

UN INTERVALLE BOOLÉEN DE CLONES SUR UN UNIVERS FINI

Lucien Haddad et Ivo G. Rosenberg

Abstract

Let $B = \{0, 1, \dots, k-1\}$ be a finite nonempty universe. A clone on B is a composition closed set of finitary operations on B containing all projections. The clones on B , ordered by inclusion form an algebraic lattice L . For $k = 2$ the lattice is countable and completely known (E. Post 1941) while for $k > 2$ it is largely unknown. An interval I of L is large if there is an order embedding of the lattice $\mathcal{P}$ of subsets of $N = \{1, 2, \dots\}$ (ordered by inclusion) into I . In 1959, Janov and Mučnik showed that for $k > 2$ the lattice of clones has a large interval. One of the examples is the interval $[E, F]$ generated by the clones of all operations preserving the relation

$$\rho_n = (B^n \setminus \{0, 1\}^n) \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n : x_1 + \dots + x_n = 1\}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

We describe all the clones in this interval and find a clone T such that $[E, T]$ is boolean i.e., lattice isomorphic to $\mathcal{P}$.

Résumé

Soit $B = \{0, 1, \dots, k-1\}$ un univers fini non vide. Un clone sur B est un ensemble d'opérations finitaires sur B , fermé sous la composition et qui contient toutes les projections. Les clones sur B , ordonnés par l'inclusion, forment un treillis algébrique L . Pour $k = 2$, ce treillis est dénombrable et a été complètement décrit par E. Post (1941), mais on ne connaît pas grand chose sur L pour

$k > 2$. Un intervalle I de L est dit large s'il existe un plongement qui préserve l'ordre du treillis $\underline{P}$ des sous-ensembles de $N = \{1, 2, \dots\}$ (ordonné par l'inclusion) dans I . En 1959, Janov et Mučnik ont montré que pour $k > 2$, L possède un intervalle large. Un des exemples est l'intervalle $[E, F]$ engendré par les clones de toutes les opérations qui préservent la relation

$$\rho_n = (B^n \setminus \{0, 1\}^n) \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n : x_1 + \dots + x_n = 1\}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Nous décrivons tous les clones dans cet intervalle et nous trouvons un clone T tel que $[E, T]$ est booléen, c'est-à-dire isomorphe à $\underline{P}$ en tant que treillis.

1. Introduction

Pour les notions requises d'Algèbre Universelle, nous référons le lecteur à l'article *Famille large de clones sur un univers fini*, qui a paru dans ce même journal.

Depuis le travail de Janov et Mučnik [11] (1959), on sait qu'il existe $2^{\aleph_0}$ clones sur tout univers fini à plus de 2 éléments (alors que sur un univers à 2 éléments, ceux-ci sont en nombre dénombrable et complètement décrits par E. Post [15]).

Dans cet article, nous nous penchons sur deux problèmes:

1) Dans l'exemple de Janov et Mučnik apparaît un ensemble dénombrable de clones $\{C_i, i \in N\}$ où $N = \{1, 2, \dots\}$ tel que pour tous $X, Y \subseteq N$,

$$\bigcap_{i \in X} C_i = \bigcap_{j \in Y} C_j \iff X = Y$$

(voir le Lemme 7) qui induit une famille de $2^{\aleph_0}$ clones. Qu'est-ce qu'on peut dire de l'ensemble $C = \{\bigcap_{i \in X} C_i : X \subseteq N\}$? Est-ce que C est un sous-treillis de L_B ou encore un intervalle de L_B ? Pour montrer que la réponse est négative, nous faisons bien plus en déterminant la structure de l'intervalle $I = [E, F]$ de L_B engendré par C . (Cette partie est plutôt technique et est basée sur la description relationnelle des clones).

2) Un isomorphisme d'ordre (ou plongement) du treillis $\underline{P} = (P(N), \subseteq)$ (des sous-ensembles de N) dans L_B est implicite dans Janov et Mučnik. La question se pose: Existe-t-il un tel isomorphisme d'ordre de $\underline{P}$ dans un intervalle de L_B , i.e. est-ce que L_B possède un intervalle qui est une copie de $\underline{P}$? Nous répondons par l'affirmative, en effet cet intervalle est $[E, T]$.

2. Opérations f_n , relations ρ_m et lemmes techniques

Rappelons que pour un entier $k > 2$, nous considérons l'univers $B = \underline{k} = \{0, \dots, k-1\}$, où l'élément $k-1$ est dénoté par ∞ . Pour tout entier $m \geq 1$, on pose

$$\rho_m = (B^m \setminus \underline{2}^m) \cup \{(x_1, \dots, x_m) \in \underline{2}^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1\},$$

où la somme est l'addition ordinaire des entiers, et on définit sur B les opérations n -aires suivantes:

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $X \subseteq N = \{1, 2, \dots\}$, on pose

$$\chi(X) := \bigcap_{i \in N \setminus X} \text{Pol } \rho_i,$$

la correspondance χ est une application monotone de $(P(N), \subseteq)$ dans le treillis des clones L_B sur B (voir [11] et [18]).

La question se pose: Quelle est la structure de l'intervalle $[M, N]$ dans L_B où $M = \bigcap_{X \subseteq N} \chi(X)$ et $N = \bigvee_{X \subseteq N} \chi(X)$?

Nous allons déterminer cet intervalle.

LEMME 1 [18, p. 172]. Soit $C_m := \text{Pol } \rho_m$, $m \geq 1$. Alors

$$f_n \in C_m \iff n \neq m. \quad \square$$

Les trois prochains lemmes sont techniques, et seront très utiles par la suite.

Soit h un entier positif et $H = \{1, \dots, h\}$, φ une application non décroissante de $\{1, \dots, a\}$ dans H (i.e. $1 \leq \varphi(1) \leq \dots \leq \varphi(a) \leq h$). On dit que φ est *presque injective* si $|\varphi^{-1}(i)| > 1$ pour au plus un $i \in H$.

