

DIMENSIONS AUX BORDS D'UN OUVERT

Claude Tricot

Résumé

Les propriétés dimensionnelles d'un ensemble ouvert à bords fractals ont des conséquences fondamentales dans les applications aux sciences expérimentales. Nous dégageons les principales notions de dimension intérieure et extérieure d'un ouvert, et nous les comparons avec la dimension de sa frontière.

Abstract

The dimensional properties of an open set V with fractal boundary have fundamental consequences in Applied Sciences. We make precise the main notions of interior and exterior dimensions of V , and show their relationships with the dimension of its boundary.

Preliminaires

Inspirées par des problèmes pratiques, les considérations qui vont suivre ont des bases mathématiques précises qui appartiennent à la théorie de la mesure: autrement dit un développement des concepts classiques de la géométrie euclidienne et de la rectifiabilité, grâce à celui de mesure. On peut aussi les voir comme un raffinement de la topologie classique, grâce au fait que les "indices de raréfaction" utilisés sont des invariants par un certain groupe d'homéomorphismes, comprenant en particulier les difféomorphismes. Notons les principales notions de topologie mises en jeu:

Soit E dans un espace euclidien:

- $\bar{E}$, le complété de E , est l'ensemble des points limites de suites de points appartenant à E .

- $\text{Int } E$, l'intérieur de E , est l'ensemble (s'il existe) des points x de E qui sont centres d'une boule incluse dans E .

- ∂E , la frontière de E , est l'ensemble $\bar{E} - \text{Int } E$: points x de $\bar{E}$ tels que toute boule de centre x contient un point du complémentaire. Certains ensembles fermés sont d'intérieur vide, et donc identiques à leur frontière (l'ensemble de Cantor dans $\mathbb{R}$; un arc dans $\mathbb{R}^2$).

- Un ouvert V est un ensemble tel que $V = \text{Int } V$.

Un compact est un ensemble fermé et borné.

Soit $E \subset F$: E est partout dense dans F , si $\bar{E} = \bar{F}$. E est nulle part dense dans F si, pour tout ouvert V rencontrant F , il existe un ouvert U inclus dans V , tel que $U \cap E = \emptyset$.

PLAN:

§.1. Dimension de Minkowski-Bouligand

1.1. Définition

1.2. Variantes

1.3. Propriétés

§.2. Dimension relative à un ouvert

2.1. Définition

2.2. Variantes

2.3. Ouverts de type I

2.4. Ouverts de type II

2.5. Elimination du voisinage de la frontière

§.3. Relation entre la dimension intérieure et les empilements de V

3.1. Problème posé

3.2. Familles de Whitney

3.3. Conditions pour que $\rho(c_n) \leq \Delta_{\text{int}}(\partial V)$

3.4. Conditions pour que $\Delta_{\text{int}}(V) \leq \rho(c_n)$

3.5. Conditions pour que $\rho(c_n) = \Delta(E)$, lorsque l'ensemble résiduel est de mesure nulle.

§.4. Exemples

Références

1. Dimension de Minkowski-Bouligand

1.1. Définition

La notion de dimension la plus utilisée en pratique, parce que sa définition est simple et constructive, remonte à G. Bouligand [1] en 1928.

Elle est si fondamentale qu'on l'a redécouverte plusieurs fois, et qu'elle a profité d'un grand nombre d'identités successives (voir [2] pour un rapide historique). Dans un espace de dimension D , on considère tout d'abord un ensemble borné E , et l'ensemble "élargi" $E(\epsilon)$ de tous les points à distance de E inférieure ou égale à ϵ .

