les orbites de (S) sont des tores invariants ou des orbites périodiques. De plus, la dimension la plus grande des tores invariants de (S) sur Σ est m égal au maximum des termes $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants parmi $\left\{ \sqrt{\frac{a_k}{a_{N+k}}} \mid 1 \leq k \leq N \right\}$ où les a_ν , $1 \leq \nu \leq 2N$, sont les valeurs propres de A ; et en outre sur Σ , (S) possède des tores invariants de toutes les dimensions s comprise entre 1 (orbites périodiques) et m .

DÉMONSTRATION: À partir de l'opérateur linéaire A nous définissons la fonction quadratique $K(z) = (1/2)Az \cdot z$ à laquelle nous associons le système hamiltonien linéaire

$$\dot{x} = \sigma Ax \quad (\mathcal{L})$$

puisque $K'(x) = Ax$. Nous avons $\Sigma = K^{-1}(\{1\})$ et comme A est défini positif pour tout $z \in \Sigma$, on a $z \neq 0$ donc $K'(z) \neq 0$.

Les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées donc il suffit d'établir les conclusions du présent énoncé pour $(\mathcal{L})$.

Comme A est défini positif, $(\mathcal{L})$ se ramène à un système de N oscillateurs harmoniques scalaires $\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0$, $k = 1, \dots, N$ où $x = (q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N)$, $p_k = \dot{q}_k$ (cf. [1, p. 491], [4, p. 108]). Ainsi, la solution générale de $(\mathcal{L})$ est, cf [4, p. 110], [5, p. 174], $x(t) = (q(t), p(t))$ $q(t) \in \mathbb{R}^N$, $p(t) = \dot{q}(t) \in \mathbb{R}^N$ avec

$$q(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n c_k e^{i\omega_k t \xi_k} \right)$$

où $c_k \in \mathbb{C}$, $\xi_k \in \mathbb{R}^N$.

On voit que toutes les solutions de $(\mathcal{L})$ sont quasi-périodiques, en particulier sur Σ , ainsi sur Σ il n'y a que de tores invariants. Soit $\underline{\omega} = \{\omega_k \mid 1 \leq k \leq N\}$, on voit que le module des fréquences d'une solution de $(\mathcal{L})$ est inclus dans le $\mathbb{Z}$ -module engendré par $\underline{\omega}$. Si nous prenons s éléments $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants dans $\underline{\omega}$, $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_s}$, comme Σ coupe tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{2N}$ on peut choisir des valeurs initiales dans Σ pour construire une solution de $(\mathcal{L})$ sur Σ dont le module des fréquences est exactement engendré par $\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_s}\}$. En notant m le nombre maximal d'éléments de $\underline{\omega}$ $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants, on a donc des tores de toutes les dimensions s comprises entre 1 et m .

Enfin comme A est symétrique définie positive on peut trouver une base de $\mathbb{R}^{2N}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale dont la diagonale principale est constituée par les a_ν ($\nu = 1, \dots, 2N$), les valeurs propres de A . Si l'on note A_1 (resp. A_2) la matrice diagonale $N \times N$ dont la diagonale principale est constituée par $a_1, \dots, a_N$ (resp. $a_{N+1}, \dots, a_{2N}$) alors les k réels λ qui vérifient $\det(A_2 - \lambda A_1) = 0$ sont exactement $\frac{a_k}{a_{N+k}}$, $k = 1, \dots, N$ et comme, cf. [4, p. 108], $\underline{\omega} = \left\{ \sqrt{\frac{a_k}{a_{N+k}}} \mid 1 \leq k \leq N \right\}$ on a bien la caractérisation annoncée de m . $\square$

3. Calcul des variations en moyenne. Nous noterons $C_b^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) = \{x \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \mid \forall \nu = 1, \dots, n, \frac{d^\nu x}{dt^\nu} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)\}$, en la munissant de la norme $\|x\|_n = \sum_{\nu=1}^n \left\| \frac{d^\nu x}{dt^\nu} \right\|_\infty$ c'est clairement un espace de Banach. Nous considérons aussi les espaces $AP^n(\mathbb{R}^d) = \{x \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \mid \forall \nu = 1, \dots, n, \frac{d^\nu x}{dt^\nu} \in AP(\mathbb{R}^d)\}$ et si $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ est une liste de nombres réels $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants $QP^n(\omega; \mathbb{R}^d) = \{x \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \mid \forall \nu = 1, \dots, n, \frac{d^\nu x}{dt^\nu} \in QP(\omega; \mathbb{R}^d)\}$. On a $QP^n(\omega; \mathbb{R}^d) \subset AP^n(\mathbb{R}^d) \subset C_b^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ et du fait que la limite uniforme d'une suite de fonctions presque-périodiques (resp. ω -quasi-périodiques) est presque-périodique (resp. ω -quasi-périodique) on déduit aisément que, munis de la norme $\|\cdot\|_n$, $AP^n(\mathbb{R}^d)$ et $QP^n(\omega; \mathbb{R}^d)$ sont des sous-espaces de Banach de $C_b^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$.

Motivons l'introduction de ces sous-espaces; rappelons que la dérivée d'une fonction presque-périodique de classe C^1 n'est pas automatiquement presque-périodique, ce qui nous contraint à faire des hypothèses supplémentaires sur ces dérivées si nous voulons qu'elles soient presque-périodiques (pour l'hypothèse minimale cf. [12, p. 6]) mais lorsque nous cherchons des solutions d'une équation différentielle ordinaire $\ddot{x} = X(x)$ qui soient presque-périodiques on remarque que de telles solutions sont nécessairement dans $AP^1(\mathbb{R}^d)$, d'après la proposition 3 de la section 1.

PROPOSITION 1. Sur $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ construisons l'opérateur de Niemytski $F: AP(\mathbb{R}^d) \rightarrow AP(\mathbb{R}^e)$, $F(y) = f \circ y$. Alors F est Fréchet C^1 sur $AP(\mathbb{R}^d)$ et pour $y, \delta y \in AP(\mathbb{R}^d)$ et $t \in \mathbb{R}$

$$(F'(y)\delta y)(t) = f'(y(t))\delta y(t).$$

DÉMONSTRATION: Fixons $y \in AP(\mathbb{R}^d)$. Pour $\delta y \neq 0$ dans $AP(\mathbb{R}^d)$ et $t \in \mathbb{R}$, comme f est de classe C^1 , existe

$$\begin{aligned} f'(y(t))\delta y(t) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} (f(y(t) + \theta \delta y(t)) - f(y(t))) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} (F(y + \theta \delta y)(t) - F(y)(t)). \end{aligned}$$

Comme $\text{cl}(\text{val}(y))$ est compact dans $\mathbb{R}^d$, puisque y est bornée, et comme $\mathbb{R}^d$ est localement compact, il existe $\alpha > 0$ t.q. $K = \{\eta \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(\eta; \text{cl}(\text{val}(y))) \leq \alpha\}$ soit compact dans $\mathbb{R}^d$ (cf. [28, ch. III]) et puisque $f' \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^e))$, f' est uniformément continue sur K donc

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \forall \eta_1, \eta_2 \in K, |\eta_1 - \eta_2| < \delta_\varepsilon \implies \|f'(\eta_1) - f'(\eta_2)\| < \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon \|\delta y\|_\infty^{-1}$, posons $\theta_\varepsilon = \delta_\varepsilon \|\delta y\|_\infty^{-1}$, alors pour $0 < \theta < \theta_\varepsilon$ on obtient par une formule de la moyenne (cf. [45, p. 103]) pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |(f(y(t) + \theta \delta y(t)) - f(y(t)) - f'(y(t))\theta \delta y(t))| \\ \leq \theta \|\delta y(t)\| \sup_{0 \leq \beta \leq 1} \|f'((1 - \beta)y(t) + \beta(y(t) + \theta \delta y(t))) - f'(y(t))\| \\ \leq |\delta y(t)| \sup_{0 \leq \beta \leq 1} \|f'(y(t) + \beta \theta \delta y(t)) - f'(y(t))\| \end{aligned}$$

or, $|\beta \theta \delta y(t)| \leq |\theta| |\delta y(t)| \leq |\theta| \|\delta y\|_\infty \leq \delta_\varepsilon$ donc par l'uniforme continuité de f' :

$$\|f'(y(t) + \beta \theta \delta y(t))\| < \widehat{\varepsilon} = \varepsilon \|\delta y\|_\infty;$$

ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|f(y(t) + \theta \delta y(t)) + \beta \theta \delta y(t)) - f'(y(t))\theta \delta y(t)| \leq \theta \|\delta y(t)\| \varepsilon \|\delta y\|_\infty^{-1} \leq \theta \varepsilon,$$

en divisant par θ et en passant à la borne supérieure sur $t \in \mathbb{R}$, il vient

$$\left\| \frac{1}{\theta} F(y + \theta \delta y) - F(y) - f'(y(\cdot))\delta y(\cdot) \right\|_\infty \leq \varepsilon$$

dès que $0 < |\theta|, \theta_\varepsilon$; ce qui prouve que:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} (F(y + \theta \delta y) - F(y)) = f'(y(\cdot))\delta y(\cdot) \quad (\text{en norme } \|\cdot\|_\infty)$$

ce qui est la dérivée directionnelle de F en y dans la direction δy que l'on note $DF(y; \delta y) = f'(y(\cdot))\delta y(\cdot)$ ceci pour tous $y, \delta y \in AP(\mathbb{R}^d)$. Évidemment $DF(y; \cdot): \delta y \rightarrow DF(y; \delta y)$ est linéaire de $AP(\mathbb{R}^d)$ dans $AP(\mathbb{R}^e)$ et en outre,

$$\|DF(y; \delta y)\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(y(t))\delta y(t)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} (\|f'(y(t))\| |\delta y(t)|) \leq \|f'(y(\cdot))\| \|\delta y\|_\infty,$$

ce qui prouve que $DF(y; \cdot)$ est un opérateur linéaire continu de $AP(\mathbb{R}^d)$ dans $AP(\mathbb{R}^e)$, donc (cf. [39, p. 255]) que en tout $y \in AP(\mathbb{R}^d)$, F est Gâteaux-dérivable et sa Gâteaux-dérivée est $D_GF(y)\delta y = DF(y; \delta y) = f'(y(\cdot))\delta y(\cdot)$.

Pour $y, \hat{y} \in AP(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\begin{aligned} \|D_GF(y) - D_GF(\hat{y})\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{\|\delta y\| \leq 1} \|D_GF(y)\delta y - D_GF(\hat{y})\delta y\|_{\infty} \\ &= \sup_{\|\delta y\| \leq 1} \sup_{t \in \mathbb{R}} (\|f'(y(t)) - f'(\hat{y}(t))\| |\delta y(t)|) \\ &\leq \|f'(y(t)) - f'(\hat{y}(t))\| = \|f' \circ y - f' \circ \hat{y}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Par un argument déjà utilisé, il existe $\alpha > 0$ t.q. $K = \{\eta \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(\eta; \text{cl}(\text{val}(\hat{y}))) \leq \alpha\}$ soit un voisinage compact de $\text{cl}(\text{val}(y))$ dans $\mathbb{R}^d$ et comme f' est uniformément continue sur K , en notant δ_ε le module d'uniforme continuité, avec un $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, $\hat{\delta}_\varepsilon = \min\{\alpha, \delta_\varepsilon\} > 0$, pour $y \in AP(\mathbb{R}^d)$, $\|y - \hat{y}\|_{\infty} < \delta_\varepsilon$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ $|y(t) - \hat{y}(t)| < \delta_\varepsilon$ et $y(t) \in K$, donc $\|f'(y(t)) - f'(\hat{y}(t))\| \leq \varepsilon$ donc $\|f' \circ y - f' \circ \hat{y}\|_{\infty} \leq \varepsilon$, d'où $\|D_GF(y) - D_GF(\hat{y})\|_{\mathcal{L}} \leq \varepsilon$. Ceci prouve que D_GF est continue de $AP(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{L}(AP(\mathbb{R}^d); AP(\mathbb{R}^e))$, alors cf. [39, p. 257], F est Fréchet C^1 et de plus pour $y, \delta y \in AP(\mathbb{R}^d)$ $F'(y)\delta y = D_GF(y)\delta y = f'(y(\cdot))\delta y(\cdot)$. $\square$

COROLLAIRE. Sur $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ construisons l'opérateur de Niemytski $F_\omega: QP(\omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow QP(\omega; \mathbb{R}^e)$, $F_\omega(y) = f \circ y$. Alors F_ω est Fréchet C^1 et $(F'_\omega(y)\delta y)(t) = f'(y(t))\delta y(t)$.

DÉMONSTRATION: On remarque que F_ω est simplement la restriction de F . $\square$

Si $f \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^N)$, pour $x \in AP^1(\mathbb{R}^N)$ on a $(x, \overset{\circ}{x}) \in AP(\mathbb{R}^{2N})$ et ainsi $f \circ (x, \overset{\circ}{x}) \in AP(\mathbb{R})$, cf. section 1, donc l'opérateur

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= M\{f(x, \overset{\circ}{x})\} = M\{f(x(t), \overset{\circ}{x}(t))\}_t \\ \Phi: AP^1(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

est bien défini, nous appellerons alors *problème de Calcul des Variations en moyenne* un problème du type:

Trouver les extrémales de Φ sur une partie de $AP^1(\mathbb{R}^N)$.

Notamment, nous pouvons considérer la restriction Φ_ω de Φ à $QP^1(\omega; \mathbb{R}^N)$ et chercher les extrémales de Φ_ω .

PROPOSITION 2. Si $f \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ alors Φ est Fréchet C^1 sur $AP^1(\mathbb{R}^N)$ et pour $x, \delta x \in AP^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\Phi(x)\delta x = M \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \overset{\circ}{x})\delta x + \frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{x}}(x, \overset{\circ}{x})\overset{\circ}{\delta x} \right\}.$$

DÉMONSTRATION: $\Phi = M \circ F \circ T$ où $T: AP^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow AP(\mathbb{R}^{2N})$, $F: AP(\mathbb{R}^{2N}) \rightarrow AP(\mathbb{R})$, $T(x) = (x, \overset{\circ}{x})$, $F(y) = f \circ y$, et M est la moyenne temporelle de $AP(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. L'opérateur T est linéaire continu d'après le choix des normes donc Fréchet C^1 et $T'(x)\delta x = T(\delta x) = (\delta x, \overset{\circ}{\delta x})$, l'opérateur de Niemytski F est Fréchet C^1 par la proposition précédente et $F'(y) = f'(y(\cdot))\delta y(\cdot)$, enfin M est linéaire continue donc Fréchet C^1 et $M'\{u\}\delta u = M\{\delta u\}$. Alors

Φ est Fréchet C^1 comme composée de trois applications Fréchet C^1 et par la formule de dérivation en chaîne:

$$\begin{aligned}\Phi'(x)\delta x &= M'\{F \circ T(x)\}F'(T(x))T'(x)\delta x \\ &= M\{F'(T(x))T'(x)\delta x\} = M\{F'(x, \overset{\circ}{x})(\delta x, \overset{\circ}{\delta x})\} \\ &= M\{f'(x, \overset{\circ}{x})(\delta x, \overset{\circ}{\delta x})\} = M\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \overset{\circ}{x})\delta x + \frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{x}}(x, \overset{\circ}{x})\overset{\circ}{\delta x}\right\}. \quad \square\end{aligned}$$

PROPOSITION 3. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ et $\Phi(x) = M\{f(x, Bx)\}$. $\Phi: AP^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ et la restriction $\Phi_\omega: QP^2(\omega; \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ sont Fréchet C^1 et les deux assertions suivantes sont équivalentes pour $x \in AP^2(\mathbb{R}^N)$ (resp. $QP^2(\omega; \mathbb{R}^N)$):

- (i) $\Phi'(x) = 0$ (resp. $\Phi'_\omega(x) = 0$).
- (ii) x est solution sur $\mathbb{R}$ tout entier, presque-périodique (resp. ω -quasi-périodique) de l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \overset{\circ}{x}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{x}}(x, \overset{\circ}{x}).$$

DÉMONSTRATION: Tout d'abord, Φ_ω considéré comme application de $QP^1(\omega, \mathbb{R}^N)$ est de classe C^1 presque restriction d'une application qui est de classe C^1 d'après la proposition 2. Les injections canoniques de $AP^2(\mathbb{R}^N)$ dans $AP^1(\mathbb{R}^N)$ et de $QP^2(\omega; \mathbb{R}^N)$ dans $QP^1(\omega; \mathbb{R}^N)$ sont linéaires continues puisque $\|\cdot\|_2 \geq \|\cdot\|_1$, donc de classe C^1 et coïncident avec leur dérivée, ainsi $\Phi: AP^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Phi_\omega: QP^2(\omega; \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ sont Fréchet C^1 et avec la formule de dérivation en chaîne leur dérivée est donnée par l'expression qui figure dans la proposition 2. Ainsi, en fixant $x \in AP^2(\mathbb{R}^N)$ (resp. $QP^2(\omega; \mathbb{R}^N)$) si $\Phi'(x) = 0$ (resp. $\Phi'_\omega(x) = 0$) alors pour tout $\delta x \in AP^2(\mathbb{R}^N)$ (resp. $QP^2(\omega; \mathbb{R}^N)$) on a $\Phi(x)\delta x = 0$ (resp. $\Phi'_\omega(x)\delta x = 0$), i.e. $M\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \overset{\circ}{x})\delta x + \frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{x}}(x, \overset{\circ}{x})\overset{\circ}{\delta x}\right\} = 0$.

