

PROPRIÉTÉS ET THÉORÈMES DE CONVERGENCE POUR UNE INTÉGRALE DE TYPE RIEMANN GÉNÉRALISÉE*

J. Dubois et A. M'Khalfi

Abstract

In this paper we show that the integral we have defined in [2] is absolutely continuous, countably additive and has the restriction property. Furthermore, we prove two convergence results for this integral; one of which being a dominated convergence theorem.

Résumé

Dans ce travail nous montrons que l'intégrale que nous avons introduite dans [2] possède toutes les propriétés désirées: propriétés de restriction, d'additivité, de continuité absolue et d'additivité dénombrable. De plus, nous établissons deux théorèmes de convergence pour cette intégrale dont en particulier un théorème de convergence dominée.

1. Introduction

Dans [2] nous avons introduit une nouvelle définition pour l'intégration des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace de Banach. Nous y sommes arrivés en combinant deux approches différentes; une approche initiée par J. Kurzweil [5] et R. Henstock [3,4] basée sur la notion de jauge et une approche due à R.S. Phillips [8] basée sur la notion de série approximativement inconditionnellement sommable. Nous avons ainsi obtenu une classe de fonctions

contenant la classe des fonctions intégrables au sens de Birkhoff [1]. Dans ce travail, nous poursuivons l'étude de cette intégrale en y établissant les principales propriétés et certains théorèmes de convergence.

C'est ainsi qu'à la Section 2 nous montrons que l'intégrale ainsi définie possède toutes les bonnes propriétés habituellement désirées: celles de restriction, d'additivité, de continuité absolue et de σ -additivité. Par la suite, dans la dernière section, nous établissons un théorème de convergence dominée ainsi qu'un autre théorème de convergence valable dans le cas où l'intervalle de définition de la suite de fonctions intégrables est de mesure finie et qui, dans ce cas, est une généralisation du théorème de la convergence dominée.

Nous sommes conscients qu'il est possible d'étendre cette théorie sans trop de complications au cas des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace localement convexe complet. D'ailleurs les preuves que nous allons présenter sont conçues dans cet esprit. Signalons également qu'une grande partie des démonstrations que nous allons présenter sont des adaptations et des généralisations des démonstrations de résultats correspondants pour l'intégrale à la Kurzweil-Henstock (telles qu'on les retrouve dans [6] ou [7] par exemple) tandis que d'autres sont des adaptations de démonstrations que l'on retrouve dans Phillips [8].

Les notations utilisées dans ce travail sont tout à fait cohérentes avec celles qui ont été introduites dans [2]. Ainsi:

- X dénotera un espace de Banach réel ou complexe avec norme $\|\cdot\|$,
- S, S', S_1, S_2 dénoteront des intervalles de $\mathbb{R}$,
- $M(S)$ (simplement M lorsqu'aucune confusion ne sera possible) dénotera la classe des ensembles (Lebesgue-) mesurables de S ,
- si $E \in M$, $L(E)$ dénotera la mesure de Lebesgue de E ,
- $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ représenteront des divisions étiquetées (voir définition 1 de [2]) de S et nous noterons toujours $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$, $\mathcal{D}' = \{(z'_i, J'_i)\}$, $\mathcal{D}_1 = \{(z_i^1, J_i^1)\}$, etc.,

• $\gamma, \gamma', \gamma_1, \gamma_2$ représenteront des jauges de S (voir définition 2 de [2]),

• D étant un ensemble dénombrable (ou fini), $F(D)$ dénotera l'ensemble des parties finies de D , ordonné par inclusion et $\Pi, \Pi', \Pi_1, \Pi_2, \Pi(D), \Pi_1(D), \dots$ représenteront des éléments de $F(D)$. Le plus souvent D sera une division étiquetée $\mathcal{D}$ et ainsi lorsque nous écrirons $\Pi \geq \Pi(\mathcal{D})$, il sera implicite que $\Pi \in F(\mathcal{D})$, $\Pi(\mathcal{D}) \in F(\mathcal{D})$ et que nous avons $\Pi \supseteq \Pi(\mathcal{D})$.

De même si D et D' sont deux ensembles dénombrables, on notera par $\Pi(D, D'), \Pi_1(D, D'), \dots$ des éléments de $F(D) \times F(D')$. Ainsi lorsque $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ seront deux divisions étiquetées et que nous écrirons $(\Pi_1, \Pi_2) \geq \Pi(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$, il sera implicite que $\Pi(\mathcal{D}', \mathcal{D}'') = (\Pi', \Pi'')$ où $\Pi' \in F(\mathcal{D}')$, $\Pi'' \in F(\mathcal{D}'')$, $\Pi_1 \in F(\mathcal{D}')$, $\Pi_2 \in F(\mathcal{D}'')$ et que $\Pi_1 \supseteq \Pi'$, $\Pi_2 \supseteq \Pi''$,

• étant donnée une fonction $f: S \rightarrow X$, la somme de Riemann formelle associée à f et à $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$ sera notée $\sum_i f(z_i) L(J_i) = \sum_{\mathcal{D}} f(z) L(J) = \sum_{\mathcal{D}} f(\mathcal{D})$. D'autre part, si $\Pi \in F(\mathcal{D})$ il est clair que $\sum_{\Pi} f(\mathcal{D})$ dénotera l'élément de X défini par $\sum_{k=1}^n f(z_{i_k}) L(J_{i_k})$ où les z_{i_k} et les J_{i_k} sont tels que $\Pi = \{(z_{i_1}, J_{i_1}), \dots, (z_{i_n}, J_{i_n})\}$,

• si A est un sous-ensemble d'un espace topologique nous noterons comme à l'accoutumée par $\bar{A}$ la fermeture de A , par $^{\circ}A$ son intérieur, par ∂A sa frontière et par CA le complémentaire de A .

Avant de débiter, il est en outre essentiel de rappeler ici la définition centrale de [2]. Une fonction $f: S \rightarrow X$ est dite *intégrable sur* S s'il existe un élément de X noté $\int_S f$ vérifiant la propriété suivante: $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma$ une jauge sur S telle que pour toute division étiquetée $\mathcal{D}$ de S plus fine que γ , $\exists \Pi_0 \in F(\mathcal{D})$ satisfaisant $\|\sum_{\Pi} f(\mathcal{D}) - \int_S f\| < \varepsilon, \forall \Pi \geq \Pi_0$.

De même il est très important de signaler que lorsque nous dirons qu'une fonction est intégrable nous entendrons toujours l'intégrabilité dans le sens de cette définition que nous venons de rappeler. Lorsqu'il s'agira d'une autre intégrale nous le préciserons explicitement. Enfin rappelons que $\mathcal{D}$ est dite plus fine que γ (ou γ -fine) si $(z, J) \in \mathcal{D} \Rightarrow J \subseteq \gamma(z)$.

2. Propriétés principales de l'intégrale

Dans cette section nous montrerons que l'intégrale introduite dans [2] possède toutes les propriétés désirées d'une intégrale.

LEMME 1. Soit $S' \subseteq S$ et soit γ une jauge sur S telle que pour toutes divisions étiquetées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de S plus fines que γ on a que $\sum_{\mathcal{D}} f(\mathcal{D})$ et $\sum_{\mathcal{D}'} f(\mathcal{D}')$ sont inconditionnellement proches relativement à $\varepsilon > 0$. Alors, pour toutes divisions étiquetées E et E' de S' plus fines que $\gamma|_{S'}$, on a que $\sum_E f(E)$ et $\sum_{E'} f(E')$ sont aussi inconditionnellement proches relativement à ε .