Soit $S := \text{Im } \varphi = \{s_1, \dots, s_u\}$ où $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_u \leq h$ (ici $u = |\text{Im } \varphi|$). Pour $1 \leq j \leq u$ et $b > u$, on définit une application φ_{b_j} de $\{1, \dots, b\}$ sur S comme suit:

On pose $c = b - u$ et

$$\varphi_{b_j}(i) := \begin{cases} i & \text{pour } i = 1, \dots, j-1 \\ j & \text{pour } i = j, \dots, j+c \\ i-c & \text{pour } i = j+c+1, \dots, b. \end{cases}$$

Il est clair que φ_{b_j} est presque injective (car $|\varphi_{b_j}^{-1}(j)| = c+1$ et $|\varphi_{b_j}^{-1}(i)| = 1$ pour $i \in S \setminus \{j\}$).

Un exemple suit la démonstration du Lemme 2.

LEMME 2. Soit $\varphi : \{1, \dots, a\} \rightarrow H$ une application non décroissante et non presque injective, $S = \text{Im } \varphi$, $J = \{s \in S, |\varphi^{-1}(s)| > 1\}$ et $b > |S|$. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_h) \in B^h$

$$(1) \quad (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(a)}) \in \rho_a \iff (x_{\varphi_{b_j}(1)}, \dots, x_{\varphi_{b_j}(b)}) \in \rho_b \text{ pour tout } j \in J.$$

DÉMONSTRATION. Si pour au moins un $s \in S$, on a $x_s \notin \underline{2}$, il est clair que les deux côtés de (1) sont vérifiés, et par conséquent on suppose que $x_s \in \underline{2}$, pour tout $s \in S$.

Soit $(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(a)}) \in \rho_a$. Alors $\sum_{i=1}^a x_{\varphi(i)} = 1$, c'est-à-dire qu'il existe un unique $s \in S$ tel que $\varphi^{-1}(s)$ est un singleton et $x_s = 1$, tandis que $x_t = 0$ pour tout $t \in S \setminus \{s\}$. Soit $j \in J$, par la construction de φ_{b_j} on a

$$|\varphi_{b_j}^{-1}(s)| = 1 \text{ et donc}$$

$$\sum_{i=1}^b x_{\varphi_{b_j}(1)} = 1,$$

i.e. $(x_{\varphi_{b_j}(1)}, \dots, x_{\varphi_{b_j}(b)}) \in \rho_b$ ce qui démontre que le côté droit de (1) est vrai.

La réciproque se fait de façon analogue. $\square$

EXEMPLE 1. Soit $\varphi : \{1, \dots, 5\} \rightarrow \{1, \dots, 5\}$ définie par Tab. 1.

x	1	2	3	4	5	6
$\varphi(x)$	1	1	2	3	3	—
$\varphi_{6_1}(x)$	1	1	1	1	2	3
$\varphi_{6_3}(x)$	1	2	3	3	3	3

Tab. 1

(i.e. $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = \varphi(5) = 3$). Dans les conditions du

Lemme 2,

$$S = \{1, 2, 3\} \text{ et } J = \{1, 3\}.$$

On pose $b = 6$. Alors $c = 6 - 3 = 3$ et les applications φ_{6_1} et φ_{6_3} sont données par Tab. 1. Du Lemme 2, on déduit que

$$(x_1, x_1, x_2, x_3, x_3) \in \rho_5 \iff (x_1, x_1, x_1, x_1 x_2, x_3) \in \rho_6 \text{ et } (x_1, x_2, x_3, x_3, x_3, x_3) \in \rho_6.$$

LEMME 3. Soit $\varphi : \{1, \dots, a\} \rightarrow H$ et $\psi : \{1, \dots, d\} \rightarrow H$ non décroissantes.

Supposons $S = \text{Im } \varphi \supseteq \text{Im } \psi = T$, et $|\varphi^{-1}(t)| = 1$, pour tout $t \in T$ et soit

$b > |\text{Im } \varphi|$. Si $(x_1, \dots, x_h) \in B^h$ est tel que $(x_{\psi(1)}, \dots, x_{\psi(d)}) \in \rho_d$, alors pour tout $j \in S \setminus T$

$$(2) \quad (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(a)}) \in \rho_a \iff (x_{\varphi_{b_j}(1)}, \dots, x_{\varphi_{b_j}(b)}) \in \rho_b.$$

DÉMONSTRATION. Comme dans la preuve du Lemme 2, on suppose que $x_s \in \underline{2}$ pour tout $s \in S$.

Soit $(x_{\varphi_{b_j}(1)}, \dots, x_{\varphi_{b_j}(b)}) \in \rho_b$ pour tout $j \in S \setminus T$, donc pour tout $j \in S \setminus T$

$$(3) \quad \sum_{\ell=1}^b x_{\varphi_j}(\ell) = 1.$$

Puisque $|\varphi_{b_j}^{-1}(j)| > 1$, l'équation (3) implique que $x_j = 0$.

D'autre part, par construction, $|\varphi_{b_j}^{-1}(t)| = 1$ pour tout $t \in T$, et ainsi l'équation (3) est réduite à $\sum_{t \in T} x_t = 1$. Or d'après l'hypothèse, pour tout $t \in T$, l'élément x_t apparaît une seule fois parmi $x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(a)}$, et puisque $x_j = 0$ pour $j \in S \setminus T$ on a

$$\sum_{\ell=1}^a x_{\varphi}(\ell) = \sum_{t \in T} x_t = 1,$$

ce qui démontre que $(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(a)}) \in \rho_a$. Réciproquement si

$(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(a)}) \in \rho_a$, on a $\sum_{i=1}^a x_{\varphi(i)} = 1$.