Introduit par Minkowski pour une approche de la notion de rectifiabilité, $E(\epsilon)$ est dénommé "saucisse de Minkowski" dans [3], par une analogie géométrique assez claire. Soit $|E(\epsilon)|_D$ son volume. Si E est un point, $|E(\epsilon)|_D$ est équivalent à ϵ^D lorsque ϵ tend vers 0. Si E est un segment, ou un arc de longueur finie, $|E(\epsilon)|_D$ est équivalent à ϵ^{D-1} , etc. D'où l'idée de déterminer la dimension de E comme l'indice critique du produit $\epsilon^{\alpha-D} |E(\epsilon)|_D$. La définition, non donnée avec précision par Bouligand d'ailleurs, est la suivante:

$$\Delta(E) = \inf\{\alpha: \epsilon^{\alpha-D} |E(\epsilon)|_D \rightarrow 0\} = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} D - \left(\frac{\log |E(\epsilon)|_D}{\log \epsilon} \right).$$

On voit que l'on pourrait aussi définir un indice $\delta(E)$, comme limite inférieure de la même expression. Il se trouve que δ ne possède pas toutes les propriétés de Δ (voir [4]), et que c'est plutôt Δ , et les indices qui lui sont directement apparentés, qui jouent un rôle en théorie de la mesure [5]. Dans la pratique ces notions sont rarement distinctes, et Δ est considéré comme une limite, entre des échelles bien précisées.

1.2. Variantes

Parmi les nombreuses expressions équivalentes de Δ , citons les suivantes:

a) On partage $\mathbb{R}^D$ en un réseau de cubes adjacents de côté 2^{-n} dits "dyadiques" et on compte le nombre $w(2^n, E)$ de ces cubes qui rencontrent E (ils sont choisis fermés, ou semi-ouverts, indifféremment). Alors:

$$\Delta(E) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \log w(2^n, E) / \log 2^n.$$

Toute suite (k_n) autre que (2^{-n}) convient d'ailleurs aussi bien, à condition que $\lim \log k_n / \log k_{n+1} = 1$ [6]. C'est peut-être cette formule qui a eu le plus de succès parmi les utilisateurs, à cause de la simplicité de l'algorithme mis en jeu.

b) Soit $M_\epsilon(E)$ le plus grand nombre de boules ouvertes, disjointes, de rayon ϵ , centrées en E :

$$\Delta(E) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \log M_\epsilon(E) / |\log \epsilon|.$$

c) Soit $N_\epsilon(E)$ le plus petit nombre de boules de rayon ϵ recouvrant E :

$$\Delta(E) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \log N_\epsilon(E) / |\log \epsilon|.$$

1.3. Propriétés

Voici les propriétés de base de Δ :

(i) Si E est un point: $\Delta(E) = 0$;

si E est un ouvert borné de $\mathbb{R}^D$: $\Delta(E) = D$.

(ii) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \Delta(E_1) \leq \Delta(E_2)$.

(iii) $\Delta(E_1 \cup E_2) = \max(\Delta(E_1), \Delta(E_2))$.

(iv) Si $h: \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^D$ est un difféomorphisme: $\Delta(h(E)) = \Delta(E)$ [4].

(v) $\Delta(E) = \Delta(\bar{E})$.

(vi) Si E est un ensemble à similitude interne, c'est-à-dire tel que

$E = \bigcup_{i=1}^N h_i(E)$, où h_i est une similitude de rapport $r_i < 1$, et les $h_i(E)$ sont portés par des ouverts disjoints: alors $\Delta(E)$ est racine de l'équation $\sum_{i=1}^N r_i^{\Delta(E)} = 1$.

On dit couramment qu'un ensemble E dont la dimension est non entière est une "fractale". Comme la plupart des modèles mathématiques, le modèle fractal est sujet au goût de l'expérimentateur. Très souvent et sans le dire, celui-ci considère comme fractal tout ensemble tel que les points de coordonnées $(\log n, \log w(n, E))$ s'alignent selon une droite de pente non nulle pour un certain nombre de valeurs de n . Cette pente est alors la "dimension". On appelle aussi fractal un ensemble qui présente des propriétés, plus ou moins strictes, de "similitude interne" ou "d'affinité interne" [7].

