

## CALCULS FONCTIONNELS HARMONIQUE ET ANALYTIQUE RÉEL

M. Akkar, A. El Kinani, M. Oudadess

### Abstract

We define and study two new functional calculus. The first one, say harmonic, in Banach algebras with continuous involution, consists in giving a sens to  $f(x)$  whenever  $x$  is an element of such algebra and  $f$  is a harmonic function in an open set  $U$  containing  $S_{px}$ . The second, say real analytic, in hermitian commutative Banach algebras, consists in giving a sens to  $f(x)$  whenever  $x$  is an element of such algebra and  $f$  is an analytic function in two real variables on a neighborhood  $U$  of  $S_{px}$ .

### Résumé

Nous ne considérons que les algèbres de Banach munies d'une involution continue (resp. les algèbres de Banach commutatives hermitiennes). Notre objectif est de définir et d'étudier sur ces algèbres un calcul fonctionnel harmonique (resp. analytique réel) consistant à donner un sens à  $f(x)$  où  $x$  est un élément de l'algèbre et  $f$  une fonction harmonique sur un ouvert  $U$  contenant  $S_{px}$  (resp. fonction analytique de deux variables réelles sur  $U$ ).

### Introduction

On sait qu'il existe un calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres de Banach complexes, qui permet de donner un sens à  $f(x)$  où  $x$  est un élément de

l'algèbre et  $f$  est une fonction holomorphe sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  contenant  $spx$  [3].

Dans cet article, nous donnons deux autres calculs fonctionnels. Le premier est le calcul fonctionnel harmonique dans les algèbres de Banach qui admettent une involution continue. Il consiste, en gros, à donner un sens à  $f(x)$  où  $f$  est une fonction harmonique sur un ouvert  $U$  contenant  $spx$ . Une fois ce calcul défini, nous montrons que pour les  $\mathbb{C}^*$ -algèbres commutatives on le retrouve à partir du calcul fonctionnel connu sur ces dernières [4]. De même, nous prouvons que dans le cas où  $f$  est une fonction holomorphe, l'expression de  $f(x)$  donnée dans le cas harmonique coïncide avec celle donnée dans le cas holomorphe. Par ailleurs, nous montrons que ce calcul est unique et continu et établissons le "Spectral mapping theorem" dans le cas où tout caractère est hermitien. On termine cette partie en montrant que ce dernier résultat n'est pas vrai dans les  $\mathbb{C}^*$ -algèbres non commutatives ni dans les algèbres de Banach commutatives à involution continue mais qui admettent des caractères non hermitiens.

Le deuxième calcul fonctionnel dit analytique réel est défini dans les algèbres de Banach unitaires commutatives hermitiennes. Il permet de donner un sens à  $f(x)$ , où  $x$  est un élément de l'algèbre et  $f$  est une fonction analytique de deux variables réelles, sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $Spx$ . Pour ce faire, nous utilisons le calcul fonctionnel holomorphe de deux variables. C'est ce en quoi consiste ce calcul dû à une suggestion du professeur G. A. Allan [1]; du point de vue technique, nous avons été amenés à établir un isomorphisme algébrique entre l'algèbre des fonctions analytiques de deux variables réelles sur  $U$  notée  $A(U)$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et une limite inductive d'algèbres de fonctions holomorphes. Par ailleurs, on écrit  $A(U)$  comme limite inductive d'algèbres de fonctions analytiques particulières. Ceci nous permet de munir l'algèbre  $A(U)$  de deux topologies qui rendent topologique l'isomorphisme algébrique précédent. L'une est une topologie image réciproque. Quant à l'autre c'est une topologie limite inductive. Nous montrons que les deux topologies coïncident sur  $A(U)$ . Nous revenons ensuite au calcul fonctionnel analytique réel et prouvons qu'il est unique et

continu et vérifie le "Spectral mapping theorem". Enfin, nous montrons que la restriction de ce calcul à l'espace vectoriel de fonctions harmoniques coïncide avec celui défini à la Section 1.

## 0. Préliminaires

Nous nous intéressons aux fonctions analytiques telles qu'elles sont définies dans [5].

Soit  $U$  une partie ouverte de  $\mathbb{C}$ . On désignera par  $h(U)$  l'ensemble des fonctions harmoniques dans  $U$  et par  $H(U)$  l'ensemble des fonctions holomorphes dans  $U$ .

On rappelle la définition suivante:

DÉFINITION 0.1. Soit  $A$  une algèbre de Banach involutive et  $x$  un élément de  $A$ . On définit la partie réelle de  $x$  notée  $\operatorname{Re} x$ , et la partie imaginaire de  $x$  notée  $\operatorname{Im} x$  par:  $\operatorname{Re} x = \frac{1}{2}(x+x^*)$ ;  $\operatorname{Im} x = \frac{1}{2i}(x-x^*)$ .

La proposition suivante est de démonstration classique.