Il en découle que $\sum_{s \in S} x_s = 1$ (puisque $x_s = 0$ si $|\varphi^{-1}(s)| > 1$). D'une façon analogue à la première partie de la preuve, on déduit de l'hypothèse $(x_{\psi(1)}, \dots, x_{\psi(d)}) \in \rho_d$ que $\sum_{t \in T} x_t = 1$, ce qui implique que $x_j = 0$ pour tout $j \in S \setminus T$, et alors il est facile de voir que $\sum_{\ell=1}^b x_{\varphi_{b_j}}(\ell) = 1$, donc pour tout $j \in S \setminus T$,

$$(x_{\varphi_{b_j}(1)}, \dots, x_{\varphi_{b_j}(b)}) \in \rho_b. \quad \square$$

EXEMPLE 2. Soit ψ définie par Tab. 2.

x	1	2	3	4	5	6	7
$\psi(x)$	1	1	2	2	3	—	—
$\varphi(x)$	1	2	3	4	4	5	—
$\varphi_7(x)$	1	2	3	4	4	4	5
$\varphi_7(x)$	1	2	3	4	5	5	5

Tab. 2

Dans les conditions du Lemme 3, $T = \{1, 2, 3\} \subset S = \{1, \dots, 5\}$. On pose $b = 7$, $c = 7 - 5 = 2$, alors φ_{7_4} et φ_{7_5} sont celles de Tab. 2. On suppose que $(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3) \in \rho_5$ et l'on a

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_5) \in \rho_6 \iff (x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_5) \in \rho_7 \text{ et } (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5) \in \rho_7.$$

LEMME 4. Soit $\varphi : \{1, \dots, u\} \rightarrow H$ injective non décroissante et $\psi : \{1, \dots, j\} \rightarrow H$ non décroissante tels que $\text{Im } \psi = \text{Im } \varphi$. Alors

$$(4) \quad (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(u)}) \in \rho_u \text{ et } (x_{\psi(1)}, \dots, x_{\psi(j)}) \in \rho_j \iff (x_{\psi(1)}, \dots, x_{\psi(j)}) \in \rho_j.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer $(\Leftarrow)$.

On pose $S := \text{Im } \varphi$. Il n'y a rien à démontrer si $x_s \notin \underline{2}$ pour un $s \in S$. Supposons donc que $(x_{\psi(1)}, \dots, x_{\psi(j)}) \in \rho_j \cap \underline{2}^j$. Donc

$$\sum_{m=1}^j x_{\psi(m)} = 1.$$

Comme dans la preuve du Lemme 3, on déduit que $\sum_{s \in S} x_s = 1$. Or φ est une bijection de $\{1, \dots, u\}$ dans S , et alors $\sum_{t=1}^u x_{\varphi(t)} = \sum_{s \in S} x_s = 1$, ce qui démontre que $(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(u)}) \in \rho_u$. $\square$

EXEMPLE 3. Soit φ et ψ définies par Tab. 3.

x	1	2	3	4	5
$\varphi(x)$	1	2	3	—	—
$\psi(x)$	1	1	2	2	3

Tab. 3

Le Lemme 4 dit que

$$(x_1, x_2, x_3) \in \rho_3 \text{ et } (x_1, x_1, x_2, x_2, x_3) \in \rho_5 \iff (x_1, x_1, x_2, x_2, x_3) \in \rho_5.$$

Soit τ une relation h-aire sans répétition, I un ensemble non vide tel que

$\bigcap_{i \in I} \text{Pol } \rho_i \subseteq \text{Pol } \tau$. Tout d'abord, nous allons déterminer la forme de τ . Pour

cela, nous aurons besoin de la formulation suivante:

Soit $H = \{1, \dots, h\}$ un ensemble fini non vide et Φ un ensemble d'applications $\varphi : \{1, \dots, a_\varphi\} \rightarrow H$. Si

$$\tau = \{(x_1, \dots, x_h) \in B^h : (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(a_\varphi)}) \in \rho_{a_\varphi}, \text{ pour tout } \varphi \in \Phi\},$$

nous dirons alors que Φ détermine τ .

EXEMPLE 4. Soit $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$ où les φ_i sont données par Tab. 4.

x	1	2	3	4
$\varphi_1(x)$	3	4	—	—
$\varphi_2(x)$	1	2	3	—
$\varphi_3(x)$	2	3	4	—
$\varphi_4(x)$	1	1	2	2

Tab. 4

(ici $a_{\varphi_1} = 2$, $a_{\varphi_2} = a_{\varphi_3} = 3$, $a_{\varphi_4} = 4$). Alors la relation

$$\tau = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : (x_3, x_4) \in \rho_2, (x_1, x_2, x_3) \in \rho_3, \\ (x_2, x_3, x_4) \in \rho_3, (x_1, x_1, x_2, x_2) \in \rho_4\}$$

est déterminée par Φ .

En utilisant les Lemmes 2 à 4, nous montrons que, sans perdre de généralité, nous pouvons restreindre Φ à un type assez particulier.

DÉFINITION. Soit ρ une relation h -aire. On dit que ρ est *totalement symétrique* si, pour tout $(x_1, \dots, x_h) \in \rho$ et pour toute permutation s de $\{1, \dots, h\}$, $(x_{s(1)}, \dots, x_{s(h)}) \in \rho$.

Tout d'abord, dû au fait que les relations ρ_i ($i \geq 1$) sont totalement symétriques, nous pouvons supposer que toute $\varphi \in \Phi_\tau$ est non décroissante.

DEFINITION. 1) $\varphi \in \Phi$ est dite *minimale* pour Φ si pour tout $\psi \in \Phi$

$$\text{Im } \psi \subseteq \text{Im } \varphi \Rightarrow \psi = \varphi.$$

2) φ est dite *intrinsèque* pour Φ si elle est injective et minimale.

Ce qui suit est la forme normale de τ .