Posons momentanément $u(t) = \frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{x}}(x(t), \overset{\circ}{x}(t))$, ainsi, cf. section 1, $u \in AP(\mathbb{R}^N)$ (resp. $QP(\omega; \mathbb{R}^N)$) et

$$\overset{\circ}{u}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{x}}(x(t), \overset{\circ}{x}(t)) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \overset{\circ}{x}}(x(t), \overset{\circ}{x}(t))\overset{\circ}{x}(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial \overset{\circ}{x}^2}(x(t), \overset{\circ}{x}(t))\overset{\circ}{\overset{\circ}{x}}(t)$$

et comme f'' est continue et $x, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{\overset{\circ}{x}} \in AP(\mathbb{R}^N)$ (resp. $QP^2(\omega; \mathbb{R}^N)$) donc $u \in AP^1(\mathbb{R}^N)$ (resp. $QP^1(\omega; \mathbb{R}^N)$); pour tout $T > 0$ une intégration par parties donne

$$\int_{-T}^T u(t)\overset{\circ}{\delta x}(t) dt = u(t)\delta x(t) \Big|_{-T}^T - \int_{-T}^T \overset{\circ}{u}(t)\delta x(t) dt$$

comme $u, \delta x \in AP(\mathbb{R}^N)$ (resp. $QP(\omega; \mathbb{R}^N)$) elles sont bornées donc $u(t)\delta x(t) \Big|_{-T}^T$ est bornée uniformément par rapport à T ainsi $1/2T u(t)\delta x(t) \Big|_{-T}^T \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$), ce qui implique:

$$M\{u \delta x\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)\delta x(t) dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overset{\circ}{u}(t)\delta x(t) dt = -M\{\overset{\circ}{u} \delta x\}.$$

Nous avons donc pour tout $\delta x \in AP^2(\mathbb{R}^N)$ (resp. $QP^2(\omega; \mathbb{R}^N)$):

$$\begin{aligned} 0 &= M \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \dot{x}) \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \delta \dot{x} \right\} = M \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \dot{x}) \delta x \right\} + M \left\{ \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \delta \dot{x} \right\} \\ &= M \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \dot{x}) \delta x \right\} - M \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \right) \delta x \right\} \\ &= M \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \right) \delta x \right\} \end{aligned}$$

alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda = \sum_{\nu=1}^s k_\nu \omega_\nu$, $k_\nu \in \mathbb{Z}$) en prenant $\delta x(t) = \cos \lambda t$, puis $\delta \dot{x}(t) = \sin \lambda t$, en multipliant le deuxième terme par $-i$ on obtient:

$$M \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) \right) e^{-i\lambda t} \right\}_t = 0$$

soit $a \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}); \lambda \right) = 0$ alors le théorème d'unicité de la série de Fourier-Bohr (cf. [14]) nous permet de conclure que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) = 0;$$

i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)).$$

Ceci démontre l'implication (i) $\implies$ (ii). Pour justifier l'implication réciproque il suffit de faire en sens inverse les calculs qui précèdent. $\square$

L'équation de l'assertion (ii) est l'équation d'Euler-Lagrange habituelle du Calcul des Variations (cf. [26], [41], [2]). Nous avons donc, au moins en ce qui concerne la condition du 1^{er} ordre, une généralisation convenable du Calcul des Variations. Notons que si nous restreignons Φ à l'espace des fonctions C^1 qui sont T -périodiques nous obtenons alors

$$\Phi(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

qui est bien la fonctionnelle usuelle à la constante multiplicative $1/T$ près.

4. Principes de moindre action en moyenne. Commençons par établir le Principe de Maupertuis en moyenne.

THÉORÈME 2. Soit $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$; le système hamiltonien associé est

$$\dot{x} = \sigma H'(x). \quad (S)$$

Considérons la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J: AP^1(\mathbb{R}^{2N}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ J(x) &= M \left\{ \frac{1}{2} \sigma \dot{x} \cdot x + H(x) \right\} \end{aligned}$$

alors

- (i) J est Fréchet C^1 sur $AP(\mathbb{R}^{2N})$.
- (ii) Pour $x \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$, $J'(x) = 0$ ssi x est solution de (S).

DÉMONSTRATION: Si nous définissons $f: \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(z, w) = \frac{1}{2} \sigma w \cdot z + H(z)$ alors $f \in C^2(\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ et $J(x) = M\{f(x, \dot{x})\}$, donc d'après la section 3 $J: AP^1(\mathbb{R}^{2N}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bien définie qui est Fréchet C^1 , ce qui justifie (i). Compte tenu de la forme particulière de f nous allons établir l'équation d'Euler-Lagrange associée à J qui sera exactement (S), dans $AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ sans passer par $AP^2(\mathbb{R}^{2N})$. En effet, par la section 3, pour x et $\delta x \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ on a

$$J'(x)\delta x = M\left\{\frac{1}{2}\sigma x \cdot \delta x + \frac{1}{2}\sigma \dot{x} \cdot x + H'(x)\delta x\right\},$$

or $M\{\sigma \dot{x} \cdot x\} = M\{\sigma x \cdot \dot{x}\}$ donc $J'(x)\delta x = M\{(\sigma \dot{x} + H'(x))\delta x\}$. Si $J'(x) = 0$, on a pour tout $\delta x \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$, $J'(x)\delta x = 0$, alors qui à prendre des $\delta x(t)$ ayant toutes ses composantes nulles sauf une égale à $\cos \lambda t$ ou $\sin \lambda t$, on obtient pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $M\{(\sigma \dot{x}(t) + H'(x(t)))e^{-i\lambda t}\}_t = 0$, soit $a(\sigma \dot{x} + H'(x); \lambda) = 0$; ce qui implique par le théorème d'unicité de Fourier-Bohr que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sigma \dot{x}(t) = H'(x(t)) = 0$ i.e. $\dot{x}(t) = \sigma H'(x(t))$, ainsi x est solution de (S). On termine la preuve de (ii) comme celle de la proposition 3 de la section 3. $\square$

COROLLAIRE. Sous les hypothèses du théorème 2 pour $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ une liste de s nombres réels $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants on définit $J_\omega: QP(\omega; \mathbb{R}^{2N}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $J_\omega(x) = M\{(1/2)\sigma \dot{x} \cdot x + H(x)\}$, alors

- (i) J_ω est Fréchet C^1 sur $QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$
- (ii) Pour $x \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$ $J'_\omega(x) = 0$ ssi x est solution de (S).