PROPOSITION 0.2. Soit  $A$  une algèbre de Banach à involution continue et  $g$  une application continue de l'intervalle  $[a,b]$ ,  $a < b$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $A$ . Alors:

$$\left( \int_a^b g(t) dt \right)^* = \int_a^b g(t)^* dt.$$

Rappelons qu'on désigne par  $R(\mathbb{C}^n)$  l'algèbre des fractions rationnelles sur  $\mathbb{C}^n$  et  $H(U,A)$  celle des fonctions holomorphes sur  $U$  à valeurs dans  $A$ . On considère les parties rationnellement convexes au sens de [3]. De la même manière que pour les parties polynomialement convexes [3], on démontre le résultat suivant:

PROPOSITION 0.3. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ ,  $K$  une partie compacte rationnellement convexe de  $\mathbb{C}^n$ . Alors,  $K$  admet un système fondamental de voisinages compacts rationnellement convexes.

1. Calcul fonctionnel harmonique dans les algèbres de Banach involutives1.1. Construction du calcul fonctionnel harmonique

Une façon naturelle de définir un calcul fonctionnel harmonique est d'utiliser la formule intégrale de Poisson comme on utilise la formule intégrale de Cauchy dans le cas holomorphe.

DÉFINITION 1.1.1. Soit  $A$  une algèbre de Banach complexe à involution continue,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $Z_0$  un élément de  $U$  tel que  $\overline{D(Z_0, R)}$  soit contenu dans  $U$ , ( $R > 0$ ),  $x$  un élément de  $A$  avec  $Spx$  contenu dans  $D(Z_0, R)$  et  $f$  un élément de  $h(U)$ . On pose, alors:

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|Z-Z_0|=R} f(Z) \operatorname{Re}(Z+x-2Z_0) (Z-x)^{-1} \frac{|dZ|}{R}.$$

PROPOSITION 1.1.2. Soit  $f$  et  $g$  deux éléments de  $h(U)$ ,  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{C}$  et  $x$  un élément de  $A$  qui vérifie les conditions de la Définition 1.1.1. Alors:

- (i)  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ .
- (ii)  $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ .
- (iii)  $f(x)^* = \overline{f(x)}$ .

PREUVE. C'est une conséquence immédiate de la Définition 1.1.1 et de la Proposition 0.2.

REMARQUE 1.1.3. En utilisant le calcul holomorphe classique, on montre qu'un calcul fonctionnel harmonique vérifiant les trois propriétés de la Proposition 1.1.2 est nécessairement donné par la formule (1).

REMARQUE 1.1.4. Les fonctions holomorphes étant des fonctions harmoniques particulières, il est naturel de se demander si l'expression de  $f(x)$  donnée par le calcul fonctionnel holomorphe coïncide avec celle donnée par le calcul fonctionnel harmonique: la réponse est positive.

REMARQUE 1.1.5. En utilisant le fait que tout caractère est hermitien dans les  $\mathbb{C}^*$ -algèbres unitaires commutatives, on montre que dans ces algèbres, on retrouve l'expression (1) à partir du calcul fonctionnel connu sur ces dernières [4].

## 1.2. Unicité du calcul fonctionnel harmonique

On considère maintenant l'application  $\phi$  définie par:

$$\phi : h(U) \rightarrow A$$

$$f \mapsto \phi(f) = f(x).$$

THÉOREME 1.2.1. L'application  $\phi$  de  $h(U)$  dans  $A$  est caractérisée par les propriétés suivantes:

a) C'est un homomorphisme involutif d'espaces vectoriels et sa restriction à  $H(U)$  est un homomorphisme d'algèbres.

b) Si une suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  dans tout disque fermé contenu dans  $U$  et contenant  $S_{px}$  en son intérieur, alors la suite  $(f_n(x))_n$  converge uniformément vers  $f(x)$  pour la norme.

PREUVE. Il est aisé de voir que l'application  $\phi$  vérifie les propriétés ci-dessus. Montrons que s'il existe une application possédant ces propriétés, c'est nécessairement l'application  $\phi$ .

Soit  $\tilde{\phi}$  une telle application de  $h(U)$  dans  $A$ . Alors, il suffit de démontrer  $\tilde{\phi}(f) = \phi(f)$  pour toute fonction harmonique réelle. En effet, le cas d'une fonction harmonique à valeurs complexes s'y ramène en séparant le réel et l'imaginaire.

Soit  $f$  une fonction harmonique réelle dans  $U$  et soit  $D(Z_0, R)$  le disque ouvert tel que  $S_{px} \subset D(Z_0, R)$  et  $\overline{D(Z_0, R)} \subset U$ . Alors, il existe une fonction  $g$  holomorphe sur un voisinage  $U_1$  de  $\overline{D(Z_0, R)}$  dont la partie réelle soit  $f$ . Soit  $E$  une enveloppe domaine de Cauchy de  $(\overline{D(Z_0, R)}, U_1)$ . Alors, on a:

$$f(Z) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{g(Z')}{Z' - Z} dZ' \right), \quad \text{pour tout } Z \text{ dans } \overset{\circ}{E}.$$

L'expression de droite est la limite des sommes de la forme:

$$f_n(Z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^n g(Z'_k) (Z'_k - Z)^{-1} (Z'_{k+1} - Z'_k) \right\},$$

où  $Z'_k \in \partial E$  pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . De plus  $f_n$  converge uniformément sur l'ouvert  $\mathring{E}$ . Et par l'unicité du calcul fonctionnel holomorphe et la condition (a),  $f_n$  a pour image par  $\phi$ :

$$\tilde{f}_n(x) = \tilde{\phi}_n(f) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^n g(Z'_k) (Z'_k e^{-x})^{-1} (Z'_{k+1} - Z'_k) \right\}.$$

Et d'après la condition b) on a:  $\tilde{f}_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} \tilde{f}(x)$ . Mais  $f_n(x)$  converge aussi vers  $f(x)$  pour la norme, d'où  $\tilde{f}(x) = f(x)$ .