DÉMONSTRATION. Posons $\gamma' = \gamma|_{S'}$, et $\gamma'' = \gamma|_{S-S'}$, et soit E et E' des divisions étiquetées de S' plus fines que γ' . Puisque $S-S'$ est une réunion d'au plus deux intervalles disjoints, on peut choisir une division étiquetée C de $S-S'$ qui est plus fine que γ'' . Posons $\mathcal{D} = E \cup C$ et $\mathcal{D}' = E' \cup C$; ce sont deux divisions étiquetées de S plus fines que γ . Par hypothèse, il existe $\Pi(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = (\Pi_1, \Pi_2)$ tel que :

$$\forall (\Pi_1, \Pi_2) \geq \Pi(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \text{ on a } \left\| \sum_{\Pi_1} f(\mathcal{D}) - \sum_{\Pi_2} f(\mathcal{D}') \right\| < \varepsilon.$$

Posons $\Pi(E, E') = (\Pi_1, \Pi_2)$, $\Pi(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = (\Pi_1, \Pi_2)$ et $\Pi^* = \Pi_1 \cup \Pi_2$. Remarquons qu'alors $\sum_{\Pi^*} f(\mathcal{D}) = \sum_{\Pi^*} f(\mathcal{D}')$ et donc si $(\Pi', \Pi'') \geq \Pi(E, E')$ il vient : $\left\| \sum_{\Pi'} f(E) - \sum_{\Pi''} f(E') \right\| = \left\| \sum_{\Pi' \cup \Pi^*} f(\mathcal{D}) - \sum_{\Pi'' \cup \Pi^*} f(\mathcal{D}') \right\| < \varepsilon$. $\square$

Le lemme précédent et le théorème 3 de [2] nous permettent alors d'obtenir la proposition suivante :

PROPOSITION 1 (propriété de restriction). Si S' est un sous-intervalle de S et si f est intégrable sur S , alors f est intégrable sur S' .

PROPOSITION 2. Si f est intégrable sur S , continue à droite en $z_0 \in S$, alors $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} f = f(z_0)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ tel que

$$z \in S \text{ et } 0 \leq z - z_0 < \delta \Rightarrow \|f(z) - f(z_0)\| < \varepsilon/2.$$

Pour h quelconque, $0 < h < \delta$, la fonction $z \mapsto 1/h (f(z) - f(z_0))$ étant intégrable sur $[z_0, z_0 + h]$ (prop. 4 de [2] et prop. 1) prenons γ une jauge sur $[z_0, z_0 + h]$, $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$ γ -fine et $\Pi(\mathcal{D})$ tels que

$$\left\| \sum_{\Pi(\mathcal{D})} \frac{(f(z_i) - f(z_0))}{h} L(J_i) - \int_{[z_0, z_0 + h]} \frac{(f - f(z_0))}{h} \right\| < \varepsilon/2.$$

Il suit que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0 + h]} f - f(z_0) \right\| &\leq \left\| \int_{[z_0, z_0 + h]} \frac{f - f(z_0)}{h} - \sum_{\Pi(\mathcal{D})} \frac{f(z_i) - f(z_0)}{h} L(J_i) \right\| \\ &\quad + \sum_{\Pi(\mathcal{D})} \frac{\|f(z_i) - f(z_0)\|}{h} L(J_i) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \sum_{\Pi(\mathcal{D})} \frac{L(J_i)}{h} \leq \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSITION 3. Si $S = S_1 \cup S_2$ où $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ et si f est intégrable sur chacun des intervalles S_1 et S_2 alors f est intégrable sur S et on a:

$$\int_S f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f.$$

DÉMONSTRATION. Soit z_0 l'unique point de $\partial S_1 \cap \partial S_2$ que l'on peut supposer appartenant à S_2 . On remarquera que f est intégrable sur $S'_1 = S_1 \cup \{z_0\}$ et que $\int_{S'_1} f = \int_{S_1} f$.

Soit $\varepsilon > 0$. f étant intégrable sur S'_1 (respectivement S_2), le théorème 3 de [2] nous assure qu'il existe γ_1 (respectivement γ_2) des jauges sur S'_1 et S_2 telles que: $\forall \mathcal{D}, \mathcal{D}', \gamma_k$ -fines ($k = 1, 2$) on a que $\int f(\mathcal{D})$ et $\int f(\mathcal{D}')$ sont inconditionnellement proches relativement à $\varepsilon/2$.

Définissons une jauge γ sur $S'_1 \cup S_2$ de la façon suivante:

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_1(s) \cap C\overline{S}_2 & \text{si } s \in S_1 \\ \gamma_2(s) \cap C\overline{S}_1 & \text{si } s \in S_2 - \{z_0\} \\ \gamma_1(s) \cap \gamma_2(s) & \text{si } s = z_0. \end{cases}$$

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux divisions étiquetées de S plus fines que γ .
Observons tout d'abord que d'après la définition même de γ , z_0 est nécessairement une étiquette d'un élément (z_0, J_{i_0}) de $\mathcal{D}$ et aussi d'un élément (z_0, J'_{i_1}) de $\mathcal{D}'$.

Posons $E_1 = \{(z_i, J_i \cap S'_1); (z_i, J_i) \in \mathcal{D}, z_i \in S'_1\}$ (on dira que E_1 est la restriction de $\mathcal{D}$ à S'_1 et on écrira $E_1 = \mathcal{D}|S'_1$), $E'_1 = \mathcal{D}'|S'_1$. E_2 et E'_2 seront définies de façon analogue. Pour $k = 1, 2$ ce sont des divisions étiquetées de S_k qui sont γ_k -fines et donc $\exists \Pi(E_k, E'_k)$ tel que, $\forall (\Pi', \Pi'') \geq \Pi(E_k, E'_k)$ on a:

$$\|\sum_{\Pi'} f(E_k) - \sum_{\Pi''} f(E'_k)\| < \epsilon/2.$$

Posons $\Pi(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \Pi(E_1, E'_1) \cup \Pi(E_2, E'_2) \cup ((z_0, J_{i_0}), (z_0, J'_{i_1}))$. Ainsi si $(\Pi', \Pi'') \geq \Pi(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ on a, en posant $\Pi'_1 = \{(z_i, J_i) \in \Pi'; z_i \in S'_1, z_i \neq z_0\}$ et similairement pour les autres,

$$\begin{aligned} \|\sum_{\Pi'} f(\mathcal{D}) - \sum_{\Pi''} f(\mathcal{D}')\| &= \|\sum_{\Pi'_1} f(E_1) + \sum_{\Pi'_2} f(E_2) + f(z_0)L(J_{i_0}) \\ &\quad - \sum_{\Pi''_1} f(E'_1) - \sum_{\Pi''_2} f(E'_2) - f(z_0)L(J'_{i_1})\| \\ &\leq \|\sum_{\Pi'_1} f(E_1) + f(z_0)L(J_{i_0} \cap S'_1) - \sum_{\Pi''_1} f(E'_1) - f(z_0)L(J'_{i_1} \cap S'_1)\| \\ &\quad + \|\sum_{\Pi'_2} f(E_2) + f(z_0)L(J_{i_0} \cap S_2) - \sum_{\Pi''_2} f(E'_2) - f(z_0)L(J'_{i_1} \cap S_2)\| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \end{aligned}$$

ce qui montre que f est intégrable sur S .

