

SOUS-HARMONICITÉ DE LA PARTIE DU RIESZ DU SPECTRE D'UN OPÉRATEUR

Bernard Aupetit et Alphonse Yamuremye

Abstract

We prove that the logarithm of the first n external spectral values of an operator is subharmonic. We also give a counter-example to a result of J. Zemánek (Theorem 5.6 of [6]).

Résumé

Dans cet article nous démontrons la sous-harmonicité du logarithme du module du produit des n premières valeurs spectrales extérieures et nous donnons un contre-exemple à un résultat de J. Zemánek (Théorème 5.6 de [6]).

1. Introduction

Soit A une algèbre de Banach avec unité et I un idéal bilatère inessential de A (c'est-à-dire que tout élément de I a son spectre avec au plus zéro comme point limite, voir [2] pour plus de détails). Un élément de A est appelé *élément de Fredholm* s'il est inversible modulo I . Désignons par Φ l'ensemble de ces éléments.

Pour un élément x de A le spectre de Fredholm ou *spectre essentiel* de x est défini par

$$\sigma_{\Phi}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda 1 \notin \Phi\}.$$

Si on dénote par $\sigma(x)$ le spectre de x et par $|x|_\Phi$ le rayon spectral essentiel, il est facile de démontrer les résultats suivants:

PROPOSITION. Tout point frontière de $\sigma(x)$ qui n'est pas dans $\sigma_\Phi(x)$ est isolé dans $\sigma(x)$.

COROLLAIRE. Soit $\Lambda(x) = \{\lambda \in \sigma(x) : |\lambda| > |x|_\Phi\}$. Alors $\Lambda(x)$ est un ensemble discret, donc au plus dénombrable.

2. Contre-exemple à un résultat de J. Zemánek

Comme $\Lambda(x)$ est au plus dénombrable, on peut ordonner ses points de façon que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$, avec la convention que si $\Lambda(x)$ ne contient que n points, alors $|\lambda_{n+1}| = |\lambda_{n+2}| = \dots = |x|_\Phi$.

Considérons une fonction analytique f d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans A . Le Théorème 5.6 de [6] affirme que les fonctions $z \rightarrow |\lambda_n(f(z))|$ sont sous-harmoniques sur D , pour $n = 1, 2, \dots$. Ce résultat est évidemment vrai pour $n = 1$, d'après le théorème de Vesentini car $|\lambda_1(f(z))|$ coïncide avec le rayon spectral de $f(z)$ (voir [1], p. 9). Mais pour $n \geq 2$ le résultat est faux comme nous le verrons sur l'exemple qui suit.

Prenons $A = M_2(\mathbb{C})$, $I = \{0\}$ et la fonction analytique f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \begin{bmatrix} 1, & z \\ z, & 1 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que $\sigma(f(z)) = \{1+z, 1-z\}$. Donc $|\lambda_2(f(z))| = \min\{|1+z|, |1-z|\}$. Dénotons par $\phi(z)$ cette fonction et montrons qu'elle n'est pas sous-harmonique. On a $\phi(0) = 1$, $\phi(z) \geq 0$. Si ϕ est supposée sous-harmonique, alors $\psi = \phi^2$ l'est également. Montrons maintenant que ψ ne satisfait pas l'inégalité de la moyenne sur un petit disque centré à l'origine, d'où on aura une contradiction. Soit $\varepsilon > 0$ et t réel. Alors

$$\psi(\epsilon e^{it}) = \min(1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos t, 1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos t)$$

d'où

$$\psi(\epsilon e^{it}) = \begin{cases} 1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos t, & \text{si } \cos t \leq 0, \\ 1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos t, & \text{si } \cos t \geq 0. \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\epsilon e^{it}) dt &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos t) dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{3\pi/2}^{2\pi} (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos t) dt \right] \\ &= \epsilon^2 - \frac{4}{\pi} \epsilon + 1. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité de la moyenne $\psi(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\epsilon e^{it}) dt$ n'est pas vérifiée si $\epsilon < \frac{4}{\pi}$. Ainsi ϕ n'est pas sous-harmonique.

Signalons que C. Geib, de l'Université de Karlsruhe, avait en 1983 noté l'erreur dans le résultat de J. Zemánek mais sans donner de contre-exemple.

3. Sous-harmonicité du logarithme du module du produit des n premières valeurs spectrales extérieures

Supposons toujours que f est une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans une algèbre de Banach A . Si $\alpha_0 \in \Lambda(f(z_0))$, alors il est clair qu'autour du point α_0 il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $\Lambda(f(z))$ pour z voisin de z_0 ([4], Théorème I.2.2).