LEMME 5. Soit τ déterminée par Φ . On note Λ l'ensemble des applications intrinsèques de Φ et

$$m := \max\{|\text{Im } \varphi| : \varphi \in \Phi \setminus \Lambda\}.$$

Alors pour tout $b > m$, la relation τ est déterminée par un ensemble d'applications non décroissantes Ψ tel que:

- 1) Λ est l'ensemble des applications intrinsèques de Ψ ,
- 2) toutes les applications de $\Psi \setminus \Lambda$ sont des applications presque injectives de $\{1, \dots, b\}$ dans H , et vérifient

$$\{|\text{Im } \varphi| : \varphi \in \Phi \setminus \Lambda\} = \{|\text{Im } \psi| : \psi \in \Psi \setminus \Lambda\}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in \Phi$ tel que $a_\varphi < b$ ou tel que φ n'est pas presque injective. Par le Lemme 2, la relation τ est déterminée par:

$$\Phi' = \{\Phi \setminus \{\varphi\}\} \cup \{\varphi_{b_j}, j \in J\}$$

où J et φ_{b_j} sont définis au Lemme 2 et ce qui le précède. Il est clair que chaque $\varphi_{b_j} : \{1, \dots, b\} \rightarrow H$ est presque injective et satisfait

$$|\text{Im } \varphi_{b_j}| = |\text{Im } \varphi|.$$

En répétant ce processus, on aboutit à un ensemble Π tel que τ est déterminée par Π , $\Lambda \subseteq \Pi$ et toutes les applications non injectives de Π satisfont (2). Supposons que $\varphi \in \Pi$ est injective et que $\text{Im } \psi \subset \text{Im } \varphi$ pour un $\psi \in \Pi$. On pose

$$\Pi' = \Pi \setminus \{\varphi\} \cup \{\varphi_{b_j}, j \in \text{Im } \varphi \setminus \text{Im } \psi\}.$$

De même ici, toutes les φ_{b_j} sont presque injectives et satisfont (2). On répète ce processus jusqu'à obtenir un ensemble M tel que:

- a) τ est déterminée par M ,
- b) $\Lambda \subseteq M$,
- c) toutes les applications non injectives de M satisfont (2),
- d) il n'existe pas d'application injective $\varphi \in M$ tel que $\text{Im } \psi \subseteq \text{Im } \varphi$ pour un $\psi \in M$.

Finalement, soit $\varphi \in M$, φ injective et soit $\text{Im } \varphi = \text{Im } \psi$ pour un $\psi \in M$, $\psi \neq \varphi$. Par le Lemme 4, on peut éliminer φ , i.e. la relation τ est déterminée par $M \setminus \{\varphi\}$. On peut ainsi aboutir à un ensemble Ψ , vérifiant a), b), c), d) et la condition suivante:

- e) pour toutes applications φ et $\psi \in \Psi$, φ injective, on a $\text{Im } \varphi = \text{Im } \psi \Rightarrow \varphi = \psi$.

Soit alors $\alpha \in \Psi$ ne satisfaisant pas (2). Alors α est injective et $\text{Im } \beta \subseteq \text{Im } \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ pour tout $\beta \in \Psi$.

Par la construction, tout $\gamma \in \Psi \setminus \Phi$ satisfait (2) et $\text{Im } \gamma = \text{Im } \varphi$ pour un $\varphi \in \Phi$, il en découle que α est intrinsèque pour Φ , i.e. $\alpha \in \Lambda$. $\square$

DÉFINITION. Soit $h \geq 1$. On pose

$$\sigma_h = \{(x_1, \dots, x_h) \in B^h : (x_1, x_1, x_2, \dots, x_h) \in \rho_{h+1}\}.$$

On a

LEMME 6. 1) Pour $t > h \geq 1$, et $1 \leq j \leq h$,

$$(5) \quad \sigma_h = \{(x_1, \dots, x_h) : (x_2, \dots, x_{j-1}, x_1, \dots, x_1, x_j, \dots, x_h) \in \rho_t\}.$$

2)

$$(6) \quad \text{Pol } \sigma_2 \supset \text{Pol } \sigma_3 \supset \dots$$

DÉMONSTRATION. 1) Découle du Lemme 2 et de la symétrie totale de ρ_t .

2) Soit $h > 1$. On a

$$\sigma_h = \{(x_1, \dots, x_h) : (x_1, x_1, x_2, \dots, x_h) \in \sigma_{h+1}\}$$

(ceci est un cas particulier du Lemme 2). Il en découle que $\text{Pol } \sigma_2 \supseteq \text{Pol } \sigma_3 \supseteq \dots$.
Démontrons que l'inclusion est stricte:

On définit une opération h -aire f par

$$f(0, 0, \dots, 0) = f(1, 0, \dots, 0) = f(0, 1, 0, \dots, 0) = f(0, 0, \dots, 1) = 0$$

et $f(x) = \infty$ sinon.

Nous montrons que $f \in \text{Pol } \sigma_h \setminus \text{Pol } \sigma_{h+1}$. Vu que les vecteurs colonnes $(0, 1, 0, \dots, 0)^T, (0, 0, 1, \dots, 0)^T, \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)^T$ appartiennent à σ_{h+1} et que le vecteur colonne $(0, 0, \dots, 0)^T$ qui est formé par les valeurs de f n'appartient pas à σ_{h+1} , on déduit que $f \notin \text{Pol } \sigma_{h+1}$. On montre que $f \in \text{Pol } \sigma_h$. Soit $X := (x_{ij})$ une matrice $h \times h$ sur B tel que $(f(X_{1*}), \dots, f(X_{h*})) \notin \sigma_h$. Alors $f(X_{1*}) = \dots = f(X_{h*}) = 0$, donc $r_i = \sum_{j=1}^h x_{ij} \leq 1$, pour tout $i = 1, \dots, h$.