DÉMONSTRATION: J_ω est la restriction à $QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$ de J , ainsi (i) découle directement de la première assertion du théorème 2. Pour (ii) si $J'_\omega(x) = 0$ on a $M\{(\sigma \dot{x} + H'(x))\delta x\} = 0$ pour tout $\delta x \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$ donc $a(\sigma \dot{x} + H'(x); \lambda) = 0$ pour tout λ dans le $\mathbb{Z}$ -module engendré par ω , et par le corollaire de la proposition 3 de la section 1 on sait que $\sigma \dot{x} + H'(x) \in QP(\omega; \mathbb{R}^{2N})$ donc par le théorème d'unicité, $\sigma \dot{x} + H'(x) = 0$, i.e. $\dot{x} = \sigma H'(x)$. Réciproquement on utilise la densité dans $QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$ des combinaisons vectorielles réelles de $t \rightarrow e^{i\lambda t}$, avec λ dans le $\mathbb{Z}$ -module engendré par ω . $\square$

En fixant $T > 0$ et en prenant $s = 1$, $\omega = 2\pi/T$, l'espace $QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$ est exactement l'espace des fonctions C^1 T -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{2N}$, et sur cet espace:

$$J(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} \sigma \dot{x}(t)x(t) + H(x(t)) \right) dt$$

c'est-à-dire, au coefficient $1/T$ près, que nous obtenons le Principe de Maupertuis classique du cas périodique (cf. [44, p. 207], [9, p. 28]). Par analogie avec la terminologie mécanique classique, nous pouvons appeler $J(x)$ l'action moyenne et $M\{(1/2)\sigma \dot{x} \cdot x\}$ l'action réduite moyenne.

PROPOSITION 1. Sous les hypothèses du théorème 2:

- (1) Pour $x \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$, si $J'(x) = 0$ alors il existe $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ avec $1 \leq s \leq 2N$ t.q. $x \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$; en particulier $\text{cl}(\text{val}(x))$ est un s -tore invariant de (S).
- (2) Pour $x \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$, $J'_\omega(x) = 0$ ssi $J'(x) = 0$.
- (3) Si x est une solution périodique de (S) alors $J'(x) = 0$.

DÉMONSTRATION: (1) est une conséquence directe du théorème 2 et de la proposition 6 de la section 1. Pour (2), $J'(x) = 0$ entraîne $J'_\omega(x) = 0$ par restriction; réciproquement, $J'_\omega(x) = 0$ implique par le corollaire qui précède, que x est une solution ω -quasi-périodique de (S) donc une solution presque périodique de (S) donc $J'(x) = 0$ par le théorème 2. Enfin (3) découle de (2) et des remarques qui précèdent. $\square$

Pour la recherche des solutions périodiques dans les systèmes hamiltoniens a été créée une méthode variationnelle différente du Principe de Maupertuis, le Principe de Moindre Action Duale de F.H. Clarke et I. Ekeland (qui fut aussi introduit dans un autre contexte par J.P. Aubin et I. Ekeland [8]). Les articles originaux sont [20], [21], [23], [24], [31], [32], [33], pour des exposés plus didactiques citons [9], [22], [27], [48]. Avec ce principe, Ekeland et Lasry ont donné le premier théorème global sur le nombre d'orbites périodiques à niveau d'énergie fixé (cf. [35]). En utilisant la théorie moderne des Points Critiques sur ce principe Willem a obtenu de nouveaux théorèmes (cf. [49], [50]). Gaussens a utilisé ce principe, sous forme discrétisée, pour la construction numérique d'orbites périodiques (cf. [40]). Une esquisse de l'étude des liaisons entre ce nouveau principe et les méthodes perturbatives figure dans [13] et dans [34]. Signalons encore que ce principe a été adapté pour des Équations des Ondes par Brézis-Coron-Nirenberg [17]. Voir [36] pour une version abstraite.

Nous allons maintenant établir ce principe de Moindre Action Duale pour les solutions presque-périodiques.

Considérons $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$ sur laquelle nous construisons le système

$$\dot{x} = \sigma H'(x) \quad (S)$$

par l'opération fondamentale de la théorie de la dualité convexe (cf. [54, ch. 12], [37, p. 16]), en assimilant $(\mathbb{R}^{2N})^*$ à $\mathbb{R}^{2N}$, nous associons à H une fonction convexe $H^*: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $H^*(z) = \sup\{z \cdot w - H(z) \mid z \in \mathbb{R}^{2N}\}$ qui est appelée la *conjuguée* (ou la *polaire*, ou la *duale* au sens de Moreau, ou *adjointe*, ou *transformée de Young-Fenchel*) de H . Lorsque H^* est dérivable, H^* coïncide avec la notion plus ancienne de transformée de Legendre de H et dans ce cas on a $w = H^{*'}(z) \iff z = H'(w)$, i.e. $H^{*'} = (H')^{-1}$. La transformation de Legendre est l'opération qui dans le Calcul des Variations permet de traduire les équations d'Euler-Lagrange en leur forme canonique, i.e. en système hamiltonien (cf. [41, p. 71], [4, p. 67], cette opération peut aussi être interprétée en termes de dualité de la géométrie projective (cf. [6, p. 33]).

Par souci de simplicité nous nous placerons dans le cas où $H^* \in C^1(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$ ce qui se traduit sur H (cf. [54, ch. 26]) en la condition nécessaire et suffisante suivante H est convexe et $|H'(x_i)| \rightarrow \infty$ ($i \rightarrow \infty$) pour toute suite vérifiant $|x_i| \rightarrow \infty$ ($i \rightarrow \infty$). Comme nous avons supposé $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$ une condition un peu plus forte assurant que $H^* \in C^1(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$ est la condition d'ellipticité uniforme: il existe $c > 0$ t.q. pour tous $z, \delta z \in \mathbb{R}^{2N}$ $H''(z)(\delta z, \delta z) \geq c|\delta z|^2$. Sur cette question, voir aussi [59, p. 18-23].

THÉORÈME 3. Soit $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$ pour laquelle il existe $c > 0$ t.q. pour tous $z, \delta z \in \mathbb{R}^{2N}$, $H''(z)(\delta z, \delta z) \geq c|\delta z|^2$. Pour $y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ posons

$$I(y) = M \left\{ \frac{1}{2} \sigma y \cdot y + H^*(\overset{\circ}{y}) \right\},$$

alors

- (i) $I: AP^1(\mathbb{R}^{2N}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle de classe Fréchet C^1 .
- (ii) $I'(y) = 0$ ssi il existe $\eta \in \mathbb{R}^{2N}$ t.q. $x = \sigma(y + \eta)$ soit solution presque-périodique du système (S) .

DÉMONSTRATION: Soit $f(w, z) = \frac{1}{2}\sigma \cdot z + H(w)$ alors on a $f \in C^1(\mathbb{R}^{4N}; \mathbb{R})$ et par la proposition 2 de la section 3 puisque $I(y) = M\{f(y, \overset{\circ}{y})\}$, I est de classe Fréchet C^1 sur $AP(\mathbb{R}^{2N})$, ce qui justifie (i); en outre pour $y, \delta y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$,

$$\begin{aligned} I'(y)\delta y &= M \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(y, \overset{\circ}{y})\delta y + \frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{y}}(y, \overset{\circ}{y})\delta \overset{\circ}{y} \right\} \\ &= M \left\{ \frac{1}{2}\sigma \overset{\circ}{y} \cdot \delta y + \frac{1}{2}\sigma \delta \overset{\circ}{y} \cdot y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}) \cdot \delta \overset{\circ}{y} \right\} \\ &= M \left\{ -\sigma y \cdot \delta \overset{\circ}{y} + H^{*'}(\overset{\circ}{y}) \cdot \delta \overset{\circ}{y} \right\} \\ &= M \left\{ (-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y})) \cdot \delta \overset{\circ}{y} \right\}. \end{aligned}$$

Si $I'(y) = 0$ alors pour tout $\delta y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ on a $M\{(-\sigma y \cdot \delta \overset{\circ}{y} + H^{*'}(\overset{\circ}{y}) \cdot \delta \overset{\circ}{y})\} = 0$, alors quitte à prendre $\delta y(t)$ ayant toutes ses composantes nulles sauf une égale à $\cos(-\lambda t)$ ou $\sin(-\lambda t)$ puis à additionner on arrive à pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$M \left\{ (-\sigma y(t) + H^{*'}(\overset{\circ}{y}(t))) \frac{d}{dt} (e^{-i\lambda t}) \right\}_t = 0,$$

i.e. $-i\lambda \cdot a(-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}); \lambda) = 0$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a(-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}); \lambda) = 0$. Posons $\eta_1 = a(-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}); 0) = M\{-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y})\} \in \mathbb{R}^{2N}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $a(-\sigma y - \eta_1 + H^{*'}(\overset{\circ}{y}); \lambda) = 0$, or $-\sigma y - \eta_1 + H^{*'}(\overset{\circ}{y}) \in AP(\mathbb{R}^{2N})$ donc le théorème d'unicité (cf. [14]) $-\sigma y - \eta_1 + H^{*'}(\overset{\circ}{y}) = 0$, i.e. $H^{*'}(\overset{\circ}{y}) = \sigma y + \eta_1$; posons $\eta = -\sigma \eta_1$ et $x = \sigma(y + \eta)$ alors il vient $\overset{\circ}{y} = -\sigma \overset{\circ}{x}$ et $H^{*'}(-\sigma \overset{\circ}{x}) = x$ ce qui équivaut à $-\sigma \overset{\circ}{x} = H'(x)$, soit $-\sigma \overset{\circ}{x} = H(x)$. Ainsi $x \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ et résout (S).