D'après le Théorème 2 de [1], page 67, il existe un entier $m \geq 1$ et $r > 0$ tels que $0 < |z - z_0| < r$ implique que $\sigma(f(z))$ ait exactement m points au voisinage de α_0 , auquel cas, d'après la semi-continuité supérieure du spectre essentiel σ_ϕ , il résulte pour r assez petit que ces m points au voisinage de α_0 sont dans $\Lambda(f(z_0))$. Ce nombre m sera appelé la *multiplicité spectrale* au point z_0 . Le même Théorème 2 implique également ce qui suit.

Dénotons par $\lambda^1(z), \dots, \lambda^m(z)$ les éléments de $\Lambda(f(z)) \cap B(\alpha_0, s)$ (pour un certain $s > 0$ assez petit) lorsque $0 < |z - z_0| < r$, avec $\Lambda(f(z_0)) \cap B(\alpha_0, s) = \{\alpha_0\}$. Alors la fonction h définie par

$$h(z_0) = \alpha_0^m$$

$$h(z) = \lambda^1(z) \times \dots \times \lambda^m(z)$$

est holomorphe sur le disque $|z - z_0| < r$, z_0 compris en z_0 , d'après le théorème d'extension de Radó (voir [1], Appendice II, Théorème 15). De cela, on déduit immédiatement le lemme suivant:

LEMME. Supposons que $\#(\Lambda(f(z_0)) \cap B(\alpha_0, s)) = 1$ et que $\#(\Lambda(f(z)) \cap B(\alpha_0, s)) = m$ pour $0 < |z - z_0| < r$. Alors

$$m \operatorname{Log} |\alpha_0| \leq \int_{|z - z_0| = \rho} (\operatorname{Log} |\lambda^1(z)| + \dots + \operatorname{Log} |\lambda^m(z)|) |dz|$$

pour $0 < \rho < r$.

On ordonne maintenant l'ensemble discret $\Lambda(f(z))$ de façon que $|\lambda_1(f(z))| \geq |\lambda_2(f(z))| \geq \dots$ en faisant la convention que $\lambda_i(f(z))$ est répété m fois dans cette suite si $\lambda_i(f(z))$ est de multiplicité spectrale m au point z . De plus si après $\lambda_n(f(z))$ il n'y a pas d'autres valeurs inessentielles on pose par convention que $|\lambda_{n+1}(f(z))| = |\lambda_{n+2}(f(z))| = \dots = |f(z)|_\phi$.

Finalement, l'erreur de J. Zemánek peut être rectifiée par le résultat suivant.

THÉORÈME. Soit n un entier supérieur ou égal à un. Alors la fonction $z \rightarrow \chi_n(z) = \operatorname{Log} |\lambda_1(f(z))| + \dots + \operatorname{Log} |\lambda_n(f(z))|$ est sous-harmonique sur D .

DÉMONSTRATION. Fixons $z_0 \in D$. Supposons tout d'abord que $|\lambda_n(f(z_0))| > |f(z_0)|_\phi$. Si n est la somme des multiplicités spectrales des k premières valeurs spectrales de $\Lambda(f(z_0))$ alors, en appliquant k fois le lemme et le fait que $|\lambda_1(f(z))| \times \dots \times |\lambda_n(f(z))|$ majore nécessairement tout produit des modules de n éléments de $\Lambda(f(z))$, on obtient alors que

$$(1) \quad \chi_n(z_0) \leq \int_{|z-z_0|=\rho} (\text{Log } |\lambda_1(f(z))| + \dots + \text{Log } |\lambda_n(f(z))|) |dz|$$

pour tout $\rho > 0$ assez petit. Autrement dit, χ_n satisfait localement l'inégalité de la moyenne en z_0 . Comme de plus la semi-continuité supérieure du spectre implique facilement la semi-continuité supérieure de χ_n , il est donc vrai que χ_n est sous-harmonique sur D .