### 1.3. Continuité du calcul fonctionnel harmonique

On va voir que le calcul fonctionnel construit est continu pour la topologie de la convergence uniforme. En fait, on a même plus:

PROPOSITION 1.3.1. Soit  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative à involution continue,  $x$  un élément de  $A$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $Z_0$  un élément de  $U$  et  $R > 0$  tel que  $\overline{D(Z_0, R)}$  soit contenu dans  $U$ . Si  $K$  est un compact contenu dans  $U$  et contenant  $\overline{D(Z_0, R)}$ , alors l'application:

$$\begin{aligned} \phi : (h(U), P_K) &\rightarrow (A, \|\cdot\|) \\ f &\mapsto \phi(f) \end{aligned}$$

est continue, où  $P_K(f) = \sup_{Z \in K} |f(Z)|$ .

$$\begin{aligned} \text{PREUVE. } \|f(x)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|Z-Z_0|=R} f(Z) \operatorname{Re}(Z+x-2Z_0) (Z-x)^{-1} \frac{dZ}{R} \right\| \\ &\leq MP_K(f), \quad \text{où } M = \frac{1}{2\pi} \int_{|Z-Z_0|=R} \|\operatorname{Re}(Z+x-2Z_0) (Z-x)^{-1}\| \frac{|dZ|}{R}. \end{aligned}$$

1.4. Le "Spectral mapping theorem"

Le "Spectral mapping theorem" est vrai dans les  $\mathbb{C}^*$ -algèbres commutatives pour les fonctions harmoniques car ces dernières sont continues. Nous allons voir qu'il est aussi vrai dans les algèbres de Banach commutatives unitaires à involution continue et dont tout caractère est hermitien.

PROPOSITION 1.4.1. Soit  $A$  une algèbre de Banach commutative unitaire à involution continue et dont tout caractère est hermitien,  $x$  un élément de  $A$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $Z_0$  un élément de  $\mathbb{C}$  et  $R > 0$  tel que  $\overline{D(Z_0, R)}$  soit contenu dans  $U$ ,  $x$  un élément de  $A$  avec  $\text{Sp}_A x$  contenu dans  $D(Z_0, R)$  et  $f$  un élément de  $h(U)$ . Alors:  $\widehat{f(x)} = f \circ \hat{x}$ .

PREUVE. Si  $X$  est un caractère non nul de  $A$ , on a:

$$X(f(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|Z-Z_0|=R} f(Z) \text{Re}(Z+X(x)-2Z_0)(Z-X(x))^{-1} \frac{|dZ|}{R} = f(X(x)).$$

COROLLAIRE 1.4.2. "Spectral mapping theorem". Si  $f$  et  $x$  vérifient les conditions de la Proposition 1.4.1, alors  $f(\text{Sp}_A x) = \text{Sp}_A f(x)$ .

COROLLAIRE 1.4.3. Si  $A$  est une  $\mathbb{C}^*$ -algèbre unitaire non commutative,  $x$  un élément normal de  $A$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $Z_0$  un élément de  $U$ ,  $\overline{D(Z_0, R)} \subset U$ ,  $\text{Sp}_A x \subset D(Z_0, R)$  et  $f \in h(U)$ , alors on a le "Spectral mapping theorem".

PREUVE. La sous  $\mathbb{C}^*$ -algèbre unitaire engendrée par  $x$  est une  $\mathbb{C}^*$ -algèbre commutative unitaire et elle est pleine.

Dans le cas des  $\mathbb{C}^*$ -algèbres non commutatives, le "Spectral mapping theorem" ne reste plus valable pour des éléments non normaux de l'algèbre. En effet, on a le contre-exemple suivant:

CONTRE-EXEMPLE 1.4.4. Soit  $A = L(\mathbb{C}^2)$ . C'est une algèbre non commutative. Soit  $U$  définie par la matrice  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  définie par  $f(Z) = \text{Re } Z$ . Alors, on a:

$$\text{Sp}_A(U) = \{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}; \quad f(\text{Sp}_A U) = \{0\}.$$

Et par suite  $f(\text{Sp}U) \neq \text{Sp}f(U)$ .

Dans les algèbres de Banach commutatives à involution continue qui admettent des caractères non hermitiens, le "Spectral mapping theorem" n'est pas vrai non plus. En effet:

CONTRE-EXEMPLE 1.4.5. Soit  $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  munie des opérations et de la norme suivantes:

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y'), \quad (x, y)(x', y') = (xx', yy'),$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \overline{\lambda} y), \quad (x, y)^* = (y, x),$$

$$\|(x, y)\| = \text{Max}(\|x\|, \|y\|).$$

$A$  est une algèbre de Banach à involution continue et elle admet des caractères non hermitiens. En effet,  $(i, i)$  est hermitien et  $\text{Sp}(i, i) = \{i, -i\}$  est non réel.