Réciproquement, Si x résout (S) et est de la forme $x = \sigma(y + \eta)$ avec $y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ alors $\sigma \overset{\circ}{y} = \overset{\circ}{x} = \sigma H'(\sigma(y + \eta))$ i.e. $\overset{\circ}{y} = H'(\sigma(y + \eta))$ i.e. $H^{*'}(\overset{\circ}{y}) = \sigma y + \sigma \eta$ donc $-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}) = \sigma \eta =$ constante vectorielle; ainsi pour tout $\delta y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$

$$\begin{aligned} I'(y)\delta y &= M\{(-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y})) \cdot \delta \overset{\circ}{y}\} = M\{\sigma \eta \cdot \delta \overset{\circ}{y}\} \\ &= M \left\{ -\frac{d}{dt}(\sigma \eta) \cdot \delta y \right\} = M\{0 \cdot \delta y\} = 0 \end{aligned}$$

d'où $I'(y) = 0$. $\square$

COROLLAIRE. Sous les hypothèses du théorème 3, si $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ est une liste de s nombres $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants, pour $y \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$, $I_\omega(y) = I(y)$ alors

- (i) $I: QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe Fréchet C^1 .
- (ii) $I'_\omega(y) = 0$ ssi il existe $\eta \in \mathbb{R}^{2N}$ t.q. $x = \sigma(y + \eta)$ soit solution presque-périodique du système (S).

DÉMONSTRATION: Puisque I_ω est la restriction de I , l'assertion (i) découle directement du théorème 3. Quant à (ii), si $I'_\omega(x) = 0$, d'où $M\{(-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}))\delta \overset{\circ}{y}\}$ dès que $\delta y \in QP^1(\omega, \mathbb{R}^{2N})$, ce qui entraîne en raisonnant comme dans la preuve du théorème 3 que

pour tout $\lambda \neq 0$ dans le $\mathbb{Z}$ -module engendré par $\omega a(-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}); \lambda) = 0$ or si $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas dans ce $\mathbb{Z}$ -module, comme $-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}) \in QP^1(\omega, \mathbb{R}^{2N})$, le coefficient de Fourier-Bohr correspondant est nul, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $a(-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}); \lambda) = 0$; et l'on conclut à l'existence d'un $\eta \in \mathbb{R}^{2N}$ t.q. $x = \sigma(y + \eta)$ soit solution, nécessairement ω -quasi-périodique, de (S) . Réciproquement on procède comme dans la preuve du théorème 3. $\square$

Comme pour le Principe de Maupertuis, pour $T > 0$, $s = 1$, $\omega = 2\pi/T$ on a $I_\omega(y) = (1/T) \int_0^T ((1/2)\sigma \dot{y}(t)y(t) + H^*(\overset{\circ}{y}(t))) dt$, ce qui est, au scalaire $1/T$ près, la fonctionnelle de Clarke-Ekeland du Principe de Moindre Action Duale utilisée pour la recherche d'orbites périodiques de (S) .

PROPOSITION 2. *Sous les hypothèses du théorème 3*

- (1) *Pour tout $y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ et tout $\eta \in \mathbb{R}^{2N}$ $I'(y + \eta) = I'(y)$. En particulier $I'(y) = 0 \implies I'(y + \eta) = 0$.*
- (2) *Pour $y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$, si $I'(y) = 0$ alors il existe $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ pour laquelle $y \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$ et $I'_\omega(y) = 0$, donc il existe $\eta \in \mathbb{R}^{2N}$ t.q. $\text{cl}(\text{val}(\sigma(y + \eta)))$ soit un s -tore invariant de (S) .*
- (3) *Pour $y \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$ $I_\omega(y) = 0$ ssi $I'(y) = 0$.*
- (4) *Si x est une solution périodique de (S) alors $I'(-\sigma x) = 0$.*

DÉMONSTRATION:

(1)

$$\begin{aligned} I'(y + \eta) \cdot \delta y &= M \left\{ -\sigma(y + \eta) + H^{*'} \left(\frac{d}{dt}(y + \eta) \right) \cdot \overset{\circ}{\delta} y \right\} \\ &= M \left\{ (-\sigma + H^{*'}(\overset{\circ}{y})) \cdot \overset{\circ}{\delta} y \right\} - M \left\{ \sigma \eta \cdot \overset{\circ}{\delta} y \right\} \\ &= I'(y) \delta y + M \left\{ \frac{d}{dt}(\sigma \eta) \cdot \delta y \right\} = I'(y) \delta y + 0. \end{aligned}$$

- (2) Si $I'(y) = 0$ alors il existe, d'après le théorème 3, un $\eta \in \mathbb{R}^{2N}$ t.q. $x = \sigma(y + \eta)$ soit solution presque-périodique de (S) , donc, par la proposition 6 de la section 1, il existe $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ pour laquelle $x \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$, ainsi $y \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$ et par l'assertion (ii) du corollaire précédent $I'_\omega(y) = 0$. En outre x étant une solution ω -quasi-périodique de (S) , $\text{cl}(\text{val}(x))$ est un s -tore invariant de (S) .
- (3) Fixons $y \in QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$, puisque I_ω est une restriction de I , $I'(y) = 0$ implique $I'_\omega(y) = 0$; et réciproquement, si $I'_\omega(y) = 0$ alors, par le corollaire ci-dessus, pour un certain $\eta \in \mathbb{R}^{2N}$, $\sigma(y + \eta)$ résout (S) et est presque-périodique, donc $I'(y) = 0$ d'après le théorème 3.
- (4) Si x est solution périodique de (S) alors x est solution presque-périodique de (S) donc par le théorème 3 il existe $\eta \in \mathbb{R}^{2N}$, $x = \sigma(y + \eta)$, on a $I'(y) = 0$ donc par l'assertion (1), $I(-\sigma x) = 0$. $\square$

L'assertion (1) de cette dernière proposition nous indique que pour la fonctionnelle I nous pourrions quotienter $AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ par les constantes de $\mathbb{R}^{2N}$, ce qui est possible compte tenu de la décomposition en sous-espaces vectoriels fermés topologiquement supplémentaires $AP(\mathbb{R}^d) = \ker M \oplus \mathbb{R}^d$, la décomposition d'un élément étant $x = (x - M\{x\}) + M\{x\}$. Ainsi on pourrait restreindre I à $AP^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap \ker M$, l'espace des éléments de $AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ qui sont de moyenne temporelle nulle, précisément:

PROPOSITION 3. *Sous les hypothèses du théorème 3, en notant I^0 (resp. I_ω^0) la restriction de I à $AP^1(\mathbb{R}^{2N} \cap \ker M$ (resp. I_ω à $QP(\omega; \mathbb{R}^{2N}) \cap \ker M$) on a pour $y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N} \cap \ker M$ (resp. $y \in QP(\omega; \mathbb{R}^{2N}) \cap \ker M$) $(I^0)'(y) = 0$ (resp. $(I_\omega^0)'(y) = 0$) ssi $I'(y) = 0$ (resp. $I'_\omega(y) = 0$).*

DÉMONSTRATION: Comme I^0 est la restriction de I à un sous-espace vectoriel fermé de I , elle est aussi régulière que I et pour tout $h \in AP^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap \ker M$ $I^{0'}(y) \cdot h = I'(y) \cdot h = M\{-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y}) \cdot \overset{\circ}{h}\}$. Ainsi $I'(y) = 0$ implique $I^{0'}(y) \cdot h = 0$ pour tout $h \in AP^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap \ker M$ or si $\delta y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ alors $\delta y = h + k$ où $h \in \ker M$ et k est une constante donc $\overset{\circ}{k} = 0$, et $I'(y)\delta y = I'(y)h + I'(y)k = I'(y)k = M\{-\sigma y + H^{*'}(\overset{\circ}{y})\overset{\circ}{k}\} = 0$. Les autres cas s'obtiennent *mutatis mutandis*. $\square$

PROPOSITION 4. *Sous les hypothèses du théorème 2; si $E = AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ (resp. $QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$) et $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ est $\Phi = J$ (resp. J_ω), pour $x \in E$ on a pour tout $z \in \mathcal{G}(x)$*

- $\Phi(z) = \Phi(x)$;
- $\Phi'(x) = 0$ implique $\Phi'(z) = 0$.