On démontre alors facilement que $\int_S f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f$. $\square$

PROPOSITION 4. Si f est intégrable sur S et si $g(z) = f(z)$ sauf peut-être sur un ensemble dénombrable, alors g est intégrable sur S et on a:

$$\int_S f = \int_S g.$$

DÉMONSTRATION. Soit $D = \{d_n \in S; n = 1, 2, \dots \text{ et } g(d_n) \neq f(d_n)\}$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour $n = 1, 2, \dots$, soit $\delta_n > 0$ tel que $\|f(d_n) - g(d_n)\| \delta_n < \varepsilon/2^{n+2}$. Soit de plus γ une jauge sur S telle que $\forall \mathcal{D}$ γ -fine la série $\sum_{\mathcal{D}} f(\mathcal{D})$ est inconditionnellement sommable vers $\int_S f$ relativement à $\varepsilon/2$. Définissons alors une jauge $\bar{\gamma}$ sur S de la façon suivante:

$$\bar{\gamma}(z) = \begin{cases} \gamma(z) & \text{si } z \in S-D \\ \gamma(d_n) \cap (d_n - \delta_n, d_n + \delta_n) & \text{si } z = d_n \in D. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{D}$ une division étiquetée de S qui est $\bar{\gamma}$ -fine. Alors $\mathcal{D}$ est γ -fine et $\exists \Pi(\mathcal{D})$ tel que $\|\sum_{\Pi} f(\mathcal{D}) - \int_S f\| < \varepsilon/2$, $\forall \Pi \geq \Pi(\mathcal{D})$. Ainsi pour $\Pi \geq \Pi(\mathcal{D})$ on a:

$$\begin{aligned} \|\sum_{\Pi} g(\mathcal{D}) - \int_S f\| &\leq \|\sum_{\Pi} g(\mathcal{D}) - \sum_{\Pi} f(\mathcal{D})\| + \|\sum_{\Pi} f(\mathcal{D}) - \int_S f\| \\ &\leq 2 \sum_n \|g(d_n) - f(d_n)\| \delta_n + \varepsilon/2 < \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui montre que g est intégrable sur S et que son intégrale est $\int_S f$. $\square$

THÉOREME 1 (Continuité absolue sur les intervalles). Si f est intégrable sur S , alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si I est un sous-intervalle de S vérifiant $L(I) < \delta$, on a $\|\int_I f\| < \varepsilon$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons un entier N tel que $9/N < \varepsilon$. Soient γ_N une jauge sur S , $\mathcal{D}_N = \{(z_i, J_i)\}$ une division étiquetée γ_N -fine et $\Pi_N \in F(\mathcal{D}_N)$ tels que $\|\sum_{\Pi} f(\mathcal{D}_N) - \int_S f\| < 1/N$, $\forall \Pi \geq \Pi_N$. Remarquons alors que $\|\sum_{\Pi'} f(\mathcal{D}_N)\| < 2/N$, $\forall \Pi' \in F(\mathcal{D}_N)$ tel que $\Pi' \cap \Pi_N = \emptyset$. On peut de plus supposer que γ_N est telle que pour tout $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ γ_N -fines $\sum f(\mathcal{D})$ et $\sum f(\mathcal{D}')$ sont inconditionnellement proches relativement à $1/N$.

Soit $\delta > 0$ choisi tel que $\delta M < \varepsilon/9$ où $M = \max_{\Pi_N} \|f(z_i)\|$. Soit I un sous-intervalle de S tel que $L(I) < \delta$ et montrons que $\|\int_I f\| < \varepsilon$. A cette fin, prenons:

γ_I une jauge sur I que l'on peut considérer plus fine que $\gamma_N|_I$,

$\mathcal{D}_I$ une division étiquetée de I qui est γ_I -fine et $\Pi(\mathcal{D}_I) \in F(\mathcal{D}_I)$ tels que $\|\sum_{\Pi} f(\mathcal{D}_I) - \int_I f\| < \epsilon/3$, $\forall \Pi \geq \Pi(\mathcal{D}_I)$.

Si on pose $\bar{I} = [\alpha, \beta]$, alors $\exists i_1$ et i_2 tels que $\alpha \in J_{i_1}$ et $\beta \in J_{i_2}$. On devra considérer beaucoup de cas différents suivant que l'intervalle I est ouvert ou fermé à gauche, ouvert ou fermé à droite, que les éléments (z_{i_1}, J_{i_1}) et (z_{i_2}, J_{i_2}) ont leurs étiquettes à l'intérieur ou à l'extérieur de I . Tous ces cas peuvent cependant se ramener aux deux cas suivants ou à leurs combinaisons.

1^{er} cas: $z_{i_1} \notin I$ et $z_{i_2} \notin I$.

Posons $E = \{(z_{i_1}, J_{i_1} \cap CI), (z_{i_2}, J_{i_2} \cap CI)\} \cup \mathcal{D}_I \cup \mathcal{D}'_N$ où $\mathcal{D}'_N = \{(z_i, J_i); J_i \cap I = \emptyset \text{ et } i \neq i_1, i \neq i_2\}$. Alors E et $\mathcal{D}_N$ sont γ_N -fines et $\exists \Pi(E, \mathcal{D}_N) = (\Pi(E), \Pi(\mathcal{D}_N))$ vérifiant

$$\|\sum_{\Pi_1} f(E) - \sum_{\Pi_2} f(\mathcal{D}_N)\| < 1/N, \quad \forall (\Pi_1, \Pi_2) \geq \Pi(E, \mathcal{D}_N).$$

On peut prendre $\Pi(E, \mathcal{D}_N)$ de telle manière que $\Pi(E)$ comprend tous les éléments de $\Pi(\mathcal{D}_I)$ ainsi que i_1 et i_2 et de plus de telle manière que les restrictions de $\Pi(E)$ et $\Pi(\mathcal{D}_N)$ à $S - (I \cup J_{i_1} \cup J_{i_2})$ soient identiques. Alors si on pose:

$$\bar{\Pi}_1 = \text{la restriction de } \Pi(E) \text{ à } I \cup (z_{i_1}, J_{i_1}) \cup (z_{i_2}, J_{i_2})$$

$$\bar{\Pi}_2 = \Pi(E) - \bar{\Pi}_1$$

$$\bar{\Pi}_3 = \text{la restriction de } \Pi(\mathcal{D}_N) \text{ à } I \cup (z_{i_1}, J_{i_1}) \cup (z_{i_2}, J_{i_2})$$

$$\bar{\Pi}_4 = \Pi(\mathcal{D}_N) - \bar{\Pi}_3,$$

on note que $\bar{\Pi}_4 = \bar{\Pi}_2$ et on aura donc:

$$\begin{aligned} \|\int_I f\| &\leq \|\int_I f - \sum_{\bar{\Pi}_1} f(\mathcal{D}_I)\| + \|\sum_{\bar{\Pi}_1} f(\mathcal{D}_I)\| \\ &\leq \epsilon/3 + \|\sum_{\bar{\Pi}_1} f(\mathcal{D}_I) + f(z_{i_1})L(J_{i_1} \cap CI) + f(z_{i_2})L(J_{i_2} \cap CI) + \sum_{\bar{\Pi}_2} f(\mathcal{D}_N) \\ &\quad - \sum_{\bar{\Pi}_3} f(\mathcal{D}_N) - \sum_{\bar{\Pi}_4} f(\mathcal{D}_N) - f(z_{i_1})L(J_{i_1}) - f(z_{i_2})L(J_{i_2})\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f(z_{i_1})[L(J_{i_1}) - L(J_{i_1} \cap CI)] + f(z_{i_2})[L(J_{i_2}) - L(J_{i_2} \cap CI)] + \sum_{\bar{\Pi}_3} f(\mathcal{D}_N) \| \\
& \leq \varepsilon/3 + \left\| \sum_{\bar{\Pi}_1} f(\mathcal{E}) - \sum_{\bar{\Pi}_2} f(\mathcal{D}_N) \right\| + \left\| \sum_{\bar{\Pi}_3} f(\mathcal{D}_N) \right\| + \|f(z_{i_1})\| L(J_{i_1} \cap I) \\
& \quad + \|f(z_{i_2})\| L(J_{i_2} \cap I) \quad \text{où } (\Pi_1, \Pi_2) \geq \Pi(\mathcal{E}, \mathcal{D}_N) \\
& \leq \varepsilon/3 + 1/N + 2\delta \cdot M + \left\| \sum_{\bar{\Pi}_3} f(\mathcal{D}_N) \right\|.
\end{aligned}$$