En fait dans ce papier nous spécifions simplement que nous étudions les ensembles E qui sont la frontière ∂V d'un ouvert borné V de $\mathbb{R}^D$. En particulier ils sont compacts, et nulle part denses.

2. Dimension relative à un ouvert

2.1. Définition

Etant donné donc la frontière ∂V d'un ouvert borné, de nombreux problèmes indiquent qu'il est intéressant de ne considérer, parmi les points de la "frontière élargie" $\partial V(\epsilon)$ qui sert à la définition de $\Delta(\partial V)$, que ceux qui sont intérieurs à V . On pose donc

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \inf\{\alpha: \epsilon^{\alpha-D} |\partial V(\epsilon) \cap V|_D \rightarrow 0\}$$

(voir [8], [9]). Dans [9], nous appelons $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$ un "indice d'échange" de V , à cause de son influence sur les processus dissipatifs à la frontière: il mesure, en quelque sorte, le degré de proximité des points de l'ouvert avec sa frontière. Mais il est aussi, pour obéir au goût du jour, décoré du nom de "dimension", et s'appelle alors "dimension interne" de ∂V . Plus mauvaise encore est l'appellation "dimension de capacité extérieure" du complémentaire de V .

2.2. Variantes

Les autres définitions qui vont suivre sont en parallèle avec celles de 1.2

et peuvent se révéler utiles pour le calcul:

a) Soit $w_{\text{int}}(2^n, \partial V)$ le nombre de cubes dyadiques de côté 2^{-n} qui sont à la fois inclus dans V et contigus (au moins un sommet en commun) à un cube dyadique rencontrant ∂V (voir la Figure 1). Alors

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \log w_{\text{int}}(2^n, \partial V) / \log 2^n.$$

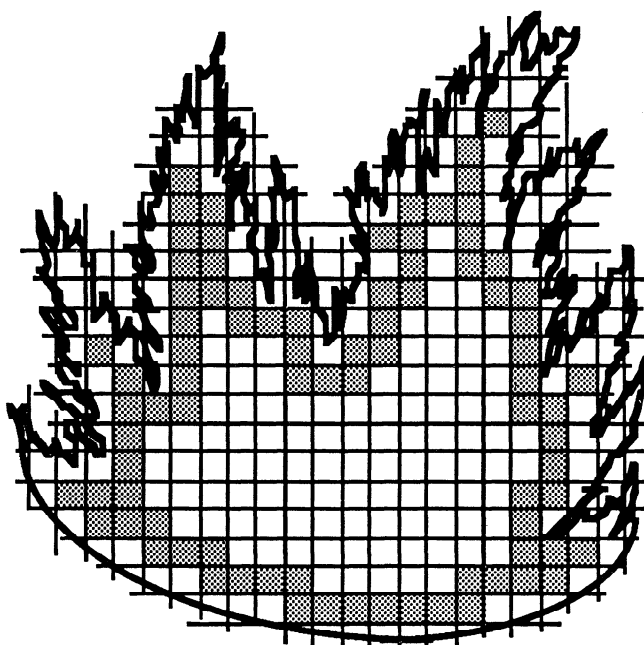


Figure 1

DÉMONSTRATION. Appelons Ω_n la réunion des cubes dyadiques en question. Pour un bon choix de la constante k_1 , Ω_n est inclus dans $\partial V(\varepsilon) \cap V$, lorsque $\varepsilon = k_1 2^{-n}$. Donc

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{int}}(\partial V) &\geq \inf\{\alpha: 2^{-n(\alpha-D)} |\Omega_n|_D \rightarrow 0\} \\ &= \inf\{\alpha: 2^{-n} w_{\text{int}}(2^n, \partial V) \rightarrow 0\} \\ &= \limsup \log w_{\text{int}}(2^n, \partial V) / \log 2^n. \end{aligned}$$

Inversement, on déduit, du fait que $V = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\Omega}_n$, l'inégalité

