

PROCESSUS DE BOLTZMANN À INTERACTIONS BINÔMIALES: CONVERGENCE VERS L'ÉQUILIBRE

JACQUES BAZINET ET GASTON GIROUX

RÉSUMÉ. Nous construisons, à l'aide des arbres aléatoires à branchement binaire, un processus à temps continu. Nous observons que les lois de Poisson sont des lois d'équilibre de ce processus. Nous montrons alors, sous des hypothèses de moments, que la loi temporelle de notre processus tend vers une loi de Poisson. Notre démonstration s'appuie sur un résultat, assez ancien, de LeCam. L'intérêt de nos résultats tient, entre autre, au fait que cette loi temporelle est la solution d'une équation de Boltzmann.

ABSTRACT. Using binary random trees we build a continuous time process. We note that the Poisson laws are equilibrium laws. Then, we show under moment assumptions, that the temporal law of the process converges to a Poisson law. The proof is based on an old result of LeCam. A main interest of our work comes from the fact that the temporal law is the solution of a non-linear Boltzmann equation.

1. Introduction. Nous allons construire un processus dont la loi temporelle satisfait une équation de Boltzmann avec un noyau d'interaction binomial. Pour un tel noyau les lois de Poisson sont des lois d'équilibre. Nous montrons alors que la loi temporelle de notre processus converge vers la loi de Poisson ayant même premier moment.

Notre modèle est construit par analogie avec ceux de Futcher-Hoare [7]. Ceux-ci ont étudié d'un point de vue analytique des modèles à valeurs dans R_+ et des modèles à valeurs dans N . Pour leurs modèles à valeurs dans R_+ , Ferland-Giroux [5] ont su montrer une convergence exponentielle vers l'équilibre. Pour leurs modèles à valeurs dans N , c'est-à-dire à interaction de Bose-Einstein, nous ne savons pas montrer la convergence vers l'équilibre du moins lorsque l'énergie se situe à deux niveaux (cf. Ferland-Giroux [6] pour les modèles à un seul niveau).

La convergence pour les noyaux binomiaux repose sur un résultat de LeCam [8] qui donne une condition suffisante pour qu'une somme de variables de Bernoulli indépendantes, mais pas nécessairement de même paramètre, converge vers une loi de Poisson.

2. Interactions et loi d'équilibre. Il faut imaginer une multitude d'objets dans un univers si vaste que seul des rencontres à deux se produisent. Au moment d'une telle rencontre l'objet "1" (que l'on veut suivre) a X unités d'énergie, l'objet "2" en a Y (X et Y sont des variables indépendantes).

L'objet "1" risque alors un sous-ensemble de ses unités, et la quantité X' risquée est binomiale de paramètres X et $q > 0$. L'objet "2", quand à lui, risque une quantité Y' qui est aussi binomiale mais de paramètre Y et q . Par la suite l'objet "1" récupère des $X' + Y'$ risquées une quantité Z qui est encore binomiale mais de paramètre $X' + Y'$ et $1/2$. Le nombre d'unités d'énergie dont l'objet "1" dispose après l'interaction est donc $(X - X') + Z$. L'objet "1" poursuit alors son chemin et après un temps aléatoire imprévisible (donc de loi exponentielle) rencontre un nouvel objet, interagit, repart, etc., etc.

Nous allons exprimer de façon explicite la quantité d'énergie de notre objet à l'instant t , mais avant nous voulons signaler que les lois de Poisson sont des lois d'équilibre pour le

Reçu le 22 janvier 1988 et, sous forme révisée, le 7 août 1988.

Recherches subventionnées en partie par une subvention CRSNG, No. A-5365, et par une subvention FCAR du Gouvernement du Québec.

© Association mathématique du Québec

genre d'interactions que nous venons de décrire. Dans le contexte des processus de Poisson (cf. Cinlar [4, page 89]) cela est bien connu: si X est de Poisson de paramètre λ , alors X' est de Poisson de paramètre $q\lambda$, $(X - X')$ est de Poisson de paramètre $(1 - q)\lambda$ et, de plus, X et $(X - X')$ sont indépendantes. Il en résulte donc, si Y est indépendante de X et de loi de Poisson de paramètre λ , que Z est de Poisson de paramètre $1/2 \times 2q\lambda$ et $(X - X') + Z$ est bien de Poisson de paramètre $(1 - q)\lambda + q\lambda = \lambda$.

