

À PROPOS DES IDÉAUX LOCAUX: CORRIGENDUM ET ADDENDUM

G. Mason et R. Raphael

P. Stewart a fait remarquer que le Théorème 2 ainsi que la Proposition 1 de [2] étaient incomplets. Toutefois, si l'hypothèse globale que R est semi-premier [2, p. 60] est remplacée par " R est réduit", la preuve donnée pour le Théorème 2 est correcte (puisque lorsque R est réduit, $ab = 0$ ssi $aRb = 0$). En outre, la Proposition 1 a été démontrée indépendamment par Cornish [1, théorème 3.5] et Shin [4, théorème 1.8] pour des anneaux réduits. Le reste de l'article demeure valide pour les anneaux réduits, sauf pour ce qui est de la Proposition 4a, puisque $R_{n \times n}$ n'est pas réduit si $n > 1$. Il reste à savoir si les résultats sont effectivement valides pour les anneaux semi-premiers, étant donné qu'aucun contre-exemple n'est encore connu.

Nous profitons de la présente publication pour corriger aussi quelques erreurs typographiques. Dans le Théorème 4, il y en a deux: d'abord la ligne "(c) $\Rightarrow$ (d)" d'après la Proposition 1" a été omise par mégarde et devrait être insérée à la place qui lui revient. Deuxièmement, dans la démonstration que (g) $\Leftrightarrow$ (h), le signe $\subseteq$ devrait être remplacé par $\supseteq$. Enfin, dans la dernière ligne de la preuve du Théorème 3, le symbole ψ devrait être remplacé par x .

Par ailleurs, Parmenter et Stewart [3] ont obtenu des résultats semblables pour une autre classe d'anneaux, soit les anneaux dits p.t.f., dans lesquels le produit de deux idéaux de type fini est de type fini. En fait, nous allons montrer qu'il existe une classe d'anneaux qui renferme à la fois les anneaux réduits et les anneaux p.t.f. semi-premiers et pour lesquels le Théorème 2 et la Proposition 1

tiennent, soit les anneaux qui satisfont à la condition "P" introduite après le Lemme 1 ci-dessous. Nous utilisons la terminologie et certains résultats de [1].

Tout au long de cet article, R sera considéré comme un anneau semi-premier unifère. Soit $[S]$ l'idéal engendré par un sous-ensemble $S \subset R$ et définissons $x \perp y$ ssi $[x][y] = 0$. Posons $S^\perp = \{x \mid x \perp s \text{ pour tout } s \in S\}$ et écrivons $x^\perp$ pour $\{x\}^\perp = [x]^\perp$. $B(R) = \{S \mid S \subseteq R, S = Y^\perp \text{ pour certains } Y \subset R\}$ est un treillis complet et orthocomplémenté, par rapport à $\vee S_\alpha = (US_\alpha)^\perp$ et à l'intersection.

LEMME 1 [1, théorèmes 3.3, 2.6, 2.7]. (a) Pour tous les $x, y \in R$, $x^{\perp\perp} \cap y^{\perp\perp} = ([x][y])^{\perp\perp}$.

(b) Pour tous les $a_1, \dots, a_n \in R$, $[a_1, \dots, a_n]^{\perp\perp} = \vee a_i^{\perp\perp} = (\sum [a_i])^{\perp\perp}$.

Un idéal J est appelé un $\perp$ -idéal ssi $[F]^{\perp\perp} \subseteq J$ pour tous les sous-ensembles finis F de J . $\langle J \rangle$ désigne le $\perp$ -idéal engendré par J , donc $\langle J \rangle = \{U[F]^{\perp\perp} \mid F \text{ est fini, } F \subseteq J\}$. Un idéal P est $\perp$ -premier ssi $a^{\perp\perp} \cap b^{\perp\perp} \subset P$ implique que $a \in P$ ou $b \in P$. De toute évidence, les idéaux $\perp$ -premiers sont pseudo-premiers dans le sens de [2]. Enfin, nous posons que $D(R) = \{[F]^{\perp\perp} \mid F \text{ est un sous-ensemble fini de } R\}$. Par conséquent [1, p. 864], $D(R)$ est un treillis ssi il est fermé par rapport à des intersections finies et, dans ce cas, il est distributif.

La classe d'anneaux semi-premiers dont nous discutons maintenant est celle de ceux qui possèdent la propriété "P" (de Cornish [1]): pour tous $x, y \in R$, il existe des $a_1, \dots, a_n \in [x][y]$ tels que $x^{\perp\perp} \cap y^{\perp\perp} = [a_1, \dots, a_n]^{\perp\perp}$. A noter que $D(R)$ est un treillis ssi de tels a_i existent mais sans la restriction qu'ils appartiennent à $[x][y]$. Nous citons maintenant une partie de [1, théorème 3.4].