Soit  $f$  définie par  $f(Z) = \text{Re } Z$  et  $x = (i, i)$  un élément de  $A$ . On a:

$$\text{Sp}f(x) = \left\{ \frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2} \right\}, \quad f(\text{Sp}x) = \{1, 0\}.$$

Et par suite  $f(\text{Sp}x) \neq \text{Sp}f(x)$ .

## 2. Calcul fonctionnel analytique réel dans les algèbres de Banach hermitiennes

### 2.1. Construction du calcul fonctionnel analytique réel

Toute fonction  $f$  analytique d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{C}$  se prolonge en une fonction  $F$  analytique de  $V$  dans  $\mathbb{C}$ , où  $V$  est une partie ouverte de  $\mathbb{C}^2$  telle que  $V \cap \mathbb{R}^2 = U$ . L'idée consiste à construire le calcul fonctionnel analytique réel d'une seule variable en fonction du calcul holomorphe de deux variables.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  une application analytique de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors, il existe une partie ouverte  $V$  de  $\mathbb{C}^2$  telle que  $V \cap \mathbb{R}^2 = U$ , et une

application  $F$  analytique de  $V$  dans  $\mathbb{C}$  qui prolonge  $f$ . De plus, on a :

$V = \bigcup_{x \in U} Q_x$ , avec  $Q_x$  un polydisque ouvert de  $\mathbb{C}^2$  centré en  $x$ .

On note par  $V_0(U)$  l'ensemble des parties  $V$  de  $\mathbb{C}^2$  qui sont réunion de polydisques centrés en des éléments de  $U$  telles que  $V \cap \mathbb{R}^2 = U$ , et l'on ordonne de la façon suivante :

$$V \leq W \iff W \subset V.$$

On désigne, lorsque  $V$  est un élément de  $V_0(U)$ , par  $(V)$  l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $V$ .

Si  $V \leq W$ , on désigne par :

$$\begin{aligned} \pi_{W,V}: (V) &\rightarrow (W) \\ F &\mapsto F/W. \end{aligned}$$

Alors  $\pi_W$  est injective. Et par conséquent, on peut considérer que :

$$\varinjlim (V) = \bigcup_{V \in V_0(U)} (V).$$

Soit maintenant  $\psi$  l'application définie par :

$$\begin{aligned} (1') \quad \psi: A(U) &\rightarrow \varinjlim (V) \\ f &\mapsto \psi(f) = F, \end{aligned}$$

où  $A(U)$  est l'algèbre des fonctions analytiques sur  $U$ .

LEMME 2.1.1. L'application  $\psi$  définie par (1') est un isomorphisme d'algèbres.

PREUVE. Par construction,  $\psi$  est une application bijective. Montrons que c'est un morphisme d'algèbres. Soit  $f$  et  $g$  deux éléments de  $A(U)$ . Il existe  $V_i$  et  $F_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  où  $V_i \in V_0(U)$  et  $F_i \in (V_i)$  tels que :  $\psi(f) = F_1$ ,  $\psi(g) = F_2$  et  $\psi(f+g) = F_3$ .

Soit maintenant  $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ . Alors  $V$  contient un élément noté encore  $V$  de  $V_0(U)$ ; et on a  $F_3 = F_1 + F_2$  sur  $V$ . En effet, soit  $Z$  un élément de  $V$ . Alors il existe un polydisque ouvert  $Q_x$  centré en  $x$  élément de  $U$  et qui contient  $Z$ . Or, sur  $Q_x \cap \mathbb{R}^2$   $F_3$  et  $F_1 + F_2$  coïncident, et par prolongement analytique  $F_3 = F_1 + F_2$  sur  $Q_x$ . D'où  $F_3(Z) = (F_1 + F_2)(Z)$  et par suite  $F_3 = F_1 + F_2$  sur  $V$ . Ainsi,  $\psi(f+g) = \psi(f) + \psi(g)$ . De la même façon, on montre que  $\psi(f \cdot g) = \psi(f) \cdot \psi(g)$  et  $\psi(\lambda f) = \lambda \psi(f)$  où  $\lambda$  est un élément quelconque de  $\mathbb{C}$ .

Soit maintenant  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative hermitienne et  $a$  un élément de  $A$ . Alors,  $a = h + ik$  avec  $h$  et  $k$  deux éléments hermitiens de  $A$ . On pose  $a' = (h, k)$ ,  $\text{Sp}_A^a$  le spectre simultané de  $(h, k)$  et on note par  $\theta_{a'}$ , l'application qui définit le  $\text{Sp}_A^A(h, k) \subset \text{Sp}_A h \times \text{Sp}_A k \subset \mathbb{R}^2$ . Soit l'isomorphisme:

$$\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} / (x, y) \mapsto x + iy.$$

On a alors:

$$\text{Sp}_A^a = (\text{Sp}_A(h, k)).$$

Et par conséquent, on peut identifier  $\text{Sp}_A^a$  et  $\text{Sp}_A(h, k)$ .