Dénotons par ℓ la plus grande somme des premières multiplicités spectrales de $\Lambda(f(z_0))$ qui soit inférieure à n et appelons m la multiplicité spectrale de $\lambda_n(f(z_0))$. Supposons maintenant que $\ell < n < \ell+m$. Toujours d'après le lemme on a pour $\rho > 0$ assez petit

$$(2) \quad m \text{ Log } |\lambda_n(f(z_0))| \leq \int_{|z-z_0|=\rho} (\text{Log } |\lambda_n^1(f(z))| + \dots + \text{Log } |\lambda_n^m(f(z))|) |dz|$$

où $\lambda_n^1(f(z)), \dots, \lambda_n^m(f(z))$ sont les m points de $\Lambda(f(z)) \cap B(\alpha_0, s)$ où $\alpha_0 = \lambda_n(f(z_0))$. Appelons $\alpha_{\ell+1}(z) \geq \dots \geq \alpha_n(z)$ les $n-\ell$ plus grands modules parmi $\{\lambda_n^1(f(z)), \dots, \lambda_n^m(f(z))\}$. Alors les $m-n+\ell$ autres sont inférieurs ou égaux à $\alpha_n(z) \leq (\alpha_{\ell+1}(z) \times \dots \times \alpha_n(z))^{1/n-\ell}$. Ainsi (2) implique que:

$$m \text{ Log } |\lambda_n(f(z_0))| \leq \int_{|z-z_0|=\rho} \left(1 + \frac{m-n+\ell}{n-\ell}\right) (\text{Log } \alpha_{\ell+1}(z) + \dots + \text{Log } \alpha_n(z)) |dz|$$

d'où

$$(3) \quad (n-\ell) \text{ Log } |\lambda_n(f(z_0))| \leq \int_{|z-z_0|=\rho} (\text{Log } \alpha_{\ell+1}(z) + \dots + \text{Log } \alpha_n(z)) |dz|.$$

Maintenant on applique la première partie à χ_ℓ , ce qui donne

$$(4) \quad \chi_\ell(z_0) \leq \int_{|z-z_0|=\rho} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \text{Log } |v_j(f(z))| \right) |dz|$$

où les $v_j(f(z))$ sont les ℓ éléments de $\Lambda(f(z)) \cap B(\alpha_0, s)$ au voisinage de l'un des $\lambda_1(f(z_0)), \dots, \lambda_\ell(f(z_0))$. Maintenant réunissons les ℓ éléments $v_j(f(z))$ aux $n-\ell$ éléments de $\Lambda(f(z)) \cap B(\alpha_0, s)$ qui ont respectivement pour modules $\alpha_{\ell+1}(z), \dots, \alpha_n(z)$. Ces n éléments peuvent être ordonnés, en modules, de façon qu'ils soient respectivement inférieurs à $|\lambda_1(f(z))|, \dots, |\lambda_n(f(z))|$. L'addition de (3) et (4) prouve donc que χ_n satisfait localement l'inégalité de la moyenne en z_0 .

Supposons maintenant que $|\lambda_n(f(z_0))| = |f(z_0)|_\Phi$ avec $|\lambda_{n-1}(f(z_0))| > |f(z_0)|_\Phi$.

Comme

$$(5) \quad \chi_n(z_0) = \chi_{n-1}(z_0) + \text{Log } |f(z_0)|_\Phi$$

on applique ce qui précède au cas $n-1$ et le fait que $z \rightarrow \text{Log } |f(z)|_\Phi$ est sous-harmonique, d'après le théorème de Vesentini, pour déduire que χ_n satisfait localement l'inégalité de la moyenne. Les autres cas se font de façon semblable. $\square$

Les résultats contenus dans cet article correspondent au dernier chapitre de la thèse de doctorat du second auteur [5].

Bibliographie

- [1] AUPETIT, B., *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*, Lecture Notes in Mathematics, no 735, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.
- [2] AUPETIT, B., Inessential elements in Banach algebras, *Bull. London Math. Soc.* 18(1986), 493-497.
- [3] BARNES, B.A., MURPHY, G.J., SMYTH, M.R.F., WEST, T.T., *Riesz and Fredholm Theory in Banach Algebras*, Research Notes in Mathematics, no 67, Pitman, Boston, 1982.
- [4] DALECKII, Ju. L., KREIN, M.G., *Stability of Solutions of Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1974.
- [5] IYAMUREMYE, A., *Eléments de Fredholm et de Riesz dans les algèbres de Banach*, Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1986.
- [6] ZEMÁNEK, J., The essential spectral radius and the Riesz part of spectrum, *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai* 35(1980), 1275-1288.

B. Aupetit
Faculté des lettres et sciences sociales
Université de Bretagne occidentale
20, Avenue Le Gorgeu
29200 Rennes
France

A. Iyamuremye
Département de mathématiques et statistique
Université Laval
Sainte-Foy, Québec
Canada G1K 7P4

Manuscrit reçu le 2 septembre 1987.
Révisé le 26 janvier 1988.