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{int}}(\partial V) &\leq \inf\{\alpha: 2^{-n(\alpha-D)} \left| \bigcup_{k=n}^{\infty} \Omega_k \right|_D \rightarrow 0\} \\ &\leq \inf\{\alpha: 2^{-n(\alpha-D)} \sum_{k=n}^{\infty} w_{\text{int}}(2^k, \partial V) 2^{-kD} \rightarrow 0\}.\end{aligned}$$

Si $\limsup \log w_{\text{int}}(2^n, \partial V) / \log 2^n < \beta < D$, on trouve

$$\sum_{k=n}^{\infty} w_{\text{int}}(2^k, \partial V) 2^{-kD} \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{k(\beta-D)}$$

à partir d'un certain rang: le membre de droite étant équivalent à $2^{n(\beta-D)}$, on en déduit $\Delta_{\text{int}}(\partial V) \leq \beta$.

b) Soit $m_\varepsilon(\partial V)$ le plus grand nombre de boules ouvertes disjointes de rayon ε incluses dans V et à distance nulle de ∂V . Alors

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \log m_\varepsilon(\partial V) / |\log \varepsilon|.$$

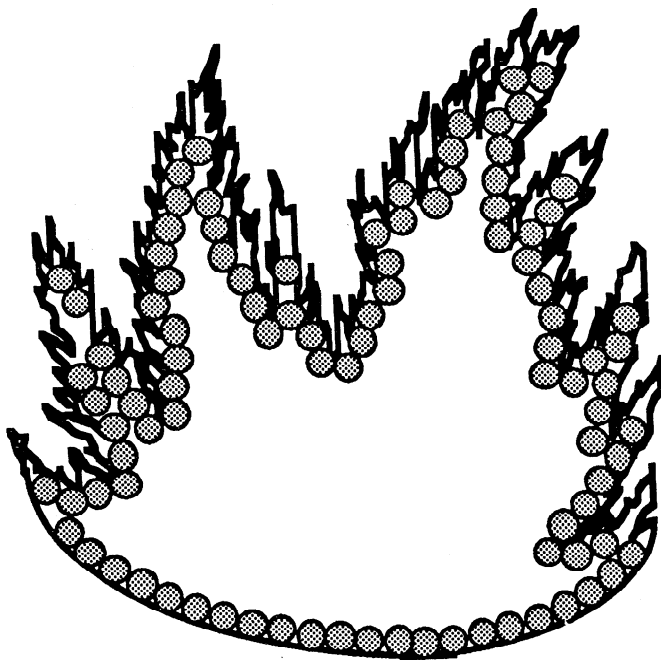


Figure 2

2.3. Ouverts de type I

Ici la clarté des notions envisagées nous paraît plus importante qu'une

complète généralité. Nous nous bornerons donc en fait à l'étude de deux cas typiques, que nous désignons par types I et II.

Le type I est celui où l'ouvert V est un "domaine", c'est-à-dire simplement connexe. Dans le plan, ∂V est alors une courbe fermée, simple. Ce modèle s'adapte évidemment à l'étude de toute courbe simple Γ , en réunissant ses extrémités par un arc rectifiable Γ' disjoint de Γ . L'ouvert V est l'intérieur de $\Gamma \cup \Gamma' = \partial V$. Pour calculer $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$, on considère donc le voisinage de Γ d'un seul côté de cette courbe. Mais ce peut être l'un ou l'autre côté selon la façon dont on trace Γ' . On observe le fait très important que l'indice $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$ peut différer selon le côté envisagé, ce qui traduit, dans ce cas, une forme de "dissymétrie fractale" de Γ .