DÉFINITION 2.1.2. Soit  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative hermitienne,  $a$  un élément de  $A$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $\text{Sp}_A^a$  et  $f$  un élément de  $A(U)$ . On pose:

$$f(a) = \theta_{a'}(\psi(f)) = \psi(f)(h, k),$$

où  $a = h + ik$  et  $a' = (h, k)$  avec  $h, k$  éléments hermitiens de  $A$ . Si on note par  $\phi_a(f)$  l'élément  $f(a)$ , on a:

$$(1'') \quad \begin{aligned} \phi_a: A(U) &\rightarrow A \\ f &\mapsto \phi_a(f) = f(a). \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.1.3. L'application  $\phi_a$  définie par (1'') est un morphisme d'algèbres.

PREUVE. Par construction, on a:  $\phi_a = \theta_a \circ \psi$ . Or  $\theta_a$  est un morphisme d'algèbres et  $\psi$  en est un d'après le Lemme 2.1.1. D'où le résultat.

REMARQUE 2.1.4. Dans les  $\mathbb{C}^*$ -algèbres unitaires commutatives, on retrouve l'expression (1'') à partir du calcul fonctionnel, connu sur celle-ci, donné dans [4].

## 2.2. Le "Spectral mapping theorem"

Le "Spectral mapping theorem" est vrai dans les  $\mathbb{C}^*$ -algèbres unitaires commutatives pour les fonctions analytiques réelles car ces dernières sont continues. Il est également vrai dans les algèbres de Banach unitaires commutatives hermitiennes.

PROPOSITION 2.2.1. Soit  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative hermitienne,  $a$  un élément de  $A$  avec  $a = h + ik$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $\text{Sp}_A a$  et  $f$  est un élément de  $A(U)$ . Alors  $\widehat{f(a)} = f \circ \widehat{a}$ .

COROLLAIRE 2.2.1. "Spectral mapping theorem". Soit  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative hermitienne. Si  $a$  et  $f$  sont telles que dans la Proposition 2.2.1, alors:

$$\text{Spf}(a) = f(\text{Sp} a).$$

## 2.3. Topologie sur $A(U)$

L'application  $\psi$  définie par (1') est un isomorphisme algébrique de  $A(U)$  sur  $\varinjlim (V)$ . Une topologie naturelle sur  $A(U)$  qui rend  $\psi$  continue est la topologie image réciproque par  $\psi$  de la topologie limite inductive de  $\varinjlim (V)$ . Nous allons voir que  $A(U)$  munie de cette topologie est une limite inductive (algébrique et topologique) d'espaces de fonctions analytiques particulières.

Pour tout  $V$  dans  $V_0(U)$ , on note par  $\tau_V$  la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $V$  sur  $A(V)$ , et par  $\tau$  la topologie limite inductive, sur  $\varinjlim (V)$  des topologies  $\tau_V$ . On munit  $A(U)$  de la topologie  $\tau_0$  image réciproque par  $\psi$  de  $\tau$ . On note par  $E(U)$  l'ensemble des écritures de  $U$  sous

forme de réunion de pavés centrés en des éléments de  $U$  et on l'ordonne de la façon suivante:

$$\bigcup_{x \in U} I_x^{\alpha(x)} \leq \bigcup_{x \in U} I_x^{\alpha'(x)} \iff I_x^{\alpha'(x)} \subset I_x^{\alpha(x)}, \quad \forall x \in U.$$

Lorsque  $\bigcup_{x \in U} I_x^{\alpha(x)}$  est un élément de  $E(U)$ , on pose  $\alpha = (\alpha(x))_{x \in U}$  et on désigne par  $U_\alpha$  l'écriture  $\bigcup_{x \in U} I_x^{\alpha(x)}$ . On note, alors, par  $A_\alpha(U)$  l'ensemble des fonctions  $f$  analytiques sur  $U$  telles que  $f$  est développable en série entière sur  $I_x^{\alpha(x)}$  pour  $x$  dans  $U$ . Si  $\bigcup_{x \in U} I_x^{\alpha(x)} \leq \bigcup_{x \in U} I_x^{\alpha'(x)}$  on considère

$$P_{\alpha', \alpha}: A_\alpha(U) \rightarrow A_{\alpha'}(U) \\ f \mapsto f$$

où  $U_{\alpha'} = \bigcup_{x \in U} I_x^{\alpha'(x)}$  et  $U_\alpha = \bigcup_{x \in U} I_x^{\alpha(x)}$ . Ainsi  $(A(U), P_{\alpha', \alpha})_{\alpha', \alpha}$  est un système inductif. Soit maintenant  $\varinjlim A_\alpha(U)$  une limite inductive de ce système. Pour tout  $U_\alpha$  élément de  $E(U)$ , on a:

$$P_\alpha: A_\alpha(U) \rightarrow \varinjlim A_\alpha(U) \\ f \mapsto \overline{(f, U_\alpha)}.$$

Alors  $P_\alpha$  est injective du fait que les  $P_{\alpha', \alpha}$  le sont. Et par conséquent, on peut considérer que:

$$\varinjlim A_\alpha(U) = \bigcup_\alpha A_\alpha(U) = A(U).$$

Soit  $U_\alpha$  un élément de  $E(U)$ . Alors, il existe  $V_\alpha$  dans  $V_0(U)$  tel que  $\psi(A_\alpha(U)) = (V_\alpha)$ . Et par suite, si on note  $\psi/A_\alpha(U)$  par  $\psi_\alpha$ , on a:

$$\psi_\alpha: A(U) \rightarrow A(V_\alpha) \\ f \mapsto \psi_\alpha(f)$$

qui est linéaire bijective.