3. Les arbres aléatoires. Considérons les arbres binaires en les distinguant selon les "moments" de branchement. Ainsi il y a 6 arbres à 3 branchements:

$$(1, 2, 11, 12, 111, 112), (1, 2, 11, 12, 121, 122), (1, 2, 21, 22, 211, 212), \\ (1, 2, 21, 22, 221, 222), (1, 2, 11, 12, 21, 22), (1, 2, 21, 22, 11, 12);$$

les deux derniers 6-uplets nous permettent de distinguer l'arbre qui a branché d'abord à gauche puis à droite de l'arbre qui a branché d'abord à droite puis à gauche. De façon générale il y a $n!$ arbres à n branchements, l'ensemble de ces arbres sera noté S_n . $S_0 = \{*\}$ désignera l'arbre sans branchement.

Comme nous allons suivre l'évolution aléatoire d'un des objets de notre univers, nous noterons par ζ_t l'arbre aléatoire représentant l'histoire des rencontres de cet objet jusqu'à l'instant t ; nous avons ainsi $\zeta_t \in \bigcup_{n \geq 0} S_n$. Nous noterons par z_t l'ensemble des branches sans branchement (les feuilles) de ζ_t .

Nous devons aussi donner un nom à chaque branche. Bien sûr cela sera donné par une suite finie de 1 et 2. Désignons par U l'ensemble de ces suites en y incluant $*$, et par u l'un quelconque de ces noms. Par convention nous assignons à l'objet que nous suivons le plus long nom de l'arbre ζ_t ne contenant que des 1. Nous faisons de même pour les arbres translatés. Voir Neveu [9] ou Chauvin [3] pour plus de précisions sur les arbres translatés.

Nous imaginons maintenant que chaque branche a une longueur aléatoire indépendante de tout le reste de loi exponentielle de paramètre 1 et que chaque branche $u \in z_t$ a une énergie B^u aléatoire indépendante de tout le reste. Utilisant la description de la section 2 en partant des sous-arbres à deux branches nous pouvons écrire l'énergie de notre particule à l'instant t sous la forme

$$B_t = \begin{cases} \sum_{u \in z_t} \sum_{k=1}^{B^u} Y_k^u & \text{si } z_t \neq \emptyset \\ B^* & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les Y_k^u sont des variables aléatoires indépendantes et chaque Y_k^u suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$p_u = (1 - \frac{q}{2})^{m_1(u)} (\frac{q}{2})^{m_2(u)}$$

avec $m_1(u)$ désignant le nombre de 1 de u et $m_2(u)$ le nombre de 2. De plus, il est facile de constater que

$$\sum_{u \in z_t} p_u = 1.$$

La théorie des processus de branchement à temps continu (Athreya-Ney [1]) nous permet

alors d'écrire

$$\begin{aligned}
 \mu_t(j) &= P\{B_t = j\} \\
 &= \sum_{n \geq 0} P\{\zeta_t \in S_n\} P\{B_t = j \mid \zeta_t \in S_n\} \\
 &= \sum_{n \geq 0} e^{-t}(1 - e^{-t})^n \sum_{\Lambda \in S_n} P\{\zeta_t = \Lambda \mid \zeta_t \in S_n\} P\{B_t = j \mid \zeta_t = \Lambda\} \\
 &= \sum_{n \geq 0} e^{-t}(1 - e^{-t})^n \sum_{\Lambda \in S_n} \frac{1}{n!} P\{B_t = j \mid \zeta_t = \Lambda\}.
 \end{aligned}$$

Cette façon d'exprimer μ_t est connue sous le vocable somme de Wild (Wild [11]). Il en résulte que μ_t satisfait une équation de Boltzmann:

$$\left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right) \mu_t(j) = \sum_{k,l} \mu_t(k) \mu_t(l) Q(k, l; j)$$

où

$$Q(k, l; j) = P\{(X - X') + Z = j \mid X = k, Y = l\}$$

avec X, X', Y, Z comme à la section 2. Ce résultat, démontré dans Sznitman [10], ajoute à l'intérêt de notre travail. Le lecteur intéressé peut consulter cette dernière référence pour plus de détails.