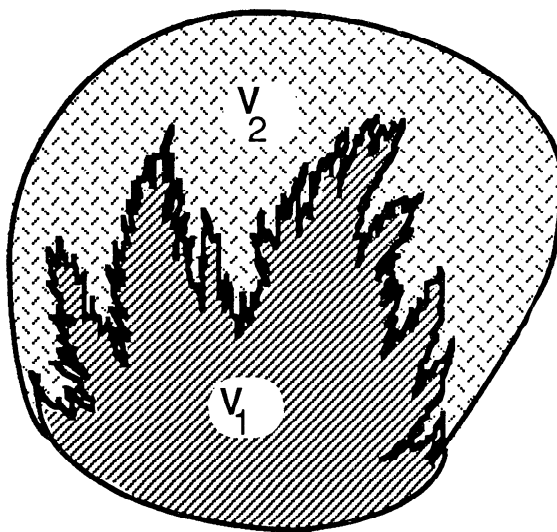


Figure 3

Si on appelle V_1 et V_2 deux ouverts de part et d'autre de Γ , comme l'indique la Figure 3, $\Delta_{\text{int}}(\partial V_1)$ n'est pas nécessairement égal à $\Delta_{\text{int}}(\partial V_2)$. Néanmoins l'égalité

$$|\Gamma(\epsilon) \cap V_1| + |\Gamma(\epsilon) \cap V_2| = |\Gamma(\epsilon)| + o(\epsilon^2),$$

assure que

$$\Delta(\Gamma) = \max(\Delta_{\text{int}}(\partial V_1), \Delta_{\text{int}}(\partial V_2)).$$

On peut d'ailleurs, si l'on veut, parler de "dimension externe" de V , en écrivant

$$\Delta_{\text{ext}}(\partial V) = \inf\{\alpha: \varepsilon^{\alpha-D} |\partial V(\varepsilon) - V| \rightarrow 0\},$$

ce qui donne $\Delta_{\text{ext}}(\partial V_1) = \Delta_{\text{int}}(\partial V_2)$ et réciproquement.

Nous verrons des exemples de calcul dans la section 4. Remarquons que pour un ouvert de type I dans le plan, on a toujours $1 \leq \Delta_{\text{int}}(\partial V) \leq 2$.

La même remarque s'applique pour un domaine de $\mathbb{R}^D$, où $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$ reste compris entre $D-1$ et D .

2.4. Ouverts de type II

Ici on suppose que $\bar{V}$, fermeture de V , est encore un domaine simplement connexe, mais la frontière $\partial \bar{V}$ est rectifiable, et l'ensemble résiduel $E = \partial V - \partial \bar{V}$ (ou, si l'on veut, sa fermeture) est non vide, et nulle part dense.

Beaucoup d'ouverts de ce type sont construits par une agrégation d'ouverts (C_n) simplement connexes et disjoints, de telle sorte que leur distance à E soit nulle: leur réunion forme V . Plus précisément, afin d'éviter des problèmes de frontière, on va définir V comme l'intérieur de l'ensemble $U\bar{C}_n$. Un exemple simple est celui du "packing apollonien" (Figure 4) où V est formé par récurrence en plaçant dans un triangle curviligne initial $\bar{V}$, des disques C_n disjoints, mais de taille maximale.