DÉMONSTRATION: Nous effectuons la preuve du cas $\Phi = J$, pour $\Phi = J_\omega$ le raisonnement étant *mutatis mutandis*, le même. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, $(1/2)\sigma \overset{\circ}{\tau}_r x \cdot \tau_r x + H(\tau_r x) = \tau_r((1/2)\sigma \overset{\circ}{x} \cdot x + H(x))$ et comme la moyenne temporelle est invariante par translations (cf. [14]) on a $J(\tau_r x) = J(x)$; si $z \in \mathcal{G}(x)$ alors il existe une suite réelle $(\tau_q)_{q \geq 1}$ telle que $\|z - \tau_{\tau_q} x\| \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$), et comme J est continue $J(z) = \lim_{q \rightarrow \infty} J(\tau_{\tau_q} x) = J(x)$. Si $J(x) = 0$ alors, d'après le théorème 2, x est une solution du système (S) qui est autonome donc pour tout $r \in \mathbb{R}$ $\tau_r x$ est encore solution de (S) donc $J'(\tau_r x) = 0$, pour $z \in \mathcal{G}(x)$ comme J' est continue $J'(z) = \lim_{q \rightarrow \infty} J'(\tau_{\tau_q} x) = J'(x) = 0$. $\square$

PROPOSITION 5. *Sous les hypothèses du théorème 3, si $E = AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ (resp. $QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N})$, resp. $AP^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap \ker M$, resp. $QP^1(\omega; \mathbb{R}^{2N}) \cap \ker M$) et $\Psi = I$ (resp. I_ω , resp. I^0 , resp. I_ω^0), pour $y \in E$ et $w \in \mathcal{G}(y)$*

- $\Psi(w) = \Psi(y)$;
- $\Psi'(y) = 0$ implique $\Psi'(w) = 0$.

DÉMONSTRATION: Nous effectuons la preuve du cas $E = AP^1(\mathbb{R}^{2N})$, $\Psi = J$, les raisonnements étant les mêmes *mutatis mutandis* dans les autres cas. Pour tout $r \in \mathbb{R}$ $1/2 \sigma \tau_r y \cdot \tau_r y + H^*(\tau_r y) = \tau_r(1/2 \sigma y \cdot y + H^*(y))$, en appliquant M à ces deux membres, la moyenne temporelle étant invariante par translation, on obtient $I(\tau_r y) = I(y)$. Si $w \in \mathcal{G}(y)$ il existe une suite réelle $(\tau_q)_{q \geq 1}$ telle que $\|w - \tau_{\tau_q} y\| \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$) et par la continuité de I $I(w) = \lim_{q \rightarrow \infty} I(\tau_{\tau_q} y) = I(y)$. Au passage en considérant l'opérateur $\tau_r \in \mathcal{L}(AP^1(\mathbb{R}^{2N}), AP^1(\mathbb{R}^{2N}))$ nous avons vu que $I \circ \tau_r = I$, donc pour tout $\delta y \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ on a $(I \circ \tau_r)'(y)\delta y = I'(y)\delta y$, par ailleurs la formule de dérivation en chaîne donne $(I \circ \tau_r)'(y)\delta y = I'(\tau_r y)\tau_r \delta y$ car $\tau_r'(y) = \tau_r$ par linéarité, donc on a $I'(\tau_r y)\tau_r \delta y = I'(y)\delta y$; donc pour tout $h \in AP^1(\mathbb{R}^{2N})$ il vient $I'(\tau_r y)h = I'(y)\tau_{-r}h$. Lorsque $I'(y) = 0$ on en déduit automatiquement que $I'(\tau_r y) = 0$ et pour $w \in \mathcal{G}(x)$ par continuité de I' $I'(w) = \lim_{q \rightarrow \infty} I'(\tau_{\tau_q} y) = 0$. $\square$

L'invariance décrite dans ces derniers énoncés peut se traduire en terme d'action de groupe. Si E désigne l'un des espaces fonctionnels de ces propositions l'application de $\mathbb{R} \times E$ dans E $(r, x) \rightarrow \tau_r x$, satisfait les deux axiomes (cf. [29, p. 46]) $\tau_0 x = x$ et $\tau_r \tau_s x = \tau_{r+s} x$, donc est une opération à gauche de $\mathbb{R}$ sur E qui est de plus continue, i.e. $(R, +)$ opère continûment dans E . Le stabilisateur de $x \in E$ est réduit à 0 sauf si x est périodique

auquel cas la stabilisateur est exactement l'ensemble des périodes de x . Le groupe $\mathbf{R}$ opère fidèlement sur E puisqu'il existe dans E des fonctions non-périodiques donc des stabilisateurs nuls mais il n'opère pas librement car il existe des fonctions périodiques dans E , et bien sûr il n'opère pas transitivement. Ainsi les propositions 4 et 5 indiquent que l'on peut considérer les fonctionnelles Φ et Ψ comme applications sur l'espace d'orbites $E/\mathbf{R}$, mais cet espace n'est pas séparé puisque les classes d'équivalence, i.e. les orbites pour l'opération considérée, sont du type $\text{Trans}(x)$, ensemble en général non-fermé.

5. Lien avec la méthode de Percival. Percival a formulé un principe variationnel pour trouver des tores invariants (cf. [51], [46]). Nous reformulons et justifions sa méthode; il appelle *toroïde* de dimension N dans $\mathbf{R}^{2N}$ l'image du N -tore $\mathbf{T}^N$ par une application $u \in C^k(\mathbf{T}^N; \mathbf{R}^{2N})$, on peut de façon équivalente considérer u comme un élément de $C^k(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^{2N})$ qui est 2π -périodique en chaque variable. Pour un hamiltonien $H \in C^m(\mathbf{R}^{2N}; \mathbf{R})$, il cherche des tores (toroïdes) invariants pour le système hamiltonien

$$\ddot{x} = \sigma H'(x). \quad (S)$$

Pour ceci, il considère les fonctionnelles $I_\nu: C^k(\mathbf{T}^N; \mathbf{R}^{2N}) \rightarrow \mathbf{R}$ ($\nu = 1, \dots, N$), $I_\nu(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{T}^N} \sigma \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu}(\theta) \cdot u(\theta) d\theta$ où l'intégrale est l'intégrale de Haar normalisée sur $\mathbf{T}^N$; $I_\nu(u)$ est appelée *valeur moyenne de la ν^e action intégrale* sur le toroïde $u(\mathbf{T}^N)$; l'énergie moyenne sur le même toroïde est $E(u) = \int_{\mathbf{T}^N} H(u(\theta)) d\theta$, ce qui donne une fonctionnelle $E: C^k(\mathbf{T}^N; \mathbf{R}^{2N}) \rightarrow \mathbf{R}$. Pour $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbf{R}^N$ il formule alors une fonctionnelle bâtie à l'aide des précédentes; $\mathcal{L}_\omega: C^k(\mathbf{T}^N, \mathbf{R}^{2N}) \rightarrow \mathbf{R}$

$$\mathcal{L}_\omega(u) = E(u) - \sum_{\nu=1}^N \omega_\nu I_\nu(u) = E(u) - \omega \cdot \vec{I}(u)$$

en posant $\vec{I}(u) = (I_1(u), \dots, I_N(u))$.

Nous pouvons voir ceci comme un lagrangien, au sens de la Théorie de l'Optimisation, où le ω_ν seraient des multiplicateurs de Lagrange. Rechercher les extrémales de $\mathcal{L}_\omega$ est un problème de Calcul des Variations avec intégrale multiple.