4. Convergence vers l'équilibre. Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. *Supposons que μ_0 a un deuxième moment fini et soit λ son premier moment, alors*

$$\forall j: \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}.$$

La démonstration sera faite en trois étapes. Nous allons tout d'abord nous ramener au cas où μ_0 est une masse de Dirac à 1 (cas où à l'instant 0 tous les objets ont une unité d'énergie). Puis nous démontrerons un lemme à saveur combinatoire qui nous permettra dans un troisième temps de terminer.

A) Notons par P_λ la loi de Poisson de paramètre λ . Par le résultat de LeCam [8], voir aussi Brown [2],

$$\begin{aligned}
 |\mu_t(j) - P_\lambda(j)| &\leq E[|P\{B_t = j \mid \zeta_t, B^u, u \in z_t\} - P_\lambda(j)|] \\
 &\leq E\left[\sum_{u \in z_t} B^u p_u^2\right] + E\left[\left|\sum_{u \in z_t} B^u p_u - \lambda\right|\right].
 \end{aligned}$$

Mais nous avons

$$\begin{aligned}
 E\left[\sum_{u \in z_t} B^u p_u^2\right] &= E\left[\sum_{u \in U} B^u p_u^2 1_{\{u \in z_t\}}\right] \\
 &= \sum_{u \in U} E[B^u] p_u^2 E[1_{\{u \in z_t\}}] \\
 &= E[B^*] \sum_{u \in U} p_u^2 E[1_{\{u \in z_t\}}] \\
 &= \lambda E\left[\sum_{u \in z_t} p_u^2\right].
 \end{aligned}$$

De plus, puisque $\sum_{u \in z_t} p_u = 1$, que $E[|X|] \leq (E[X^2])^{1/2}$ et que nous pouvons centrer nos variables indépendantes, nous avons

$$\begin{aligned} E \left[\left| \sum_{u \in z_t} B^u p_u - \lambda \right| \right] &\leq \left[E \left[\sum_{u \in z_t} p_u^2 (B^u - \lambda)^2 \right] \right]^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{u \in U} E[p_u^2 1_{\{u \in z_t\}}] E[(B^u - \lambda)^2] \right)^{1/2} \\ &\leq E[(B^* - \lambda)^2]^{1/2} E \left[\sum_{u \in z_t} p_u^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés au cas où $\mu_0 = \delta_1$ et au lemme qui suit.

B) Appelons

$$l = \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2, \quad r = \left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad s = l + r;$$

nous avons alors, en partitionnant selon les différents $\Lambda \in S_n$ et en conditionnant,

$$E \left[\sum_{u \in z_t} p_u^2 \mid \zeta_t \in S_n \right] = \frac{1}{n!} \sum_{\Lambda \in S_n} \sum_{u \in \tilde{\Lambda}} l^{m_1(u)} r^{m_2(u)}$$

$\tilde{\Lambda}$ désignant les feuilles de Λ . Le lemme suivant apporte plus de précision.

LEMME.

$$E \left[\sum_{u \in z_t} p_u^2 \mid \zeta_t \in S_n \right] = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) s^{k+1}, \quad n \geq 1,$$

où

$$\frac{a_k(n)}{(n-1)!} \leq (1 + \log n)^k, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

DÉMONSTRATION: Pour $n \geq 1$, $u \in \tilde{\Lambda}$ contribue à la somme soit parce qu'elle était déjà dans $\Lambda \in S_{n-1}$ et que cet arbre a branché ailleurs qu'à u , cela est possible de $n-1$ manières, ou soit qu'elle vient d'être créée au n -ième branchement. Nous avons donc la relation:

$$\sum_{\Lambda \in S_n} \sum_{u \in \tilde{\Lambda}} l^{m_1(u)} r^{m_2(u)} = (n-1) \sum_{\Lambda \in S_{n-1}} \sum_{u \in \tilde{\Lambda}} l^{m_1(u)} r^{m_2(u)} + \sum_{\Lambda \in S_{n-1}} \sum_{u \in \tilde{\Lambda}} l^{m_1(u)} r^{m_2(u)} (l + r).$$