Il en découle que $x_{ij} \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, h\}$ et $j \in \{1, \dots, h\}$. Si l'une des colonnes a pour somme $c_i = \sum_{j=1}^h x_{ij} \neq 1$, le résultat est démontré puisque $(x_{1j}, \dots, x_{hj}) \notin \sigma_h$. On peut donc supposer que $c_1 = \dots = c_h = 1$. Ainsi la matrice X contient exactement h éléments 1 et par conséquent $r_1 = \dots = r_h = 1$, c'est-à-dire $x_{ij} = 1$ pour (un unique) $1 \leq j \leq h$, et alors $(x_{1j}, \dots, x_{hj}) \notin \sigma_h$, donc $f \in \text{Pol } \sigma_h$. $\square$

Nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 7. Soit X et Y deux sous-ensembles de $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Alors

$$\bigcap_{x \in X} \text{Pol } \rho_x \subseteq \bigcap_{y \in Y} \text{Pol } \rho_y \iff X \supseteq Y. \quad \square$$

LEMME 8. Soit Φ un ensemble d'applications $\phi : \{1, \dots, a_\phi\} \rightarrow \{1, \dots, h\}$ (où h et les a_ϕ sont des entiers positifs), et soit

$$(7) \quad I = \{|\text{Im } r|, \text{ } r \text{ intrinsèque pour } \Phi\}$$

et τ la relation h-aire sur B définie par

$$(7') \quad \tau = \{(x_1, \dots, x_h) \in B^h : (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(a_\varphi)}) \in \rho_{a_\varphi}, \forall \varphi \in \Phi\}.$$

Alors

$$(8) \quad \text{Pol } \tau \subseteq \bigcap_{i \in I} \text{Pol } \rho_i.$$

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 5, on peut supposer que Φ a la forme décrite dans ce lemme, c'est-à-dire que tout $\varphi \in \Phi$ non intrinsèque est une application presque injective de $\{1, \dots, b\}$ dans H , où b est tel que défini au Lemme 5.

Soit $i \in I$ (voir (7)). Alors $i = |\text{Im } r|$ pour un $r \in \Phi$, r intrinsèque pour Φ . On pose

$$(9) \quad \lambda := \{(x_{r(1)}, \dots, x_{r(i)}) : (x_1, \dots, x_h) \in \tau\}$$

et on montre que $\lambda = \rho_i$.

D'abord $\lambda \subseteq \rho_i$ car, pour $(x_1, \dots, x_h) \in \tau$, par (7') on a $(x_{r(1)}, \dots, x_{r(i)}) \in \rho_i$. Pour montrer que $\rho_i \subseteq \lambda$, on considère $(y_1, \dots, y_i) \in \rho_i$ arbitraire. On pose $z_{r(j)} = y_j$ pour $j = 1, \dots, i$ et $z_m = \infty$ pour tout $m \in H \setminus \text{Im } r$, et on montre que $(z_1, \dots, z_h) \in \tau$. En effet, soit $\psi \in \Phi \setminus \{r\}$, $\psi : \{1, \dots, p\} \rightarrow H$. Puisque r est intrinsèque on a que $\text{Im } \psi \not\subseteq \text{Im } r$ et par conséquent il existe un $m \in \text{Im } \psi \setminus \text{Im } r$. Il en résulte que $z_m = \infty$, donc $(z_{\psi(1)}, \dots, z_{\psi(p)}) \in \rho_p$ et par (7') on a $(z_1, \dots, z_h) \in \tau$ et $(y_1, \dots, y_i) = (z_{r(1)}, \dots, z_{r(i)}) \in \lambda$. Ce qui prouve que $\rho_i \subseteq \lambda$ et donc $\rho_i = \lambda$.

Par (9), on a que $\text{Pol } \tau \subseteq \text{Pol } \lambda = \text{Pol } \rho_i$, et puisque $i \in I$ est considéré arbitraire, (8) est démontré. $\square$

Par définition, $\bigcap_{i \in \Phi} \text{Pol } \rho_i = \mathcal{Q}$.

LEMME 9. Soit Φ , I et τ comme dans le Lemme 8. Si

$$(10) \quad M := \{|\text{Im } \mu| : \mu \text{ non-injective et minimale pour } \Phi\}$$

est fini et non-vide et m le plus grand élément de M , alors

$$\text{Pol } \tau \subseteq \text{Pol } \sigma_{m+1}.$$

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 5, on peut supposer que chaque $\mu \in M$ est presque injective. Il y a un $\mu \in M$, $\mu : \{1, \dots, b\} \rightarrow H$, μ non injective et minimale tel que $m = |\text{Im } \mu|$. Il existe un unique $s \in \text{Im } \mu$ tel que $T := \mu^{-1}(s)$ satisfait $t = |T| > 1$. On pose

$$T = \{d, d+1, \dots, d+t-1\}, \quad c = b-t+2$$

et on définit $v : \{1, \dots, c\} \rightarrow H$ par

$$v(x) = \mu(x) \quad \text{si } 1 \leq x \leq d+1 \quad \text{et} \quad v(x) = \mu(x+t-2) \quad \text{sinon}$$

(on remarque que $\text{Im } v = \text{Im } \mu$). On pose

$$(11) \quad \lambda = \{(x_{v(1)}, \dots, x_{v(c)}) : (x_1, \dots, x_h) \in \tau\}.$$

D'une manière analogue à la preuve du Lemme 8, on montre que $\lambda = \sigma_c$.

Soit $(y_1, \dots, y_c) \in \lambda$. Alors $y_i = x_{v(i)}$ ($i = 1, \dots, c$) pour un certain $(x_1, \dots, x_h) \in \tau$. La condition en (5) appliquée à μ dit que $(y_1, \dots, y_{d-1}, y_d, \dots, y_d, y_{d+1}, \dots, y_c) \in \rho_b$. Par le Lemme 6 on déduit que $(y_1, \dots, y_c) \in \sigma_c$ ce qui démontre que $\lambda \subseteq \sigma_c$.