Or si on pose $\bar{\Pi}_5 = \bar{\Pi}_3 \cap \Pi_N$, $\bar{\Pi}_6 = \bar{\Pi}_3 - \bar{\Pi}_5$, on a:

$$\left\| \sum_{\bar{\Pi}_3} f(\mathcal{D}_N) \right\| \leq \sum_{\bar{\Pi}_5} \|f(z_{i_1})\| L(J_{i_1}) + \left\| \sum_{\bar{\Pi}_6} f(\mathcal{D}_N) \right\| \leq M \cdot \delta + 2/N$$

et donc finalement:

$$\left\| \int_I f \right\| \leq \varepsilon/3 + 3/N + 3\delta \cdot M < \varepsilon.$$

2^e cas: $z_{i_1} \in I$ et $z_{i_2} \in I$.

Dans ce cas $\mathcal{D}_I$ est une division étiquetée de I qui est γ_N -fine, de même que la division étiquetée de I définie comme suit:

$$\mathcal{D}_{NI} = \{(z_i, J_i) \in \mathcal{D}_N; J_i \subseteq I\} \cup \{(z_{i_1}, J_{i_1} \cap I), (z_{i_2}, J_{i_2} \cap I)\}.$$

D'après le Lemme 1, $\exists \Pi(\mathcal{D}_I, \mathcal{D}_{NI}) = (\Pi_1, \Pi_2)$ tel que:

$$\left\| \sum_{\bar{\Pi}_1} f(\mathcal{D}_I) - \sum_{\bar{\Pi}_2} f(\mathcal{D}_{NI}) \right\| < \varepsilon/3.$$

Il suffit alors de procéder comme dans le premier cas pour obtenir à nouveau que

$$\left\| \int_I f \right\| < \varepsilon. \quad \square$$

Par la suite, il sera nécessaire d'étendre la notion d'intégrabilité sur des domaines plus généraux que des intervalles, par exemple sur des ensembles mesurables de $\mathbb{R}$. On procède à cette extension de façon tout à fait naturelle.

Soit $f: E \rightarrow X$, où E est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$. Prenons un intervalle $I \supseteq E$ et posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \in I-E. \end{cases}$$

On dira que f est intégrable sur E s'il existe un intervalle $I \supset E$ tel que g est intégrable sur I et on pose alors: $\int_E f = \int_I g$.

Les Propositions 1 et 3 nous assurent que cette définition est indépendante du choix de l'intervalle I contenant E sur lequel g est intégrable. On vérifie aussi sans peine que les propriétés établies telles la linéarité, l'additivité et la continuité absolue de l'intégrale demeurent valides.

De même, à l'aide de la Proposition 4, on vérifie que si D est une partie dénombrable d'un intervalle S sur lequel f est intégrable, alors f est intégrable sur $S-D$ et on a $\int_{S-D} f = \int_S f$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer une généralisation importante du Théorème 1.

THÉORÈME 2. Soit $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions intégrables sur S ainsi que sur tout sous-ensemble mesurable E de S . Si $\{\int_E f_n\}$ est une suite de Cauchy de X pour chaque sous-ensemble mesurable E de S , alors les intégrales $\int_E f_n$ sont équi-absolument continues, c'est-à-dire:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ t.q. } E \in M \text{ et } L(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f_n \right\| < \epsilon, \forall n = 1, 2, \dots$$

DÉMONSTRATION. Munissons M de la pseudo-distance: $d(E_1, E_2) = L(E_1 \Delta E_2)$ où Δ désigne la différence symétrique. Il est bien connu que (M, d) (l'espace quotient) est un espace métrique complet. Soit $\epsilon > 0$. Pour chaque entier k posons $M_k = \{E \in M; \|F_n(E) - F_m(E)\| \leq \epsilon/3, n, m \geq k\}$ où $F_n(E) = \int_E f_n$. Nous avons alors par hypothèse que $\bigcup M_k = M$. De plus M_k est fermé dans M (ceci découle facilement du théorème précédent). Le théorème des catégories de Baire nous assure donc que $\exists N$ entier, $\exists r > 0$, $\exists E_0 \in M$ tels que $B(E_0, r) = \{E \in M; L(E \Delta E_0) < r\} \subseteq M_N$.

Pour chaque k , $1 \leq k \leq N$, prenons $\delta_k > 0$ tel que

$$E \in M \text{ et } L(E) < \delta_k \Rightarrow \|F_k(E)\| \leq \varepsilon/3$$

et posons $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_N, r\}$. Alors si $E \in M$ et $L(E) < \delta$, on a $\|F_n(E)\| < \varepsilon$ si $1 \leq n \leq N$. De plus, les ensembles $E_1 = E \cup (E_0 - E)$ et $E_2 = E_0 - E$ appartiennent alors à $B(E_0, r)$ et donc si $n \geq N$ on a:

$$\begin{aligned} \|F_n(E)\| &= \|F_n(E_1) - F_n(E_2) - F_N(E_1) + F_N(E_2) + F_N(E)\| \\ &\leq \|F_n(E_1) - F_N(E_1)\| + \|F_n(E_2) - F_N(E_2)\| + \|F_N(E)\| \leq \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Une autre propriété fondamentale de l'intégrale est la suivante:

THÉORÈME 3 (Additivité dénombrable sur les intervalles). Si f est intégrable sur $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ où S est un intervalle, S_n sont des intervalles tels que $S_n \cap S_m = \emptyset$ (si $n \neq m$), alors on a $\int_S f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n} f$ et la convergence est inconditionnelle.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que chaque S_n , $n \geq 1$, est ouvert. Posons $S_0 = S$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ prenons γ_k une jauge sur S_k telle que pour toute division étiquetée $\mathcal{D}_k$ de S_k qui est γ_k -fine, la série $\sum f(\mathcal{D}_k)$ est inconditionnellement sommable vers $\int_{S_k} f$ relativement à $\varepsilon/2^{k+2}$.

Si $s \in S$, alors $s \in S_n$ pour un certain n et on pose alors $\gamma(s) = \gamma_0(s) \cap \gamma_n(s) \cap S_n$. Fixons une division étiquetée $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$ de S qui est γ -fine et observons que si $(z_i, J_i) \in \mathcal{D}$ et $z_i \in S_j$ alors $J_i \subseteq S_j$, ce qui nous permet de dire que $E_k = \mathcal{D}|_{S_k}$, la restriction de $\mathcal{D}$ à S_k , est une division étiquetée de S_k qui est γ_k -fine ($k = 1, 2, \dots$). Soit $\Pi(\mathcal{D}) \in F(\mathcal{D})$ choisi tel que $\|\sum_{\Pi} f(\mathcal{D}) - \int_S f\| < \varepsilon/4$, $\forall \Pi \in \Pi(\mathcal{D})$ et pour $k = 1, 2, \dots$. Soit $\Pi_k \in F(E_k)$ (où on peut supposer que $\Pi_k \supseteq$ la restriction de $\Pi(\mathcal{D})$ à S_k) tel que $\|\sum_{\Pi_k} f(E_k) - \int_{S_k} f\| < \varepsilon/2^{k+2}$.