Comme l'égalité de l'énoncé est vraie pour $n = 1$ avec $a_0(1) = 1$, nous obtenons alors par induction

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda \in S_n} \sum_{u \in \tilde{\Lambda}} l^{m_1(u)} r^{m_2(u)} &= \\ &= (n-1)a_0(n-1)s + \sum_{k=1}^{n-2} [(n-1)a_k(n-1) + a_{k-1}(n-1)] s^{k+1} + a_{n-2}(n-1)s^n \end{aligned}$$

Autrement dit l'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$ et de plus nous avons la récurrence

$$a_k(n) = (n-1)a_k(n-1) + a_{k-1}(n-1), \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad n \geq 2$$

pourvu que l'on pose $a_{-1}(n) = 0$, $a_n(n) = 0$ et $a_0(1) = 1$.

Nous allons maintenant montrer par induction sur k l'inégalité du lemme. Comme par la récurrence $a_0(n) = (n-1)!$, l'inégalité est vraie pour $k = 0$. Supposons-la donc vraie pour k , nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}(n)}{(n-1)!} &= \frac{1}{n-1} \frac{(n-1)a_{k+1}(n-1) + a_k(n-1)}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{a_{k+1}(n-1)}{(n-2)!} + \frac{1}{n-1} (1 + \log n)^k \\ &\leq \frac{a_{k+1}(k+1)}{k!} + \left(\frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) (1 + \log n)^k \\ &\leq (1 + \log n)^{k+1} \end{aligned}$$

puisque $a_{k+1}(k+1) = 0$. $\square$

- C) Pour achever la démonstration du théorème grâce au lemme, il faut d'abord observer que $s = l + r = \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{2} < 1$, puisque $q > 0$, et que $a_k(n)$ est aussi le coefficient de l^{k+1} . Cela nous permet de déduire que $a_k(n)$ est le nombre d'arbres à n branchement ayant la feuille avec uniquement $k+1$ fois 1. Nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(n)}{n!} = 1,$$

puisque'il s'agit de deux façons de compter les mêmes arbres. Il s'ensuit alors par le lemme que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{u \in z_t} p_u^2 \mid \zeta_t \in S_n \right] = 0.$$

Mais comme

$$\mathbb{E} \left[\sum_{u \in z_t} p_u^2 \right] = \sum_{n \geq 0} e^{-t} (1 - e^{-t})^n \mathbb{E} \left[\sum_{u \in z_t} p_u^2 \mid \zeta_t \in S_n \right]$$

et que

$$\sum_{n \geq 0} e^{-t} (1 - e^{-t})^n = 1,$$

le théorème est démontré. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

1. Athreya, K.B. et Ney, P., "Branching Processes," Springer, Berlin, 1972.
2. Brown T.C., *Poisson Approximations and the Definition of the Poisson Process*, Amer. Math. Monthly **91** (1984), 116-123.
3. Chauvin, B., *Arbres et processus de Bellman-Harris*, Ann. Inst. Henri Poincaré **22** (1986), 209-232.
4. Cinlar, E., "Introduction to Stochastic Processes," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
5. Ferland, R. et Giroux, G., *An Exponential Rate of Convergence for a Class of Boltzmann Processes*, soumis aux Ann. Probab..
6. Ferland, R. et Giroux, G., *Cutoff-Type Boltzmann Equations Convergence of the Solution*, Adv. Appl. Math. **8** (1987), 98-107.

7. Futcher, F.J. et Hoare, M.R., *The p - q Model Boltzmann Equation*, *Physica* **122A** (1983), 516-546.
8. LeCam, L., *An Approximation Theorem for the Poisson Binomial Distribution*, *Pacific J. Math.* **10** (1960), 1181-1197.
9. Neveu, J., *Arbres et processus de Galton-Watson*, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **22** (1986), 199-207.
10. Sznitman, A.-S., *Équations de types de Boltzmann, spatialement homogènes*, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **66** (1984), 559-592.
11. Wild, E., *On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases*, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **47** (1951), 602-609.

J. Bazinet et G. Giroux
Département de mathématiques
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec, J1K 2R1