Pour l'inclusion inverse, soit $(y_1, \dots, y_c) \in \sigma_c$. On pose $z_{v(i)} = y_i$ pour $i = 1, \dots, c$, et $z_j = \infty$ sinon. D'abord $(z_{\mu(1)}, \dots, z_{\mu(m)}) \in \rho_m$ d'après le Lemme 6. Soit $\psi \in \Phi \setminus \{\mu\}$. Par la minimalité de μ on a $\text{Im } \psi \not\subseteq \text{Im } \mu$, et donc il existe $\psi(i) \notin \text{Im } \mu$. Vu que $z_{\psi(i)} = \infty$, on déduit que $(z_{\psi(1)}, \dots, z_{\psi(a_\psi)}) \in \rho_{a(\psi)}$, ce qui prouve que $(z_1, \dots, z_h) \in \tau$ et donc $(y_1, \dots, y_c) \in \lambda$. Ainsi $\sigma_c \subseteq \lambda$, i.e. $\sigma_c = \lambda$. De (11) on déduit que $\text{Pol } \tau \subseteq \text{Pol } \lambda = \text{Pol } \sigma_c$. $\square$

Le lemme suivant relie ρ_b et σ_{b-1} .

LEMME 10. Soit $\psi : \{1, \dots, b\} \rightarrow H$ presque injective mais non injective. Alors il existe $\psi' : \{1, \dots, b-1\} \rightarrow H$ tel que

$$(x_{\psi(1)}, \dots, x_{\psi(b)}) \in \rho_b \iff (x_{\psi'(1)}, \dots, x_{\psi'(b-1)}) \in \sigma_{b-1}$$

pour tous $x_1, \dots, x_b \in B$. $\square$

Soit P un ensemble d'entiers positifs. Alors $\max P$ est le plus grand élément de P si $0 < |P| < \aleph_0$, $\max P = 0$ si $P = \emptyset$ et $\max P = \aleph_0$ si P est infini.

COROLLAIRE 11. Soit Φ , I , M , m et τ comme dans le Lemme 8. On pose $i := \max I$ et $n := \max\{|\text{Im } \phi|, \phi \in \Phi, \phi \text{ non-injective}\}$. Alors

1)

$$(12) \quad i > n \implies \text{Pol } \tau = \bigcap_{i \in I} \text{Pol } \rho_i.$$

2)

$$(13) \quad m = n \geq i \implies \text{Pol } \tau = \text{Pol } \sigma_m \cap \left(\bigcap_{j \in I} \text{Pol } \rho_j \right).$$

DÉMONSTRATION. 1) Soit $i > n$. On peut choisir $b = i$ et supposer que ϕ a la forme décrite au Lemme 5. Ainsi toutes les conditions en (5) sont exprimées en termes de ρ_j pour $j \in I$, donc $\bigcap_{j \in I} \text{Pol } \rho_j \subseteq \text{Pol } \tau$, et le Lemme 8 achève la preuve de (12).

2) Pour démontrer (13), soit $m = n \geq i$ et on choisit $b = m+1$. Par le Lemme 5 on peut supposer que tout $\phi \in \Phi$ non intrinsèque est une application presque injective, mais non injective de $\{1, \dots, m+1\} \rightarrow H$. Par le Lemme 6 on peut remplacer toute condition $(x_{\phi(1)}, \dots, x_{\phi(m+1)}) \in \rho_{m+1}$ par la condition $(x_{\nu(1)}, \dots, x_{\nu(m)}) \in \sigma_m$ où ν est une application appropriée (pas nécessairement non décroissante). Ainsi τ est déterminée par σ_m et $\{\rho_j, j \in I\}$, donc $\text{Pol } \sigma_m \cap \left(\bigcap_{j \in I} \text{Pol } \rho_j \right) \subseteq \text{Pol } \tau$.

L'inclusion inverse a été démontrée au Lemme 9 et on a donc égalité. $\square$

EXEMPLE 12. Soit $\tau = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : (x_1, x_2) \in \rho_2, (x_2, x_2, x_3) \in \rho_3, (x_2, x_2, x_4) \in \rho_3, (x_2, x_4, x_4) \in \rho_3, (x_3, x_3, x_4) \in \rho_3\}$. Alors $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_5\}$ où les ϕ_i sont données par le Tab. 5:

Tab. 5

x	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
1	1	2	2	2	3
2	2	2	2	4	3
3	—	3	4	4	4

Dans ce cas, $I = \{2\}$, $M = \{2\}$ et donc $m = n = i = 2$. Par (13) on a que

$$\text{Pol } \tau = \text{Pol } \sigma_2 \cap \text{Pol } \rho_2.$$

REMARQUE. Soit τ déterminée par Φ . On suppose que τ est donnée mais qu'aucune information au sujet de Φ ne soit disponible. Soit

$$S = \{s_1, \dots, s_t\} \text{ où } 1 \leq s_1 < \dots < s_t \leq h$$

et soit

$$\alpha_S = \{(x_{s_1}, \dots, x_{s_t}) \in \underline{2}^t : (x_1, \dots, x_h) \in \tau, x_j = \infty, \text{ pour tout } j \in H \setminus S\}.$$

On dit que S est *astrigent* pour τ si $|\alpha_S| < 2^t$. Il est facile de voir que les ensembles astringents minimaux (pour $\subseteq$) S avec $|S| = |\alpha_S| = t > 0$, correspondent exactement aux applications intrinsèques φ_S (définies par $\varphi_S(i) = s_i$ pour $i = 1, \dots, t$).

LEMME 14. Soit $Y \neq \emptyset$ un ensemble d'indices, $U_y \subseteq N$ pour tout $y \in Y$, et soit $U = \bigcap_{y \in Y} U_y$.

Si $\max U \geq \max U_z$ pour un $z \in Y$, alors

$$(14) \quad \bigvee_{y \in Y} \left(\bigcap_{u \in U_y} \text{Pol } \rho_u \right) = \bigcap_{u \in U} \text{Pol } \rho_u.$$

(Le sup est dans le treillis des clones). $\square$

L'équation (14) n'est pas nécessairement vraie dans d'autres cas:

EXEMPLE. Soit $U_1 = \{3\}$, $U_2 = \{4\}$. Alors $\text{Pol } \sigma_2 \supseteq \text{Pol } \rho_3 \vee \text{Pol } \rho_4$ (ici $U = \emptyset$).