La somme $\sum_{\Pi(\mathcal{D})} f(\mathcal{D})$ ne fait intervenir qu'un nombre fini d'étiquettes et donc il existe un entier N tel que ces étiquettes sont incluses dans

$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N$. Alors si $\Pi \in F(\mathbb{N})$ et $\Pi \supseteq \{1, 2, \dots, N\}$ on a:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_S f - \sum_{\Pi} \int_{S_i} f \right\| &\leq \left\| \int_S f - \sum_{\Pi(\mathcal{D})} f(\mathcal{D}) \right\| + \left\| \sum_{\Pi(\mathcal{D})} f(\mathcal{D}) - \sum_{\Pi} \int_{S_i} f \right\| \\
&< \varepsilon/4 + \left\| \sum_{\Pi(\mathcal{D})} f(\mathcal{D}) - \sum_{i \in \Pi} \left(\int_{S_i} f - \sum_{\Pi_i} f(E_i) \right) - \sum_{i \in \Pi} \sum_{\Pi_i} f(E_i) \right\| \\
&< \varepsilon/4 + \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \int_{S_i} f - \sum_{\Pi_i} f(E_i) \right\| + \left\| \sum_{\Pi(\mathcal{D})} f(\mathcal{D}) - \sum_{i \in \Pi} \sum_{\Pi_i} f(E_i) \right\| \\
&< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \left\| \sum_{\Pi'} f(\mathcal{D}) \right\| \quad \text{où } \Pi' \in F(\mathcal{D}) \text{ et } \Pi' \cap \Pi(\mathcal{D}) = \emptyset \\
&< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \text{ ce qui établit le résultat. } \square
\end{aligned}$$

Notons que lorsque S est de mesure finie, le Théorème 3 est une conséquence triviale de la continuité absolue. En effet si

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \quad \text{où } S_i \cap S_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ et si } \varepsilon > 0,$$

on choisit $\delta > 0$ tel que $B \in M$ et $L(B) < \delta \Rightarrow \left\| \int_B f \right\| < \varepsilon$. Soit alors N un entier tel que $k \geq N \Rightarrow L\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} S_i\right) < \delta$ et posons $\Pi_0 = \{1, 2, \dots, N\}$. Alors si $\Pi \geq \Pi_0$ on a:

$$\left\| \sum_{i \in \Pi} \int_{S_i} f - \int_S f \right\| = \left\| \int_{\bigcup_{i \notin \Pi} S_i} f \right\| < \varepsilon,$$

ce qui montre que la série $\sum \int_{S_i} f$ est inconditionnellement sommable vers $\int_S f$.

3. Propriétés de convergence

Dans cette section nous allons établir qu'un théorème de convergence dominée a lieu pour notre intégrale. De plus, dans le cas où S est de mesure finie, nous établirons un autre théorème encore plus fort.

Tout comme c'est le cas pour l'intégrale de Riemann généralisée, le lemme de Henstock joue un rôle essentiel dans la plupart des résultats importants. On commence donc par présenter la version de ce lemme dans notre cadre. La preuve est modelée sur celle que l'on retrouve dans [7].

- [3] BENZAKEN, C., Post's closed systems and the weak chromatic number of hypergraphs, *Discrete Mathematics* 23(1978), 77-84.
- [4] BODNARCUK, V.G., KALUZNIN, L.A., KOTOV, V.N., ROMOV, B.A., Galois theory for Post algebras I-II (En russe), *Kibernetika* 5(1969), 1-10 et 5(1969), 1-9;
Version anglaise: *Cybernetics* 5(1969), 243-252 et 531-539.
- [5] DEMETROVICS, J., HANNÁK, L., MARCENKOV, S.S., Some remarks on the structure of P_3 , *C.R. Math. Rep. Acad. Sci., Canada* 2(1980), 251-219.
- [6] DEMETROVICS, J., HANNÁK, L., MARCENKOV, S.S., On closed classes of self-dual functions in P_3 , *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, North Holland 28(1981), 183-189.
- [7] DEMETROVICS, J., HANNÁK, L., RÓNYAI, L., Prime element algebras with transitive automorphism groups, *C.R. Comp. Rend. Math. Acad. Sci., Canada* 3(1981), 1, 19-22.
- [8] DEMETROVICS, J., HANNÁK, J., The number of reducts of a preprimal algebras, *Alg. Univ.* 16(1983), 178-185.
- [9] DEMETROVICS, J., HANNÁK, J., On construction of large set of clones, Preprint Computer Automat. Inst. HAS, Budapest, 18 p. (1984).
- [10] JABLONSKII, S.V., Functional constructions in a k -valued logic (En russe), *Trudy Mat. Inst. Steklov* 51(1958), 5-142. MR 21 #3331.
- [11] JANOV, Ju. I., MUCŇNIK, A.A., Existence of k -valued closed classes without a finite basis (En russe), *Dokl. Akad. Nauk. SSR* 127(1959), 44-46, MR 21 #7174.
- [12] MacKENZIE, R., McNULTY, G., TAYLOR, W., Algebras, Lattices, Varieties (A paraître).

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_P [f(z_i) L(J_i) - \int_{J_i} f] \right\| &= \left\| \sum_P f(z_i) L(J_i) - \sum_P \left[\int_{J_i} f - \sum_{\Pi(\mathcal{D}'_i)} f(\mathcal{D}'_i) \right] - \sum_P \sum_{\Pi(\mathcal{D}'_i)} f(\mathcal{D}'_i) \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{P_\Pi} f(z_i) L(J_i) - \sum_{P_\Pi} \sum_{\Pi(\mathcal{D}'_i)} f(\mathcal{D}'_i) \right\| + \sum_P \left\| \sum_{\Pi(\mathcal{D}'_i)} f(\mathcal{D}'_i) - \int_{J_i} f \right\| \\
&< 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i \leq 3\varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

REMARQUE. Si nous considérons la fonction f sur $[0,1]$ introduite dans l'Exemple 1 de [2], on vérifie que si (z, J) est un élément d'une division étiquetée de $[0,1]$ on a alors $\|f(z) L(J) - \int_J f\| \geq L(J)/2$. Dans notre cadre, on ne peut donc espérer obtenir un analogue à la deuxième partie du lemme de Henstock tel qu'il est énoncé par exemple dans [6] ou [7]. Signalons aussi que ce même exemple fournit une illustration très intéressante du lemme tel que nous venons de l'énoncer.

THÉORÈME 4 (de convergence dominée). Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions de S vers X telles que:

- 1) f_n est une fonction intégrable, $n = 1, 2, \dots$;
- 2) $\exists g: S \rightarrow \mathbb{R}^+$, Lebesgue-intégrable, telle que $\|f_n\| \leq g$, $n = 1, 2, \dots$;
- 3) $\|f_n - f_m\|: S \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction mesurable pour $n, m = 1, 2, \dots$;
- 4) $f_n(s) \rightarrow f(s)$, $\forall s \in S$.

Alors f est intégrable sur S et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n = \int_S f$.

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait en trois étapes dont la première est en fait la clé de la démonstration. Cette étape consiste à établir l'existence d'une jauge sur S qui est uniforme par rapport à n . De façon précise nous montrons que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \gamma$ une jauge sur S , ne dépendant que de ε , telle que:

$$(*) \quad \forall \mathcal{D} \text{ } \gamma\text{-fine, } \forall n \geq 1, \exists \Pi_n(\mathcal{D}): \left\| \sum_{\Pi} f_n(\mathcal{D}) - \int_S f_n \right\| < \varepsilon, \quad \forall \Pi \geq \Pi_n(\mathcal{D}).$$

Remarquons au départ que $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ étant Lebesgue-intégrable, g est intégrable et son intégrale $\int_S g$ n'est autre que l'intégrale de Lebesgue de g sur S (Théorème 2 de [2]). La même remarque s'applique pour les fonctions h_j que nous introduirons au cours de la démonstration.