Par ailleurs, l'image réciproque par  $\psi_\alpha$  de la topologie  $\tau_{V_\alpha}$  de  $(V_\alpha)$  est une topologie de  $F$ -espace sur  $A_\alpha(U)$  notée  $\tau'_\alpha$ . Finalement, on munit  $A_\alpha(U)$  de la topologie notée  $\tau'$ , limite inductive des topologies  $\tau'_\alpha$  des espaces  $A_\alpha(U)$ .

Voici un résultat dont nous omettons la preuve puisque nous ne l'utiliserons pas dans cet article.

PROPOSITION 2.3.1. La topologie  $\tau'$  et la topologie  $\tau_0$  image réciproque par  $\psi$  de la topologie  $\tau$  de  $\varinjlim (V)$  coïncident sur  $A(U)$ .

#### 2.4. Cas des fonctions harmoniques

Du fait que les fonctions harmoniques sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  sont des fonctions analytiques de deux variables réelles, il est naturel de se demander si l'expression de  $f(a)$  donnée par le calcul harmonique, définie dans la Section 1 coïncide avec celle donnée par le calcul analytique réel. La réponse est positive. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $U = \bigcup_{Z \in U} D(Z, R(Z))$  une écriture de  $U$  fixée. On note par  $H_R(U)$  l'ensemble des fonctions développables en séries entières sur

$$\left]x - \frac{R(Z)}{2}, x + \frac{R(Z)}{2}\right[ \times \left]y - \frac{R(Z)}{2}, y + \frac{R(Z)}{2}\right[$$

pour tout  $(x, y) \in U$ . Si  $V_R = \bigcup_{(x, y) \in U} Q_{(x, y)}$ , avec  $Q_{(x, y)}$  le polydisque  $D(x, \frac{R(Z)}{2}) \times D(y, \frac{R(Z)}{2})$ ; on désigne par  $(V_R)$  l'ensemble des fonctions analytiques sur  $V_R$ .

LEMME 2.4.1. Si  $h(U)$  désigne l'ensemble des fonctions harmoniques sur  $U$ , alors on a:

- 1)  $\psi(H_R(U)) = (V_R)$ ,
- 2)  $h(U) \subset H_R(U)$ .

PREUVE. 1) découle de la construction de  $H_R(U)$  et de  $\psi$ .

2) Si  $f$  est un élément de  $h(U)$ , alors  $f$  est développable en séries entières sur

$$\left]x - \frac{R(Z)}{2}, x + \frac{R(Z)}{2}\right[ \times \left]y - \frac{R(Z)}{2}, y + \frac{R(Z)}{2}\right[$$

pour tout  $(x, y)$  dans  $U$ . D'où le résultat.

Soit maintenant  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative hermitienne,  $a$  un élément de  $A$  tel que  $Sp_A a$  est contenu dans  $U$ . Alors la restriction de  $\psi_a$  à  $h(U)$  est continue. En effet:

LEMME 2.4.2. L'application  $\psi_a/h(U)$  est continue de  $(h(U), (P_K)_K)$  dans  $(A, \|\cdot\|)$ .

PREUVE. Par construction de  $\phi_a$ , on a  $\phi_a = \theta_{a'} \circ \psi$ . Par ailleurs,  $\theta_{a'}$  est continue. Montrons que  $\psi/h(U)$  est continue. On a, d'après le Lemme 2.4.1:

$$\begin{aligned} \psi/h(U): (h(U), (P_K)_K) &\rightarrow ((V_R), \tau_{V_R}) \\ f &\mapsto F. \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que  $\psi/h(U)$  est une application linéaire entre deux  $F$ -espaces. Pour finir, montrons que  $\psi/h(U)$  est à graphe fermé.

Soit  $(g_n)$  une suite de  $h(U)$  qui converge vers  $g$  telle que  $G_n = \psi/h(U)(g_n)$  converge vers  $G$  dans  $(V_R)$ . Alors, pour tout élément  $x$  de  $U$ ,  $G_n(x)$  converge vers  $G(x)$ . Par ailleurs  $G_n(x) = g_n(x)$  pour tout  $x$  dans  $U$ . Et par suite  $\psi/h(U)(g) = G$ .

PROPOSITION 2.4.3. Soit  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative hermitienne à involution continue,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $Z_0$  un élément de  $U$  tel que  $\overline{D(Z_0, R_1)}$  soit contenu dans  $U$  ( $R_1 > 0$ ),  $a$  un élément de  $A$  avec  $Sp_A a$  contenu dans  $D(Z_0, R_1)$ . Alors la définition de  $f(a)$  donnée par 2.1.2 et la Définition 1.1.1 coïncident.

PREUVE. Nous allons montrer que  $\phi_a/h(U)$  vérifie les propriétés données par le Théorème 1.4.1.