LEMME. Si $m \geq 1$, $k \geq 1$, alors E et $\vec{I}$ sont de classe Fréchet C^1 sur $C^k(\mathbf{T}^N; \mathbf{R}^{2N})$ et pour tout $\nu = 1, \dots, N$, et tous $u, \delta u \in C^k(\mathbf{T}^N; \mathbf{R}^{2N})$ on a

$$\begin{aligned} E'(u)\delta u &= \int_{\mathbf{T}^N} H'(u(\theta)) \cdot \delta u(\theta) d\theta \\ I'_\nu(u)\delta u &= - \int_{\mathbf{T}^N} \sigma \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu}(\theta) \cdot \delta u(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Décomposons la fonctionnelle I_ν en trois application

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial \theta_\nu}, u \right) \rightarrow \sigma \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu} \cdot u \rightarrow I_\nu(u) \\ C^k(\mathbf{T}^N; \mathbf{R}^{2N}) &\rightarrow C^0(\mathbf{T}^N; \mathbf{R}^{2N}) \rightarrow C^0(\mathbf{T}^N; \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

La première application est linéaire continue, compte tenu de l'écriture des normes, donc Fréchet C^1 , la dernière application est l'intégrale de Haar normalisée donc linéaire continue

donc Fréchet C^1 ; enfin celle du milieu est, en notant $[\eta; \xi] = \sigma\eta \cdot \xi$ le crochet symplectique de $\mathbb{R}^{2N}$, l'opérateur bilinéaire $B(f, g)(\theta) = [f(\theta); g(\theta)]$ qui est clairement bilinéaire continu, par Cauchy-Schwarz, donc Fréchet C^1 . Ainsi par composition I_ν est Fréchet C^1 et la formule de dérivation en chaîne nous donne

$$I'_\nu(u)\delta u = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^N} \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu} \cdot \delta u + \sigma \frac{\partial \delta u}{\partial \theta_\nu} \cdot u \right) d\theta$$

en utilisant le fait que u est 2π -périodique en chaque variable, une intégration par parties nous donne

$$\int_{\mathbb{T}^N} \sigma \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu} \cdot \delta u d\theta = \int_{\mathbb{T}^N} \sigma \frac{\partial \delta u}{\partial \theta_\nu} \cdot u d\theta,$$

ce qui implique $I'_\nu(u) = \sigma \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu} \cdot \delta u d\theta$.

Soit $F: C^k(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}^{2N}) \rightarrow C^0(\mathbb{T}^N; \mathbb{R})$, $F(u) = H \circ u$, c'est l'opérateur de Nemytski bâti sur H ; comme $\mathbb{T}^N$ est compact, la démonstration donnée dans [2, p. 168], se transpose complètement ici et nous permet de dire que F est Fréchet C^1 avec $(F'(u) du)(\theta) = H'(u(\theta))\delta u(\theta)$. La fonctionnelle d'énergie se décompose en $E = \mu \circ F$ où μ est l'intégrale de Haar normalisée sur $\mathbb{T}^N$ qui est linéaire continue donc Fréchet C^1 et ainsi E est Fréchet C^1 et par la formule de dérivation en chaîne

$$E'(u)\delta u = \mu'(F(u))F'(u)\delta u = \mu(F'(u)\delta u) = \int_{\mathbb{T}^N} H'(u(\theta))\delta u(\theta) d\theta. \quad \square$$

THÉORÈME (PRINCIPE VARIATIONNEL DE PERCIVAL). Soient $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}^N$ et $k \geq 1$, alors $\mathcal{L}_\omega: C^k(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}^{2N}) \rightarrow \mathbb{R}$ est Fréchet C^1 et les deux assertions suivantes sont équivalentes pour $u \in C^k(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}^{2N})$

- (i) $\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial u}(u) = 0$;
- (ii) $\forall \theta \in \mathbb{T}^N \quad u'(\theta) \cdot \omega = \sigma H'(u(\theta))$.

NOTE: $u'(\theta) \cdot \omega = \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu}(\theta) \cdot \omega_\nu$.

DÉMONSTRATION: Compte tenu du lemme $\mathcal{L}_\omega$ est Fréchet C^1 comme combinaison linéaire de Fréchet C^1 et en fixant $u \in C^k(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}^{2N})$ pour tout $\delta u \in C^1(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}^{2N})$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_\omega &= E'(u)\delta u - \sum_{\nu=1}^N \omega_\nu I'_\nu(u)\delta u = \int_{\mathbb{T}^N} \left(H'(u)\delta u + \sum_{\nu=1}^N \omega_\nu \sigma \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu} \cdot \delta u \right) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \left(h'(u(\theta)) + \sum_{\nu=1}^N \omega_\nu \sigma \frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta_\nu} \right) \cdot \delta u(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Si u satisfait (ii) alors $H'(\theta) = -\sigma u'(\theta) \cdot \omega$ donc $H'(u) + \sum_{\nu=1}^N \omega_\nu \sigma \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu} = 0$, donc pour tout δu $\mathcal{L}'_\omega \delta u = 0$, ainsi $\mathcal{L}'_\omega(u) = 0$, et u satisfait (i). Réciproquement, supposons (i) vérifiée par u alors $\mathcal{L}'_\omega(u)\delta u = 0$. On a $H'(u) + \sum_{\nu=1}^N \omega_\nu \sigma \frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta_\nu} \in C^0(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}^{2N})$, pour $\alpha = 1, \dots, 2N$ notons f_α la α^e composante de cette fonction vectorielle, ainsi, $f_\alpha \in C^0(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}) \subset$

$L^2(\mathbb{T}^N; \mathbb{R})$ et par hypothèse quitte à prendre des δu ayant $2N - 1$ composantes nulles, on a pour tout $\xi \in C^k(\mathbb{T}^N; \mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{T}^N} f_\alpha(\theta) \xi(\theta) d\theta = 0$; et pour $\xi_1, \xi_2 \in C^k(\mathbb{T}^N; \mathbb{R})$, par la formule usuelle de passage aux fonctions complexes

$$\int_{\mathbb{T}^N} f_\alpha(\theta) (\xi_1(\theta) + i\xi_2(\theta)) d\theta = \int_{\mathbb{T}^N} f_\alpha(\theta) \xi_1(\theta) d\theta + i \int_{\mathbb{T}^N} f_\alpha(\theta) \xi_2(\theta) d\theta$$

on a pour tout $h \in C^k(\mathbb{T}^N; \mathbb{C})$ $\int_{\mathbb{T}^N} f_\alpha(\theta) h(\theta) d\theta = 0$, ainsi pour tout $p \in \mathbb{Z}^N$ le coefficient de Fourier $a_p(f_\alpha) = \int_{\mathbb{T}^N} f_\alpha(\theta) e^{-ip \cdot \theta} d\theta = 0$, alors par la formule de Parseval pour séries de Fourier multiples (cf. [57, p. 248]) $\int_{\mathbb{T}^N} |f_\alpha(\theta)|^2 d\theta = \sum_{p \in \mathbb{Z}^N} |a_p(f_\alpha)|^2 = 0$, donc f_α est Haar-presque partout nulle sur $\mathbb{T}^N$ donc par continuité $F_\alpha = 0$; ainsi $H'(u) + \sum_{\nu=1}^N \omega_\nu \frac{\partial u}{\partial \theta_\nu} = 0$, d'où (ii). $\square$

PROPOSITION. Soit $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$, le système hamiltonien associé est

$$\dot{x} = \sigma H'(x); \quad (S)$$

soit $k > N/2$ un entier. Soient $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ des nombres $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants, et $u \in C^k(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}^{2N})$ un point critique de la fonctionnelle $\mathcal{L}_\omega$ de Percival alors $x(t) = u(t\omega)$, pour $t \in \mathbb{R}$, est solution ω -quasi-périodique de (S) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

DÉMONSTRATION: Il est clair que $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\dot{x}(t) = \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial u(t\omega)}{\partial \theta_\nu} \omega_\nu$. $\omega_\nu = \sigma H'(u(t\omega)) = \sigma H'(x(t))$; donc x est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Nous avons $u(\theta) \sim \sum_{p \in \mathbb{Z}^N} a_p e^{ip \cdot \theta}$ et compte tenu de l'hypothèse sur k , on sait que $(|a_p|)_{p \in \mathbb{Z}^N}$ est une famille sommable (cf. [57, p. 249]), donc la série de Fourier multiple de u converge uniformément $u(\theta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^N} a_p e^{-ip \cdot \theta}$ donc $x = \sum_{p \in \mathbb{Z}^N} a_p e^{ip \cdot \omega t}$ et comme la convergence est uniforme, c'est la série de Fourier-Bohr de x (cf. [14]) qui est donc ω -quasi-périodique. $\square$