Soit donc $\varepsilon > 0$. Posons $f_0 = g$ et pour $n = 0, 1, 2, \dots$ prenons γ_n une jauge sur S telle que pour toute division étiquetée $\mathcal{D}$ γ_n -fine, on a: $\exists \Pi^{(n)}(\mathcal{D})$ tel que $\|\sum_{\Pi} f_n(\mathcal{D}) - \int_S f_n\| < \varepsilon/2^n$ si $\Pi \geq \Pi^{(n)}(\mathcal{D})$.

D'autre part, $\|f_n(s) - f_m(s)\| \leq 2g(s)$, $\forall n, m$, $\forall s \in S$, et donc la fonction $h_{jk}(s) = \max_{j \leq m \leq n \leq k} \|f_n(s) - f_m(s)\|$ est Lebesgue-intégrable et converge (pour j fixé, lorsque $k \rightarrow \infty$) vers une fonction $h_j(s)$ qui, par le théorème de convergence monotone de Lebesgue, est donc intégrable. On remarque aussi que $h_{j+1}(s) \leq h_j(s)$ et que $\lim_{j \rightarrow \infty} h_j(s) = 0$. Une autre application du théorème de convergence monotone donne $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_S h_j = 0$.

Fixons un entier N tel que $\int_S h_N < \varepsilon$ et pour $n \geq N$, posons $F_n = \{s \in S; \|f_k(s) - f(s)\| < \varepsilon g(s), \forall k \geq n\}$. On a que la suite d'ensembles F_n est une suite emboîtée croissante vers S , et donc si on pose $E_N = F_N$ et $E_n = F_n - F_{n-1}$ pour $n \geq N+1$, on voit que les E_n ($n \geq N$) forment une partition de S . On définit alors une jauge γ sur S de la façon suivante:

$$\gamma(s) = \gamma_0(s) \cap \gamma_1(s) \cap \dots \cap \gamma_n(s) \text{ si } s \in E_n, \quad (n \geq N)$$

et nous allons montrer que γ satisfait la propriété (*).

Soit donc $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$ γ -fine. $\mathcal{D}$ est alors γ_j -fine pour $j = 1, \dots, N$ et alors: $\forall j \leq N$, $\exists \Pi_j(\mathcal{D}): \|\sum_{\Pi} f_j(\mathcal{D}) - \int_S f_j\| < \varepsilon/2^j < \varepsilon$, $\forall \Pi \geq \Pi_j(\mathcal{D})$.

La propriété (*) est donc satisfaite pour $n \leq N$ et il reste à montrer qu'elle est aussi satisfaite pour $n > N$.

Soit donc $n > N$ et posons: $\mathcal{D}_k = \{(z_i, J_i) \in \mathcal{D}; z_i \in E_k\}$ ($k \geq N$),

$$E = \bigcup_{N \leq k \leq n-1} \mathcal{D}_k, \quad E' = \bigcup_{k \geq n} \mathcal{D}_k.$$

Chaque $\mathcal{D}_k$ est $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N, \gamma_{N+1}, \dots, \gamma_k$ -fine et donc E' est $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ -fine. (Noter cependant que E n'est pas nécessairement γ_n -fine.) De plus E' est une partie d'une division étiquetée qui est γ_n -fine et donc d'après le lemme de Henstock (appliqué à f_n et γ_n): $\exists P_n^1 \in F(\mathbb{N})$ tel que $\|\sum_P [f_n(E')] - \int_{J_i} f_n\| < 3\varepsilon/2^n$

pour $P \geq P_n^1$ (bien entendu il faut comprendre ici que les J_i dont il est question sont parmi ceux dont l'étiquette z_i appartient à $\bigcup_{k \geq n} E_k$). D'autre part, l'intégrale étant σ -additive sur les intervalles (Théorème 3), $\exists P_n^2$ tel que

$$\left\| \sum_P \int_{J_i} f_n - \int_S f_n \right\| < \epsilon \text{ pour } P \geq P_n^2. \text{ Donc pour}$$

$$\Pi \geq \{(z_i, J_i); i \in P_n^1 \cup P_n^2\} \cup \Pi^{(0)}(\mathcal{D}) \cup \Pi^{(N)}(\mathcal{D}_N) \cup \dots \cup \Pi^{(n-1)}(\mathcal{D}_{n-1}) = \Pi_n(\mathcal{D}),$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\Pi} f_n(\mathcal{D}) - \int_S f_n \right\| &\leq \left\| \int_S f_n - \sum_P \int_{J_i} f_n \right\| + \left\| \sum_P [f_n(\mathcal{D}) - \int_{J_i} f_n] \right\| \\ &< \epsilon + \left\| \sum_{P_1} [f_n(E')] - \int_{J_i} f_n \right\| + \left\| \sum_{P_2} [f_n(E) - \int_{J_i} f_n] \right\| \\ &< \epsilon + 3\epsilon/2^n + \left\| \sum_{P_2} [f_n(E) - \int_{J_i} f_n] \right\| \end{aligned}$$

où bien sûr $P = \{i; (z_i, J_i) \in \Pi\}$, $P_1 = \{i; (z_i, J_i) \in \Pi \cap E'\}$, $P_2 = \{i; (z_i, J_i) \in \Pi \cap E\}$.

Or en posant $P_{2,j} = \{i \in P_2; z_i \in E_j\}$ pour $j = N, \dots, n-1$, on a:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{P_2} [f_n(E) - \int_{J_i} f_n] \right\| &\leq \sum_{j=N}^{n-1} \left\| \sum_{i \in P_{2,j}} [f_n(\mathcal{D}_j) - \int_{J_i} f_n] \right\| \\ &\leq \sum_{j=N}^{n-1} \{ \left\| \sum_{i \in P_{2,j}} [f_n(\mathcal{D}_j) - f_j(\mathcal{D}_j)] \right\| + \left\| \sum_{i \in P_{2,j}} [f_j(\mathcal{D}_j) - \int_{J_i} f_j] \right\| \\ &\quad + \sum_{i \in P_{2,j}} \left\| \int_{J_i} f_j - \int_{J_i} f_n \right\| \} \\ &\leq \sum_{j=N}^{n-1} \{ 2\epsilon \sum_{i \in P_{2,j}} g(z_i) L(J_i) + 3\epsilon/2^j + \sum_{i \in P_{2,j}} \int_{J_i} h_N \} \end{aligned}$$

(en effet, il suffit de remarquer ici que si $z_i \in E_j$ on a d'après la définition même de E_j , $\|f_n(z_i) - f_j(z_i)\| \leq 2\epsilon g(z_i)$ puisque $n \geq j$, ce qui fournit la majoration pour le premier terme. Quant au terme central, on observe que $\mathcal{D}_j$ est γ_j -fine et il suffit alors d'appliquer encore une fois le lemme de Henstock. Pour le troisième terme c'est clair.)

$$\leq 2\epsilon \sum_{P_2 \cup P_0} g(z_i) L(J_i) + 3\epsilon + \int_S h_N \leq 4\epsilon + 2\epsilon \left(\int_S g + \epsilon \right)$$

(nous avons posé $P_0 = \{i; (z_i, J_i) \in \Pi^{(0)}(\mathcal{D})\}$ et utilisé la positivité des fonctions g et h_N ainsi que le fait que $\mathcal{D}$ est en particulier γ_0 -fine). Donc finalement nous obtenons que si $\mathcal{D}$ est γ -fine et si $n > N$ alors pour $\Pi \geq \Pi_n(\mathcal{D})$ on a:

$$\left\| \sum_{\Pi} f_n(\mathcal{D}) - \int_S f_n \right\| < \varepsilon + 3\varepsilon/2^n + 4\varepsilon + 2\varepsilon \left(\int_S g + \varepsilon \right) < 2\varepsilon (5 + \int_S g)$$

ce qui établit la propriété (*).