Par la Proposition 2.1.3,  $\phi_a/h(U)$  est un homomorphisme d'espaces vectoriels et sa restriction à  $H(U)$  est un morphisme d'algèbres. Ensuite, si  $f$  est réelle, il existe  $g$  holomorphe dans  $D(Z_0, R_1)$  telle que  $f = \operatorname{Re} g$  donc  $\phi_a(f) = \operatorname{Re} \phi_a(g)$ . D'où  $f(a) = \phi_a/h(U)(f)$  est hermitien. Si maintenant  $f$  est une fonction harmonique quelconque, alors  $f = f_1 + if_2$  avec  $f_1$  et  $f_2$  deux

fonctions harmoniques réelles. Et par suite:

$$\phi_a/h(U)(f)^* = \phi_a/h(U)(f).$$

Par ailleurs, si  $(f_n)_n$  est une suite de fonctions harmoniques sur  $U$ , qui converge uniformément vers  $f$  dans un ouvert  $U_1$  contenant  $\overline{D(Z_0, R_1)}$  et contenu dans  $U$ , alors, d'après le Lemme 2.4.2,  $\phi_a/h(U_1)(f_n/U_1)$  converge vers  $\phi_a/h(U_1)(f/U_1)$  pour la norme. Enfin, d'après la construction de  $\phi_a$ , on a:

$$\phi_a/h(U_1)(f_n/U_1) = \phi_a(f_n)$$

car

$$\begin{aligned} \phi_a(f_n) &= \theta_a \circ \psi(f_n) = \theta_a, ((f_n, V_R)) \quad \text{où } (f_n)_n \subset (V_R) \\ &= \theta_a, ((f_n/V_1, V_1)) \quad \text{avec } V_1 \in V_0(U_1) \text{ et } V_1 \subset V_R \\ &= \theta_a, (f_n/V_1) = \theta_a \circ \psi/h(U_1)(f_n/U_1) \\ &= \phi_a/h(U_1)(f_n/U_1). \end{aligned}$$

De même

$$\phi_a/h(U_1)(f/U_1) = \phi_a(f),$$

d'où

$$\phi_a(f_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} \phi_a(f).$$

Ainsi:  $\phi = \phi_a/h(U)$  car  $\phi$  est l'unique application de  $h(U)$  dans  $A$  qui vérifie les propriétés précédentes.

## 2.5. Unicité du calcul analytique réel

De la même manière que pour la proposition 9, p. 29 dans [3], on démontre la

PROPOSITION 2.5.1. Soit  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative hermitienne,  $h$  et  $k$  deux éléments quelconques de  $A$  tels que la sous-algèbre involutive pleine de  $A$  engendrée par  $h$  et  $k$  est dense dans  $A$ . Pour  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ , les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1)  $(\lambda_1, \lambda_2) \in Sp_A(h, k)$ ,
- 2)  $|R(\lambda_1, \lambda_2)| \leq \|R(h, k)\|$ , pour tout  $R$  dans  $R(\mathbb{C}^2)$ ,

3)  $|R(\lambda_1, \lambda_2)| \leq \rho |R(h, k)|$ , pour tout  $R$  dans  $R(\mathbb{C}^2)$ .

Comme conséquence de cette proposition, on obtient également le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.5.2.** Soit  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative hermitienne,  $h$  et  $k$  deux éléments quelconques de  $A$ . Si  $A_1$  est la fermeture de la sous-algèbre involutive pleine engendrée par  $h$  et  $k$ , alors  $Sp_{A_1}(h, k)$  est l'enveloppe rationnellement convexe de  $Sp_A(h, k)$ .

**PROPOSITION 2.5.3.** Soit  $A$  une algèbre de Banach unitaire commutative hermitienne,  $h$  et  $k$  deux éléments hermitiens de  $A$ . Alors  $Sp_A(h, k)$  est rationnellement convexe.

**PREUVE.** Soit  $a = h + ik$  et  $B$  la fermeture de la sous-algèbre pleine involutive engendrée par  $a$ . Il est clair que la sous-algèbre pleine involutive fermée engendrée par  $h$  et  $k$  est égale à  $B$ .

Par ailleurs,  $Sp_A a = Sp_B a$  (car  $B$  est hermitienne). D'où

$$\begin{aligned} \widetilde{Sp_A}(h, k) &= Sp_B(h, k) \quad (\text{d'après le Corollaire 2.5.2}) \\ &= Sp_B(a) \quad (\text{car } B \text{ est hermitienne}) \\ &= Sp_A(a) = Sp_A(h, k). \end{aligned}$$

Comme dans [3], on obtient également le :

**LEMME 2.5.4.** Soit  $V$  un voisinage ouvert dans  $\mathbb{C}^2$ ,  $f$  un élément de  $(V)$ ,  $V'$  un voisinage compact rationnellement convexe contenu dans  $V$ ,  $R$  l'ensemble des restrictions à  $V'$  des fonctions rationnelles sur  $\mathbb{C}^2$  et  $B$  la fermeture de  $R$  dans  $C(V')$ . Alors,  $f/V' \in B$ .

**THÉORÈME 2.5.5.** L'application  $\phi_a$  de  $(A(U), \tau_0)$  dans  $(A, \| \cdot \|)$  est caractérisée par les propriétés suivantes :

(i) C'est un morphisme unitaire vérifiant :

$$\phi_a(x_1) = \operatorname{Re} a \quad \text{et} \quad \phi_a(x_2) = \operatorname{Im} a,$$

où  $x_1$  et  $x_2$  désignent les fonctions coordonnées sur  $U$ .