THÉORÈME 1. (a) R possède "P" ssi $D(R)$ est un treillis et les $\perp$ -idéaux $\perp$ -premiers sont premiers.

(b) Si R possède "P", alors pour tous les idéaux premiers P , O_P est l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux contenus dans P .

A noter que les anneaux réduits possèdent "P" (puisque $x^{\perp\perp} \cap y^{\perp\perp} = [xy]^{\perp\perp}$), de même que les anneaux p.t.f. semi-premiers (en vertu du Lemme 1(a)). Notons également qu'en utilisant la distributivité de $D(R)$ et le Lemme 1(b), la propriété "P" s'étend de manière finie: pour tout $x_1, \dots, x_n$, il existe un ensemble $b_1, \dots, b_m \in [x_1][x_2] \dots [x_n]$ tel que $\bigcap_1^n x_i^{\perp\perp} = [b_1, \dots, b_m]^{\perp\perp}$.

Rappelons de [2] qu'un idéal I est sur-premier s'il contient un idéal premier, et qu'il est local ssi $[x-x_1][x-x_2] \dots [x-x_n] = 0$ et $x_i \in I$ ($i = 1, \dots, n$) implique $x \in I$.

THÉOREME 2. (a) Si R est un anneau possédant "P", alors chaque idéal local I est l'intersection des idéaux sur-premiers qui renferment I .

PREUVE. Supposons que $x \notin I$. Nous allons démontrer qu'il existe un idéal sur-premier $B \supset I$ tel que $x \notin B$. Posons que $S = \{ \perp\text{-idéaux } J \mid J \text{ ne renferme pas une intersection de la forme } (x-x_1)^{\perp\perp} \cap (x-x_2)^{\perp\perp} \cap \dots \cap (x-x_n)^{\perp\perp} \text{ pour } x_i \in I \}$. Alors $(0) \in S$, car si une telle intersection était égale à zéro, alors puisque $[a] \subset a^{\perp\perp}$ pour tous les $a \in R$, nous aurions $[x-x_1] \cap [x-x_2] \cap \dots \cap [x-x_n] = 0$ alors que $[x-x_1][x-x_2] \dots [x-x_n] = 0$. Ceci contredit le fait que I est local sauf lorsque $x \notin I$. Par conséquent, $S \neq \emptyset$. Soit $\{J_i\}$ une chaîne d'idéaux dans S . Il est évident que $J = \bigcup_i J_i$ est un $\perp$ -idéal. Nous voulons démontrer que $J \in S$. Supposons que $J \supset \bigcap_1^n [x-x_i]^{\perp\perp}$.

En vertu de la propriété P, il existe un ensemble $b_1, \dots, b_m$ tel que $\bigcap_1^n (x-x_i)^{\perp\perp} = \{b_1, \dots, b_m\}^{\perp\perp}$. Etant donné que $J \supset \{b_1, \dots, b_m\}^{\perp\perp}$, $J \supset \{b_1, \dots, b_m\}$ et pour un k en particulier, $J_k \supset \{b_1, \dots, b_m\}$. Mais alors $J_k \supset \{b_1, \dots, b_m\}^{\perp\perp}$ puisque J_k est un $\perp$ -idéal. Donc $\bigcap_1^n (x-x_i)^{\perp\perp} \subset J_k$ ce qui contredit le fait que $J_k \in S$.

Par conséquent, S est inductif, de sorte que par le lemme de Zorn, S possède des éléments maximaux. Soit K égal à l'un de ces éléments. Nous démontrons que K est $\perp$ -premier. Supposons que $a \notin K$, $b \notin K$ et $a^{\perp\perp} \cap b^{\perp\perp} \subset K$. En vertu de la maximalité de K , $\langle K, a \rangle$ et $\langle K, b \rangle$ contiennent chacun une intersection

de la forme $\bigcap_{i=1}^n [x-x_i]^{\perp\perp}$ et, par conséquent, $L = \langle K, a \rangle \cap \langle K, b \rangle$ est de même. Nous montrons que $K \supset L$, ce qui contredit le choix de $K \in S$. Maintenant, si $x \in L$, alors $x \in [a, f_1, f_2, \dots, f_s]^{\perp\perp} \cap [b, g_1, \dots, g_t]^{\perp\perp}$ pour $f_i, g_j \in K$. En se servant du Lemme 1(b), de la distributivité de $D(R)$ et de la propriété "P", nous avons $x \in (a^{\perp\perp} \cap b^{\perp\perp}) \vee F^{\perp\perp}$ où F est un sous-ensemble fini de K . Puisque nous supposons que $a^{\perp\perp} \cap b^{\perp\perp} \subset K$, cela démontre que $x \in K$, i.e. $L \subset K$ comme énoncé.