Dans la deuxième étape nous montrons que f est intégrable sur S . Pour cela, on procède de la façon suivante: $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit un entier N tel que $\int_S h_N < \varepsilon$. Alors utilisant le fait que f_N est de classe I et que $\|f_N(z) - f(z)\| \leq h_N(z)$ pour chaque $z \in S$ (d'après la définition même de h_N et de f) on peut conclure (à l'aide de raisonnements maintenant familiers que nous laissons au lecteur) que f est également de classe I .

$$\text{Enfin on démontre que } \int_S f = \lim \int_S f_n.$$

Ceci est également très facile et dépend de façon cruciale de la première étape de la démonstration. Pour bien montrer ce fait nous allons présenter les détails. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons N un entier tel que $\int_S h_n < \varepsilon$ pour $n \geq N$. Prenons de plus une jauge γ sur S (qui ne dépend pas de n) telle que $\forall \mathcal{D}$ γ -fine, $\forall n \geq 1$, $\exists \Pi_n(\mathcal{D})$: $\left\| \sum_{\Pi} f_n(\mathcal{D}) - \int_S f_n \right\| < \varepsilon$, $\forall \Pi \geq \Pi_n(\mathcal{D})$ et prenons également γ_0 une jauge sur S telle que $\forall \mathcal{D}$ γ_0 -fine, $\exists \Pi_0(\mathcal{D})$: $\left\| \sum_{\Pi} f(\mathcal{D}) - \int_S f \right\| < \varepsilon$, $\forall \Pi \geq \Pi_0(\mathcal{D})$. De plus ce que nous avons fait dans la deuxième étape avec la suite $\{f_n\}$ peut (encore plus simplement) être fait avec la suite $\{h_n\}$. On peut donc choisir une jauge $\tilde{\gamma}$ sur S (indépendante de n) telle que $\forall \mathcal{D}$ $\tilde{\gamma}$ -fine, $\forall n \geq 1$, $\exists \tilde{\Pi}_n(\mathcal{D})$: $\left\| \sum_{\Pi} h_n(\mathcal{D}) - \int_S h_n \right\| < \varepsilon$, $\forall \Pi \geq \tilde{\Pi}_n(\mathcal{D})$.

Posons $\bar{\gamma} = \gamma \cap \gamma_0 \cap \tilde{\gamma}$ et fixons une division étiquetée $\mathcal{D}$ qui est $\bar{\gamma}$ -fine. Alors si $n \geq N$ on a, en prenant $\Pi = \Pi_0(\mathcal{D}) \cup \Pi_n(\mathcal{D}) \cup \tilde{\Pi}_n(\mathcal{D})$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_S f_n - \int_S f \right\| &\leq \left\| \int_S f_n - \sum_{\Pi} f_n(\mathcal{D}) \right\| + \left\| \sum_{\Pi} f_n(\mathcal{D}) - \sum_{\Pi} f(\mathcal{D}) \right\| + \left\| \sum_{\Pi} f(\mathcal{D}) - \int_S f \right\| \\ &\leq 2\varepsilon + \sum_{\Pi} \|f_n(z_i) - f(z_i)\| L(J_i) \leq 2\varepsilon + \sum_{\Pi} h_n(\mathcal{D}) \leq 3\varepsilon + \int_S h_n \leq 4\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE. Notons que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions de S vers X qui satisfait les hypothèses du théorème de convergence dominée et si E est un sous-ensemble mesurable de S alors la suite $\{\int_E f_n\}$ d'éléments de X est une suite de Cauchy. (En effet, au tout début de la démonstration du théorème de convergence dominée nous avons montré que

$$\lim_{\substack{j,k \rightarrow \infty \\ j \leq k}} \int_S \|f_j - f_k\| = 0.)$$

Donc si S est de mesure finie et si la suite $\{f_n\}$ est intégrable sur tout sous-ensemble mesurable, le théorème de convergence dominée est en fait un corollaire du théorème suivant:

THÉORÈME 5. Soit S un intervalle de $\mathbb{R}$ de mesure finie. Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions de S vers X telles que:

- 1) f_n est intégrable sur tout sous-ensemble mesurable de S pour $n = 1, 2, \dots$
- 2) $\{\int_E f_n\}$ est une suite de Cauchy dans X pour chaque sous-ensemble mesurable E de S .
- 3) $\|f_n - f_m\|: S \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction mesurable pour $n, m = 1, 2, \dots$
- 4) $f_n(s) \rightarrow f(s), \forall s \in S$.

Alors f est intégrable sur tout sous-ensemble mesurable E de S et on a

$$\int_E f = \lim_n \int_E f_n.$$

DÉMONSTRATION. Pour chaque $E \in M$ posons $I(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \in X$. Nous allons commencer par démontrer que cette limite est uniforme dans le sens suivant:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que: } \left\| \int_E f_n - I(E) \right\| < \varepsilon, \forall n \geq N, \forall E \in M.$$

C'est l'étape cruciale. Une fois ce fait établi on pourra procéder en adaptant essentiellement les idées que nous avons développées dans la démonstration du théorème de convergence dominée.

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ t.q. $E \in M$ et $L(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f_n \right\| < \varepsilon$,
 $\forall n \in \mathbb{N}$ (voir le Théorème 2) et posons:

$$E_n = \{s \in S; \|f_k(s) - f(s)\| \geq \varepsilon, \forall k \geq n\}, \quad F_n = S - E_n.$$

D'après les hypothèses 3 et 4, $\{E_n\}$ forme une suite d'ensembles mesurables telle que $L(E_n) \rightarrow 0$. Soit donc $N \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N \Rightarrow L(E_n) < \delta/2$. Alors si $m, n \geq N$ et si $E \in M$ on a, en posant $F_{nm} = F_n \cap F_m$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_E (f_n - f_m) \right\| &\leq \int_{E \cap F_{nm}} \|f_n - f_m\| + \left\| \int_{E \cap C F_{nm}} (f_n - f_m) \right\| \\ &\leq 2\varepsilon L(S) + \left\| \int_{E \cap C F_{nm}} f_n \right\| + \left\| \int_{E \cap C F_{nm}} f_m \right\|. \end{aligned}$$

Or $L(E \cap C F_{nm}) = L((E \cap C F_n) \cup (E \cap C F_m)) \leq L(E \cap E_n) + L(E \cap E_m) < \delta$ et donc:

$\left\| \int_E (f_n - f_m) \right\| \leq 2\varepsilon(L(S) + 1) \quad \forall n, m \geq N, \exists E \in M$. Par conséquent si $E \in M$ et si on choisit $n(E) \geq N$ tel que $\left\| \int_E f_{n(E)} - I(E) \right\| < \varepsilon$, on aura que:

$$\forall n \geq N \Rightarrow \left\| \int_E f_n - I(E) \right\| \leq \left\| \int_E (f_n - f_{n(E)}) \right\| + \left\| \int_E f_{n(E)} - I(E) \right\| \leq 5\varepsilon(L(S) + 1),$$

ce qui établit la propriété (*).