(ii)  $\phi_a$  est continue et pour tout ouvert  $U'$ , contenu dans  $U$  et contenant  $\text{Sp}_A$ , on a:  $\phi_a(f) = \phi_a(f/U')$ ,  $\forall f \in A(U)$ .

PREUVE. Il est facile de voir que l'application  $\phi_a$  vérifie les propriétés ci-dessus. Montrons que s'il existe une application possédant ces propriétés, alors c'est nécessairement l'application  $\phi_a$ .

Soit  $\tilde{\phi}_a$  une application de  $(A(U), \tau_0)$  dans  $(A, \|\cdot\|)$  possédant les propriétés du théorème. Alors  $\tilde{\phi}_a \circ \psi^{-1}$  est un morphisme unitaire continu de  $(\varinjlim (V), \tau)$  dans  $(A, \|\cdot\|)$  vérifiant:

$$\tilde{\phi}_a \circ \psi^{-1}(Z_1) = \text{Re } a \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}_a \circ \psi^{-1}(Z_2) = \text{Im } a.$$

Soit  $F$  un élément de  $\varinjlim (V)$ . Il existe  $V$  dans  $V_0(U)$  tel que  $F = \Pi_V(F) = \overline{(F, V)}$  pour tout  $F \in (V)$ .

Soit maintenant  $V'$  un voisinage compact rationnellement convexe de  $\text{Sp}_A(h, k)$  contenu dans  $V$ . Sur  $V'$  on a:

$$F/V' = \lim_n R_n,$$

où  $(R_n)_n \subset R(V')$ , d'après le Lemme 2.5.5. On pose  $U' = V' \cap \mathbb{R}^2$  et  $V_1 = \bigcup_{x \in U'} Q_x$ , où  $Q_x \subset V'$ . Alors,  $V_1 \subset V'$  et l'on a:

$$F/V_1 = \lim_n R_n/V_1.$$

D'où

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_a \circ \psi^{-1}(\overline{(F, V)}) &= \tilde{\phi}_a \circ \psi^{-1}(\overline{(F/V_1, V_1)}) \\ &= \tilde{\phi}_a \circ \psi^{-1}(\overline{(\lim_n R_n/V_1, V_1)}) \\ &= \lim_n \tilde{\phi}_a \circ \psi^{-1}(\overline{(R_n/V_1, V_1)}) \\ &= \lim_n R_n(h, k) = \lim_n \theta_a, (\overline{(R_n/V_1, V_1)}) \\ &= \theta_a, (\overline{(F/V_1, V_1)}) = \theta_a, (\overline{(F, V)}) \end{aligned}$$

où  $a' = (h, k)$ .

Et par conséquent :

$$\tilde{\phi}_a \circ \psi^{-1} = \theta_{a'},$$

d'où  $\tilde{\phi}_a = \theta_{a'} \circ \psi = \phi_a$ .

REMARQUES 2.5.6. 1) Toute application vérifiant les propriétés (i) et (ii) du Théorème 2.5.5, vérifie  $\widehat{f(a)} = f \circ \hat{a}$ . Nous allons voir que si l'algèbre est semi-simple, cette condition devient suffisante pour l'unicité de  $\phi_a$ .

Soit  $\phi_a$  une autre application de  $A(U)$  dans  $A$  telle que  $\widehat{\phi_a(f)} = f \circ \hat{a}$ . Alors, pour tout  $X$  dans  $X(A)$ , on a :

$$X(\Phi(f)) = X(\phi_a(f)).$$

D'où  $\Phi_a(f) - \phi_a(f) \in \text{Rad } A$  pour toute  $f$  dans  $A(U)$ . Or  $A$  est semi-simple, donc  $\Phi_a = \phi_a$ .

2) On a vu (au Théorème 2.5.5) que l'application  $\phi_a$  de  $(A(U), \tau_0)$  dans  $(A, \|\cdot\|)$  est continue. Une autre topologie naturelle sur  $A(U)$  est la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $U$ . Si nous munissons  $A(U)$  de cette topologie et si l'algèbre est semi-simple, nous obtenons que l'application  $\phi_a$  est alors à graphe fermé. De plus, nous montrons qu'elle est continue si, et seulement si,  $A$  est une  $C^*$ -algèbre pour une norme équivalente.

### Références

- [1] ALLAN, G.R., Communication privée.
- [2] BONSAL, F.F., DUNCAN, J., Complete normed algebras, *Ergebnisse der Mathematik*, Band 80, Springer Verlag, 1973.
- [3] BOURBAKI, N., *Théories spectrales*, Paris, Hermann, 1976, Act. Sc. et Ind (1332).
- [4] DIXMIER, J., *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, 2<sup>e</sup> édition, 1969.

- [5] DIEUDONNÉ, J., *Eléments d'analyse 1, Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

M. Akkar  
Maison du Maroc  
1, boul. Jourdan  
75014 - Paris  
France

A. El Kinani et M. Oudadess  
Ecole normale supérieure de Takaddoum  
Avenue Oued Akreuch  
B.P. 5118, Rabat  
Maroc

Manuscrit reçu le 17 juillet 1987.  
Revisé le 1er décembre 1987.