K est donc $\perp$ -premier et ainsi par le Théorème 1(a), K est premier. Donc $B = I + K$ est un idéal sur-premier qui contient I . De plus, $x \notin B$, car si $x = i + k$ pour $i \in K$, $k \in K$, alors $k = x - i$ et ainsi $(x - i)^{\perp\perp} \subset K$ puisque K est un $\perp$ -idéal. Mais ceci contredit le choix de $K \in S$.

Parmenter et Stewart [3, théorème 1] sont arrivés à une conclusion semblable pour tout anneau p.t.f. De fait, le résultat suivant montre que, lorsque l'on parle des idéaux locaux d'un anneau p.t.f., on peut supposer que R est semi-premier sans perte de généralité. Soit W le radical de Wedderburn, c'est-à-dire la somme des idéaux nilpotents. Alors W est le plus petit idéal local de R et, quand R est un anneau p.t.f., W est l'intersection des idéaux sur-premiers (voir [3]; à noter que le terme "pseudo-premier" est utilisé à la place de "sur-premier"). Le résultat suivant nous a été communiqué par P. Stewart.

THÉORÈME 3. Soit R un anneau p.t.f.

1) Si I est un idéal local de R , alors $\bar{I} = I/W$ est un idéal local de $R/W = \bar{R}$.

2) W est le radical premier.

DÉMONSTRATION. 1) Si $\bar{R}(\bar{x} - \bar{x}_1)\bar{R}(\bar{x} - \bar{x}_2)\bar{R} \dots (\bar{x} - \bar{x}_n)\bar{R} = 0$ avec $\bar{x}_i \in \bar{I}$ alors $J = R(x - x_1)R \dots (x - x_n)R \subset W$ et J est un idéal de type fini. Donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $J^m = 0$ et puis $x \in I$ parce que I est local. Alors $\bar{x} \in \bar{I}$.

2) Supposons que T/W soit un idéal nilpotent de R/W . Si $t \in T$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(t)^n \subset W$. Alors $(t)^n$ est de type fini car R est un anneau p.t.f. Donc $(t)^n$ est contenu dans une somme finie d'idéaux nilpotents et

alors $(t)^n$ est nilpotent. Il en résulte que $(t) \subseteq W$ et $T/W = (0)$.

Il s'ensuit que le Théorème 2 ci-dessus généralise à la fois [3, théorème 1] et le Théorème 2 (révisé) de [2].

Nous allons maintenant démontrer que si R_n est l'anneau des matrices $n \times n$ à coefficients dans R , alors R possède "P" ssi R_n possède "P". Rappelons qu'il existe une correspondance biunivoque entre les idéaux J de R et les idéaux J_n de R_n . Si $A = (a_{ij}) \in R_n$, alors $[A] = (\sum_{i,j} [a_{ij}])_n$.

LEMME 2. Pour tous les sous-ensembles $S \subseteq R$, $(S^{\perp\perp})_n = (S_n)^{\perp\perp}$. (Ainsi la notation $S_n^{\perp\perp}$ est non équivoque.)

PREUVE. Si $A = (a_{ij}) \in (S^{\perp})_n$, alors $a_{ij} \perp s$ pour tous les $s \in S$, et tous les i, j . Par conséquent, $A \in (S_n)^{\perp}$. D'autre part, si $[A][X] = 0$ pour tous les $X \in S_n$, alors $[A][sE_{ij}] = 0$ pour tous les s et tous les i, j , où E_{ij} est l'élément canonique qui contient 1 en position i, j et 0 partout ailleurs. Par conséquent, $[a_{k\ell}][s] = 0$ pour tous les s , tous les k, ℓ et ainsi $A \in (S^{\perp})_n$. Donc, $(S_n)^{\perp} = (S^{\perp})_n$ et il s'ensuit que $(S_n)^{\perp\perp} = ((S^{\perp})_n)^{\perp} = (S^{\perp\perp})_n$.

THÉORÈME 4. R possède "P" ssi R_n possède "P".