Ce que nous venons d'établir ainsi que le fait que $f_n(s) \rightarrow f(s)$ nous assure de l'existence d'une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la suite $\{f_n\}$ telle que pour $k = 1, 2, \dots$

$$(i) \quad \left\| \int_E f_{n_k} - I(E) \right\| < 1/2^k, \quad \forall E \in M,$$

$$(ii) \quad \|f_{n_k}(s) - f(s)\| < 1/2^k L(S) \quad \text{pour } s \in F_{n_k} = S - E_{n_k},$$

où, rappelons-le, $E_{n_k} = \{s \in S; \|f_m(s) - f(s)\| \geq 1/2^k L(S), \forall m \geq n_k\}$ et où de plus n_k peut être supposé choisi tel que $L(E_{n_k}) < 1/2^k$. Pour ne pas alourdir inutilement les notations on peut supposer que $n_k = k$. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons à nouveau $\delta > 0$ t.q. $E \in M$ et $L(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f_k \right\| < \varepsilon, \forall k$, et fixons un entier K tel que $2^{-K}(L(S))^{-1} < \varepsilon, 2^{-K} < \varepsilon, 2^{-K} < \delta$.

Ce choix de K étant fait, indiquons comment choisir une jauge γ sur S telle que $\forall \mathcal{D} \quad \gamma$ -fine, $\exists \Pi(\mathcal{D})$ vérifiant $\left\| \sum_{\Pi} f(\mathcal{D}) - I(S) \right\| < \varepsilon, \forall \Pi \geq \Pi(\mathcal{D})$, ce qui

montrera que f est intégrable sur S et que $\int_S f = I(S)$ tel que désiré. En posant: $G_K = F_K$, $G_{K+j} = E_{K+j-1} - E_{K+j}$ pour $j \geq 1$, on forme une partition de S et on choisit des jauges γ_{K+j} sur G_{K+j} ($j \geq 0$) telles que pour toute division étiquetée $\mathcal{D}_{K+j}$ de G_{K+j} la série $\sum f_{K+j}(\mathcal{D}_{K+j})$ est inconditionnellement proche de $\int_{G_{K+j}} f_{K+j}$ relativement à $2^{-(K+j)}$. Il suffit alors de définir $\gamma(s) = \gamma_{K+j}(s)$ si $s \in G_{K+j}$.

Ainsi si $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$ est γ -fine alors pour $\Pi(\mathcal{D})$ convenable et $\Pi \geq \Pi(\mathcal{D})$ on aura, en posant pour $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} g_{K+j}(s) &= f_{K+j}(s) \quad \text{si } s \in G_{K+j} \\ &= 0 \quad \text{autrement} \end{aligned}$$

et en identifiant Π avec $\{i; (z_i, J_i) \in \Pi\}$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\Pi} f(z_i) L(J_i) - I(S) \right\| &\leq \left\| \sum_{\Pi} (f(z_i) - g_K(z_i)) L(J_i) \right\| + \left\| \sum_{\Pi} g_K(z_i) L(J_i) - \int_{F_K} f_K \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{F_K} f_K - \int_S f_K \right\| + \left\| \int_S f_K - I(S) \right\| \\ &\leq \sum_{\Pi_1} \|f(z_i) - g_K(z_i)\| L(J_i) + \left\| \sum_{\Pi_2} f(z_i) L(J_i) \right\| + \varepsilon + \varepsilon + 1/2^K \\ &\quad \text{où } \Pi_1 = \{i \in \Pi; z_i \in F_K\}, \quad \Pi_2 = \Pi - \Pi_1 \\ &\leq \sum_{\Pi_1} (1/2^K L(S)) L(J_i) + 3\varepsilon + \left\| \sum_{\Pi_2} f(z_i) L(J_i) \right\| \\ &\leq 4\varepsilon + \left\| \sum_{\Pi_2} f(z_i) L(J_i) \right\|. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\Pi_2} f(z_i) L(J_i) \right\| &\leq \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{\Pi_{2,j}} \|f(z_i) - g_{K+i}(z_i)\| L(J_i) \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{\Pi_{2,j}} [g_{K+i}(z_i) L(J_i) - \int_{J_i} g_{K+i}] \right\| \right\} \\ &\quad + \left\| \sum_{j=1}^M \sum_{\Pi_{2,j}} \int_{J_i} g_{K+i} \right\| \end{aligned}$$

où les $i \in \Pi_2$ sont tels que les z_i appartiennent à $E_{K+i_1}, \dots, E_{K+i_M}$ (et on suppose encore une fois pour ne pas alourdir les notations que $i_1 = 1, \dots, i_M = M$) et $\Pi_{2,j} = \{i; z_i \in E_{K+j}\}$; ce qui, par le lemme de Henstock, donne:

$$\leq \sum_{j=1}^M \frac{L(E_{K+j})}{2^{K+j} L(S)} + \sum_{j=1}^M 2^{-(K+j)} + \left\| \sum_{j=1}^M \int_{A_j} f_{K+j} \right\|$$

où

$$\begin{aligned} A_j &= \left(\bigcup_{i \in \Pi_{2,j}} J_i \right) \cap C_{K+j} \\ &\leq 2\varepsilon + \left\| \sum_{j=1}^M \int_{A_j} f_{K+j} \right\| \leq 2\varepsilon + \sum_{j=1}^M \int_{A_j} \|f_{K+j} - f_{\bar{K}}\| + \left\| \sum_{j=1}^M \int_{A_j} f_{\bar{K}} \right\| \end{aligned}$$

où $\bar{K}$ est un entier assez grand pour que sur A_j on ait

$$\begin{aligned} \|f_{K+j}(s) - f_{\bar{K}}(s)\| &\leq 2^{-(K+j)} + 2^{-(K+\bar{K})} < 2 \times 2^{-(K+j)} \\ &\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon + \left\| \int_B f_{\bar{K}} \right\| \leq 5\varepsilon, \text{ puisque } L(B) < \delta, \text{ (où } B = \bigcup_{j=1}^M A_j). \end{aligned}$$

Nous venons donc d'établir l'inégalité désirée: $\left\| \sum_{\Pi} f(\mathcal{D}) - I(S) \right\| \leq 9\varepsilon$.

Enfin, ce que nous venons de faire pour S peut être fait pour toute partie mesurable de S . $\square$

Bibliographie

- [1] BIRKHOFF, G., Integration of functions with values in a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 38(1935), 357-378.
- [2] DUBOIS, J., M'KHALFI, A., Une intégrale de type Riemann généralisée contenant l'intégrale de Birkhoff, *Ann. des sc. math. du Québec*, vol. 12, 1(1988), 31-53.
- [3] HENSTOCK, R., Definitions of Riemann type of the variational integral, *Proc. London Math. Soc.* (3) 11(1961), 402-418.
- [4] HENSTOCK, R., *Theory of Integration*, Butterworths, London, 1963.

- [5] KURZWEIL, J., Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, *Czechoslovak Math. J.* 7(82)(1957), 418-446.
- [6] MAWHIN, J., *Introduction à l'analyse*, 4^e édition, Cabay, Louvain-la-Neuve, 1984.
- [7] McLEOD, R.M., *The Generalized Riemann Integral*, Math. Association of America, Washington, 1980.
- [8] PHILLIPS, R.S., Integration in a convex linear topological space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 47(1940), 114-145.

Département de mathématiques
et d'informatique
Faculté des sciences
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec, Canada J1K 2R1

Manuscrit reçu le 20 mars 1987.
Révisé le 3 juillet 1987.

* Recherche subventionnée par le C.R.S.N.G. #A-8133 ainsi que par F.C.A.R. #EQ-1128.