3. Intervalle booléen de clones

DÉFINITION 16. Soit E et F des clones sur B , $E \subset F$. On dit que l'intervalle $[E, F]$ (du treillis des clones L_B sur B) est *booléen* s'il est isomorphe (en tant que treillis) au treillis $\mathcal{P}$ des sous-ensembles de N (ordonné par l'inclusion).

On pose

$$(15) \quad E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Pol } \rho_i, \quad F = \bigvee_{i=1}^{\infty} \text{Pol } \rho_i.$$

La correspondance

$$\begin{aligned} \chi: \mathcal{P} &\longrightarrow [E, F] \\ X &\longmapsto \chi(X) = \bigcap_{j \in N \setminus X} \text{Pol } \rho_j \end{aligned}$$

est un plongement (par rapport à l'ordre de $\mathcal{P}$). Cependant χ n'est pas surjective et $\chi(\mathcal{P})$ n'est pas un sous-treillis de L_B (voir la Remarque 21). Par conséquent, χ ne peut être utilisée pour montrer que l'intervalle $[E, F]$ est booléen. Nous allons y remédier en modifiant χ .

NOTATION 17. Soit T un clone. On note $\chi_T(X) = T \cap \chi(X)$ pour tout $X \subseteq N$. Notre but est de trouver un clone T tel que χ_T est une bijection de $\mathcal{P}$ sur un intervalle de L_B .

THÉOREME 18. Soit $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Pol } \rho_i$ et $T = \bigcap_{m=2}^{\infty} \text{Pol } \sigma_m$. On pose

$$\begin{aligned} \chi_T: \mathcal{P} &\rightarrow [E, T] \\ X &\mapsto \chi_T(X) = T \cap \left(\bigcap_{x \in N \setminus X} \text{Pol } \rho_x \right). \end{aligned}$$

Alors χ_T est un isomorphisme du treillis $(\mathcal{P}(N), \subseteq)$ (des sous-ensembles de N) sur l'intervalle $[E, T]$ du treillis des clones. Donc $[E, T]$ est un treillis booléen et tout clone C entre E et T est de la forme $T \cap \left(\bigcap_{x \in X} \text{Pol } \rho_x \right)$ pour un unique $X \subseteq N$.

DÉMONSTRATION. Soit τ une relation h -aire sans répétition tel que $E \subseteq \text{Pol } \tau$. Alors τ est construite par les relations ρ_i ($i = 2, 3, \dots$). Par le Lemme 5 la relation τ est déterminée par une famille Φ tel que toute application non intrinsèque de Φ est une application presque injective de $\{1, \dots, b\}$ dans $H = \{1, \dots, h\}$. Si $I = \{| \text{Im } r |, r \text{ intrinsèque pour } \Phi\}$, on a par le Lemme 8 que

$$T \cap \text{Pol } \tau \subseteq T \cap \left(\bigcap_{i \in I} \text{Pol } \rho_i \right).$$

Soit ψ une application non intrinsèque de Φ . Alors $\psi : \{1, \dots, b\} \rightarrow H$ est presque injective. Nous savons par le Lemme 10 qu'il existe

$$\psi' : \{1, \dots, b-1\} \rightarrow H$$

tel que

$$(x_{\psi(1)}, \dots, x_{\psi(b)}) \in \rho_b \iff (x_{\psi'(1)}, \dots, x_{\psi'(b-1)}) \in \sigma_{b-1}.$$

Il est facile de voir que τ peut être construite par les relations ρ_i , $i \in I$ et σ_{b-1} . Puisque $T = \bigcap_{m=2}^{\infty} \text{Pol } \sigma_m$, on a que $T \cap \left(\bigcap_{i \in I} \text{Pol } \rho_i \right) \subseteq \text{Pol } \tau$ et donc

$$T \cap \text{Pol } \tau \subseteq T \cap \left(\bigcap_{i \in I} \text{Pol } \rho_i \right) \subseteq T \cap \text{Pol } \tau.$$

Donc $T \cap \text{Pol } \tau = T \cap \left(\bigcap_{i \in I} \text{Pol } \rho_i \right)$.

Ainsi l'intervalle $[E, T]$ est inf-engendré par le clone $T \cap \text{Pol } \tau$ avec $E \subseteq \text{Pol } \tau$ (i.e. tout clone dans cet intervalle est de la forme $T \cap \left(\bigcap_{\tau \in R} \text{Pol } \tau \right)$ où R est un ensemble de relations finitaires τ sur B tel que $E \subseteq \text{Pol } \tau$).

On a donc démontré que chaque clone dans l'intervalle $[E, T]$ est de la forme $T \cap \left(\bigcap_{x \in X} \text{Pol } \rho_x \right)$, en d'autres termes χ_T est surjective. On a vu au début de la Section 2 que χ est croissante, donc χ_T l'est aussi; reste à montrer qu'elle est injective.

On montre d'abord que $f_m \in T$, pour tout $m \geq 1$ (les f_m ont été définies à la Section 2). Pour montrer que $f_m \in \text{Pol } \sigma_n$, on considère une matrice $A = [a_{ij}]$ de type $n \times m$ et on suppose que le vecteur $(f_m(A_{1*}), \dots, f_m(A_{n*}))$ (des valeurs de f sur les lignes de A) n'appartient pas à σ_n .

Alors $f_n(A_{i*}) \neq \infty$ pour $i = 1, \dots, n$, donc par la définition de f_n , $f_n(A_{i*}) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$. Par la définition de f_n on a $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, n$. Alors il existe un t tel que $a_{1t} = 1$. Comme $a_{jt} \in \{0,1\}$, pour $j = 2, \dots, n$, ceci montre que $A* t = (a_{1t}, \dots, a_{nt}) \notin \sigma_n$ (autrement, par la définition de σ_n on aurait $(1, 1, a_{2t}, \dots, a_{nt}) \in \rho_{n+1}$ ce qui est impossible). Ainsi $f_m \in T$, $\forall m \geq 1$. Pour achever la démonstration, on considère X , $X' \subseteq N$ et $n \in X \setminus X'$.