PREUVE. ($\Rightarrow$) Si $A, B \in R_n$, alors

$$\begin{aligned} A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp} &= (\sum [a_{ij}])_n^{\perp\perp} \cap (\sum [b_{ij}])_n^{\perp\perp} \\ &= (v[a_{ij}]^{\perp\perp} \cap v[b_{ij}]^{\perp\perp})_n \text{ par le Lemme 1(b)} \\ &= \bigvee_{i,j,k,\ell} (a_{ij}^{\perp\perp} \cap b_{k\ell}^{\perp\perp})_n, \text{ puisque } D(R) \text{ est un treillis distributif} \\ &= [F]_n^{\perp\perp} \text{ pour un ensemble fini } F \text{ tel que pour tous les } x \in F, \text{ il} \\ &\quad \text{existe } i, j, k, \ell \text{ tels que } x \in [a_{ij}][b_{k\ell}]. \end{aligned}$$

Par conséquent, $A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp} = [F_n]_n^{\perp\perp}$ où F_n est un ensemble fini de matrices, chacune étant contenue dans $[A][B]$.

($\leq$) Etant donné $x, y \in R$, alors puisque R_n possède "P",
 $[x]_n^{\perp\perp} \cap [y]_n^{\perp\perp} = [A_1, \dots, A_m]^{\perp\perp}$ où $A_i \in [x]_n [y]_n = ([x][y])_n$ pour tous les i . Si
 J est l'ensemble (fini) de tous les coefficients de tous les A_i , alors
 $[A_1, \dots, A_m] = [J]_n$. Par conséquent, $x^{\perp\perp} \cap y^{\perp\perp} = [J]^{\perp\perp}$ et, de plus, chaque $j \in J$
 est contenu dans $[x][y]$ comme requis.

En regard du Théorème 1(b) ci-dessus, nous tirons directement ce qui suit
 de la preuve du Théorème 4 de [2]:

THÉORÈME 5. Si R est un anneau avec "P", alors les énoncés suivants
 sont équivalents:

- (a) Si P_1 et P_2 sont des idéaux premiers minimaux distincts, alors
 $R = P_1 + P_2$.
- (b) Chaque idéal premier propre contient un idéal premier minimal unique.
- (c) Chaque idéal maximal contient un idéal premier minimal unique.
- (d) O_P est premier pour tous les idéaux premiers P .
- (e) O_M est premier pour tous les idéaux maximaux M .
- (f) Si $rRs = 0$, alors $R = \text{Ann}[r] + \text{Ann}[s]$.

Si nous nous mettons d'accord pour qualifier de *normal* un anneau avec "P"
 lorsqu'il satisfait à l'une de ces propriétés, nous aurons comme dans [2, Corollaire,
 p. 64]:

COROLLAIRE 1. Soit R un anneau possédant la propriété "P". Si R est
normal, alors tous ses idéaux sont locaux.

Parmenter et Stewart ont défini un anneau normal comme étant un anneau
 p.t.f. satisfaisant à la condition (f) et ont prouvé [3, théorème 2] que dans de
 tels anneaux, chaque idéal unilatère est local. En corollaire, chaque idéal est lo-
 cal et le Corollaire 1 ci-dessus généralise à la fois ce résultat et le Théorème 4
 (révisé) de [2].

En fait, Parmenter et Stewart nous ont fait remarquer que leur preuve de
 [3, théorème 2] peut être facilement adaptée pour démontrer que si R est normal

avec la condition "P", alors tous les idéaux unilatéraux sont locaux.

COROLLAIRE 2. Soit R un anneau possédant la propriété "P". R est normal ssi R_n est normal.

PREUVE. Appliquer simplement le Théorème 4 et le Théorème 5(c).

Il est intéressant de noter que, en se servant seulement de la condition (f), Parmenter et Stewart ont remarqué que R normal implique R_n normal. De la même manière, ils ont constaté que R normal implique $R[x]$ normal. De fait, la preuve de la Proposition 4(b) dans [2] démontre que la réciproque est également vraie.

Références

- [1] CORNISH, W., Boolean orthogonalities and minimal prime ideals, *Comm. Algebra* 3(1975), 859-900.
- [2] MASON, G., RAPHAEL, R., A propos des idéaux locaux, *Ann. sc. math. Québec* 9(1985), 59-71.
- [3] PARMENTER, M., STEWART, P., Normal rings and local ideals, *Math. Scand.*, 60(1987), 5-8.
- [4] SHIN, G., Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring, *Trans. Amer. Math. Soc.* 184(1973), 43-60.

G. Mason
Dept. of Mathematics and Statistics
University of New Brunswick
P.O. Box 4400
Fredericton, New Brunswick
Canada E3B 5A3

R. Raphael
Department of Mathematics
Concordia University
1455, boul. de Maisonneuve Ouest
Montréal, Québec, Canada H3G 1K8

Manuscrit reçu le 18 décembre 1986.
Révisé le 7 octobre 1987.