Remerciements. Je remercie le Professeur Georges Lion de l'Université de Limoges pour ses remarques et commentaires très intéressants sur les questions d'Analyse Harmonique abordées ici.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Abraham, J.F. Marsden, "Foundations of Mechanics," 2^e édition, Benjamin, Reading, 1978.
2. V.M. Alexeev, V.M. Tkhomirov, S.V. Fomine, "Commande optimale," MIR, Moscou, 1982.
3. L. Americo, G. Prouse, "Almost-periodic functions and functional equations," Van Nostrand, New York, 1971.
4. V.I. Arnold, "Méthodes mathématiques de la Mécanique Classique," MIR, Moscou, 1976.
5. V.I. Arnold, "Équations différentielles ordinaires," MIR, Moscou, 1974.
6. V.I. Arnold, "Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires," MIR, Moscou, 1980.
7. V.I. Arnold, A. Avez, "Problèmes ergodiques de la Mécanique Classique," Gauthier-Villars, Paris, 1982.
8. J.-P. Aubin, I. Ekeland, "Second-order evolution equations with convex hamiltonian," Canadian Math. Bull. **23** (1980), 81-94.
9. D. Aze, J. Blot, "Systèmes hamiltoniens: leurs solutions périodiques," Cédic, Paris, 1982.
10. J. Bass, "Cours de mathématiques," Tome 3, Masson, Paris, 1971.
11. M. Berger, B. Gostiaux, "Géométrie différentielle," A. Colin, Paris, 1972.
12. A.S. Besicovitch, "Almost periodic functions," Cambridge University Press, 1932; Dover, New York.

13. J. Blot, *Méthodes asymptotiques dans l'étude des systèmes hamiltoniens non-autonomes*, in "Advances in Hamiltonian Systems," J.-P. Aubin, A. Bensoussan, I. Ekeland (Éds), Birkhäuser, Boston, 1983.
14. H. Bohr, "Almost periodic functions," Julius Springer, Berlin, 1933; Chelsea, New York.
15. J.-B. Bost, *Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens*, exposé no. 639, Séminaire Nicolas Bourbaki (1985), Paris.
16. N. Bourbaki, "Théories spectrales," chapitres 1 et 2, Hermann, Paris, 1967.
17. H. Brézis, J.-M. Coron, L. Nirenberg, *Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 667-689.
18. M.L. Cartwright, *Almost periodic flows and solutions of differential equations*, Proc. London Math. Soc. **17** (1967), 355-380, p. 768.
19. G. Choquet, "Topologie," Masson, Paris, 1973.
20. F.H. Clarke, *Solutions périodiques des équations hamiltoniennes*, C.R.A.S. **287** (1978), 951-952, Paris.
21. F.H. Clarke, *Periodic solutions to Hamiltonian inclusions*, J. Diff Eq. **40** (1981), 1-6.
22. F.H. Clarke, "Optimization and Nonsmooth Analysis," Wiley Interscience, New York, 1983.
23. F.H. Clarke, I. Ekeland, *Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 103-116.
24. F.H. Clarke, I. Ekeland, *Nonlinear oscillations and boundary-value problems for Hamiltonian systems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **78** (1982), 315-333.
25. C. Corduneanu, "Almost periodic functions," Wiley Interscience, New York, 1968.
26. R. Courant, D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics, Vol. I," Wiley Interscience, New York, 1953.
27. N. Desolneux-Moulis, *Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens autonomes*, exposé no. 552, Séminaire Nicolas Bourbaki; Lect. Notes in Math. **84** (1981), Springer-Verlag, Berlin.
28. J. Dieudonné, "Fondements de l'Analyse moderne, Éléments d'Analyse, Tome 1," Gauthiers-Villars, Paris, 1969.
29. J. Dieudonné, "Éléments d'Analyse, Tome 2," 2^e édition, Gauthiers-Villars, Paris, 1974.
30. J. Dieudonné, "Éléments d'Analyse, Tome 6," Gauthiers-Villars, Paris, 1975.
31. I. Ekeland, *Periodic solutions of Hamiltonian equations and a theorem of P. Rabinowitz*, J. Diff. Eq. **34** (1979), 523-534.
32. I. Ekeland, *Forced Oscillations of nonlinear Hamiltonian systems II*, in "Advances in Math.," Nachbin (Éd.), Academic Press, New York, 1981.
33. I. Ekeland, *Oscillations de systèmes hamiltoniens non-linéaires III*, Bull. Soc. Math. de France (1982).
34. I. Ekeland, "A perturbation theory near convex Hamiltonian systems," rapport no. 82-1, Institute of Applied Mathematics and Statistics, University of British Columbia, Canada, 1982.
35. I. Ekeland, J.-M. Lasry, *On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface*, Annals of Math. **112** (1980), 283-319.
36. I. Ekeland, J.-M. Lasry, *Duality in non convex variational problems*, in "Advances in Hamiltonian systems," J.-P. Aubin, A. Bensoussan, I. Ekeland (Éds), Birkhäuser, Boston, 1983.
37. I. Ekeland, R. Temam, "Analyse convexe et problèmes variationnels," Gauthier-Villars et Dunod, Paris, 1974.
38. J. Favard, "Leçons sur les fonctions presque périodiques," Gauthier-Villars, Paris.
39. T.M. Flett, "Differential analysis," Cambridge University Press, 1980.
40. E. Gaussens, *Periodic solutions in the large for nonlinear differential systems*, Num. Anal. Optimiz. **6** (1983), 25-49.
41. I.M. Gelfand, S.V. Fomin, "Calculus of Variations," Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
42. W. Hurewicz, H. Wallman, "Dimension theory," édition révisée, Princeton University Press, N.J., 1948.
43. J.L. Kelley, "General topology," Van Nostrand, New York, 1955.
44. L.D. Landau, E. Lifchitz, "Physique théorique, Tome 1: Mécanique," 4^e édition, MIR, Moscou, 1981.
45. S. Lang, "Analyse réelle," Inter Éditions, Paris, 1977.
46. A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman, "Regular and Stochastic Motions," Applied Math. Science **38**, Springer-Verlag, New York, 1983.
47. L.H. Loomis, "An introduction to Abstract Harmonic Analysis," Van Nostrand, New York, 1953.
48. J. Mawhin, "Periodic solutions of ordinary differential equations: the Poincaré heritage," Institut de Math. Pure et Appliquée, Université catholique de Louvain, Cabay, Louvain-la-Neuve, 1984.

49. J.K. Moser, *On a class of quasi-periodic solutions for Hamiltonian systems*, in "Dynamical Systems," Peixoto (Éd.), Academic Press, New York, 1973.
50. V.V. Nemytski, V.V. Stepanov, "Qualitative theory of differential equations," Princeton University Press, N.J., 1960.
51. I.C. Percival, *Variational principles for the invariant toroids of classical dynamics*, J. Phys. A. Math. Nucl. Gen. **7** (1974), 794-802.
52. L.S. Pontrjagin, "Topological groups," 2^e édition, Gordon and Breach, New York, 1966.
53. P.H. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems*, Comm. Pure and Appl. Math. **31** (1978), 157-184.
54. R.T. Rockafellar, "Convex analysis," Princeton University Press, N.J., 1970.
55. G.R. Sell, *The structure of a flow in the vicinity of an almost periodic motion*, J. Diff. Eq. **27** (1978), 359-390.
56. C.L. Siegel, J.K. Moser, "Lectures on Celestial Mechanics," Springer-Verlag, Berlin, 1971.
57. E.M. Stein, G. Weiss, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces," Princeton University Press, N.J., 1971.
58. A. Weil, "L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications," 2^e édition, Hermann, Paris, 1965.
59. M. Willem, "Lectures on critical point theory," Trabalho de Matematica **109**, Fundação Universidade de Brasília, 1983.
60. M. Willem, *Remarks on the dual least action principle*, Zeitschrift für An. und ihre Anw.. (à paraître).

J. Blot

*U.F.R. des Sciences de Limoges
Département de Mathématiques
123 rue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex — France*