Par le Lemme 1 et ce qui vient d'être démontré, $f_n \in T \cap (\bigcap_{x \in N \setminus X} \text{Pol } \rho_x)$ tandis que $f_n \notin T \cap (\bigcap_{x \in N \setminus X'} \text{Pol } \rho_x)$, donc $f_n \in \chi_T(X) \setminus \chi_T(X')$ ce qui prouve que χ_T est injective. $\square$

La remarque suivante est bien connue.

REMARQUE 19. On considère $P(N)$ ordonné par l'inclusion. Alors $P(N)$ admet une antichaîne et une chaîne qui sont de cardinalité la puissance du continu.

COROLLAIRE 20. L'intervalle $[E, T]$ admet une chaîne et une antichaîne de cardinalité $2^{\aleph_0}$.

REMARQUE 21. χ n'est pas une application surjective de P sur $[E, T]$.

DÉMONSTRATION. Similaire à celle de la Remarque 7 de [22]. $\square$

Remerciements

Les auteurs remercient l'examineur de cet article pour ses innombrables suggestions.

Références

- [1] AGOSTON, I., DEMETROVICS, J., HANNÁK, L., On the cardinality of clones containing all constants, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, North Holland 43(1985).
- [2] BENZAKEN, C., *Contribution des structures algébriques ordonnées à la théorie des réseaux*, Thèse d'Etat, Grenoble, France, 1968.

- [3] BENZAKEN, C., Post's closed systems and the weak chromatic number of hypergraphs, *Discrete Mathematics* 23(1978), 77-84.
- [4] BODNARCUK, V.G., KALUZNIN, L.A., KOTOV, V.N., ROMOV, B.A., Galois theory for Post algebras I-II (En russe), *Kibernetika* 5(1969), 1-10 et 5(1969), 1-9;
Version anglaise: *Cybernetics* 5(1969), 243-252 et 531-539.
- [5] DEMETROVICS, J., HANNÁK, L., MARCENKOV, S.S., Some remarks on the structure of P_3 , *C.R. Math. Rep. Acad. Sci., Canada* 2(1980), 251-219.
- [6] DEMETROVICS, J., HANNÁK, L., MARCENKOV, S.S., On closed classes of self-dual functions in P_3 , *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, North Holland 28(1981), 183-189.
- [7] DEMETROVICS, J., HANNÁK, L., RÓNYAI, L., Prime element algebras with transitive automorphism groups, *C.R. Comp. Rend. Math. Acad. Sci., Canada* 3(1981), 1, 19-22.
- [8] DEMETROVICS, J., HANNÁK, J., The number of reducts of a preprimal algebras, *Alg. Univ.* 16(1983), 178-185.
- [9] DEMETROVICS, J., HANNÁK, J., On construction of large set of clones, Preprint Computer Automat. Inst. HAS, Budapest, 18 p. (1984).
- [10] JABLONSKII, S.V., Functional constructions in a k -valued logic (En russe), *Trudy Mat. Inst. Steklov* 51(1958), 5-142. MR 21 #3331.
- [11] JANOV, Ju. I., MUCŇNIK, A.A., Existence of k -valued closed classes without a finite basis (En russe), *Dokl. Akad. Nauk. SSR* 127(1959), 44-46, MR 21 #7174.
- [12] MacKENZIE, R., McNULTY, G., TAYLOR, W., Algebras, Lattices, Varieties (A paraître).

- [13] MAL'CEV, A.I., Iterative algebras and Post's varieties (En russe), *Algebra i Logika* 5(1966), 5-24; Version anglaise dans: *The Metamathematics of Algebraic Systems*, Collected papers 1936-1967, Studies in Logics and Foundations of Mathematics, Vol. 66, North Holland, 1971.
- [14] MARCENKOV, S.S., On closed classes of self-dual functions in k -valued logics (Russian), *Problemy Kibernet.* 36(1979).
- [15] POST, E.L., The two-valued iterative systems of mathematical logic, *Ann. Math. Studies* 5(1941), Princeton Univ. Press.
- [16] ROSENBERG, I.G., La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B*, 260(1965), 3817-3819, MR 31 #1185.
- [17] ROSENBERG, I.G., Über die funktionale Vollständigkeit in der mehrwertigen Logiken, *Rozprawy Československé Akad. Ved., Rada Mat. Prir, Ved.* 80, 4(1970), 1-93, MR 45 #1732.
- [18] ROSENBERG, I.G., Composition of functions on finite sets, completeness and relations, a short survey, *Multiple-Valued Logic and Computer Science* (éd.: D. Rine), North Holland (1977), 144-187. Second Edition *ibid.* 1984, 150-192.
- [19] ROSENBERG, I.G., Partial clones (En préparation).
- [20] HADDAD, L., *Le treillis des clones partiels sur un univers fini et ses coatomemes*, Thèse de Philosophie Doctor, Université de Montréal, Septembre 1986.
- [21] HADDAD, L., ROSENBERG, I.G., Familles larges de clones sur un univers fini, Preprint CRM-1352, Université de Montréal, Mars 1986.
- [22] HADDAD, L., ROSENBERG, I.G., Famille large de clones sur un univers fini, *Ann. sc. math. Québec*,

Lucien Haddad
Pure Mathematics Department
University of Waterloo
Waterloo, Ontario
N2L 3G1

Ivo G. Rosenberg
Département de mathématiques et de
statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3C 3J7

Manuscrit reçu le 29 août 1986.
Révisé le 25 juin 1987.

Recherche subventionnée par le C.R.S.N.G. ainsi que par le F.C.A.C.