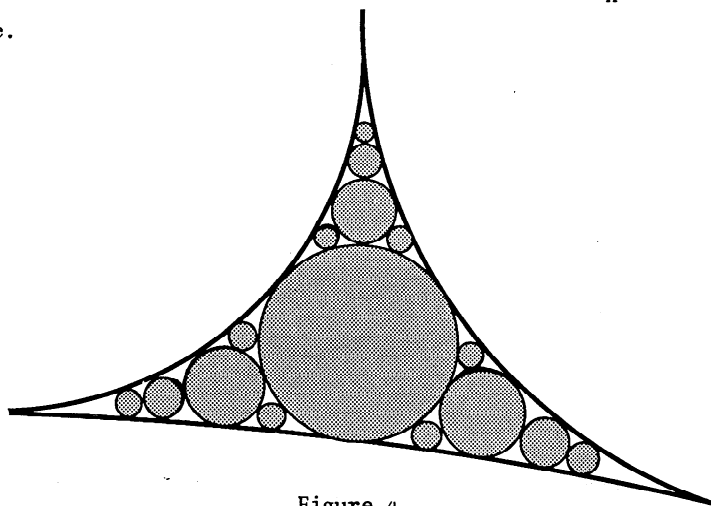


Figure 4

L'ensemble résiduel E , qui est la frontière de V dans $\bar{V}$, contient en tous cas toutes les circonférences des C_n , mais en fait beaucoup plus du point de vue dimensionnel (voir [10]; une bonne liste de références pour ce problème fameux se trouve en [3]). On comprend que des constructions de ce genre puissent servir de modèle aux surfaces poreuses. On peut aussi inversement, commencer par construire E , puis les C_n :

EXEMPLE 1. Etant donné une suite (a_n) telle que $a_0 = 1$ et $a_{n+1} < a_n/2$, on peut définir dans l'intervalle $(0,1)$ un ensemble de Cantor F de façon que pour tout n , F est recouvert par 2^n intervalles de longueur a_n , et les intervalles d'ordre $n+1$ sont inclus, deux par deux, dans les intervalles d'ordre n . On sait que $\Delta(F) = \limsup \log 2^n / |\log a_n|$. On considère alors $E = F \times F$, produit cartésien dans le plan muni d'un repère orthonormé. On a

$$\begin{aligned}\Delta(E) &= \limsup \log 4^n / |\log a_n \sqrt{2}| \\ &= 2\Delta(F).\end{aligned}$$

Le premier ouvert complémentaire C_1 est formé d'une croix dont les branches sont de taille $a_1 \times (1-2a_1)$, et généralement (C_n) est formé de la réunion de 4^{n-1} croix dont les branches sont de taille $a_n \times (a_{n-1} - 2a_n)$.

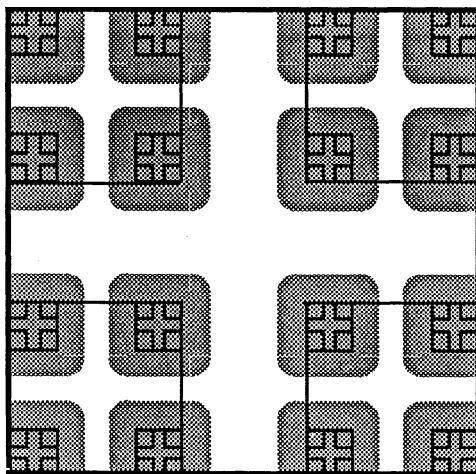


Figure 5

On a $\bar{V} = [0,1] \times [0,1]$, et ∂V est la réunion de E et du périmètre de $\bar{V}$. De ce fait $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$ est toujours au moins égal à 1. Mais on peut montrer aussi que, si $1 \leq \Delta(E) \leq 2$, et si $|E| = 0$ (c'est-à-dire si la suite $2^n a_n$ tend vers 0), alors $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \Delta(E)$. On en tire, dans ce cas:

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \max(1, \Delta(E)).$$

2.5. Elimination du voisinage de la frontière

L'exemple précédent nous induirait à éliminer l'influence du voisinage de $\partial \bar{V}$ dans le calcul de la dimension intérieure, afin d'obtenir un indice vraiment caractéristique de E et de V . On posera

$$\Delta_{\text{int}}^*(\partial V) = \inf\{\alpha: \epsilon^{\alpha-D} |(\partial V - \partial \bar{V})(\epsilon) \cap V| \rightarrow 0\}$$

où $\partial V - \partial \bar{V}$ (ou sa fermeture) est égal à E . C'est la surface $(\partial V - \partial \bar{V})(\epsilon) \cap V$ qui est indiquée en gris dans la Figure 5. Heureusement ceci n'entraîne aucune complication, c'est-à-dire aucune notion nouvelle: Comme $(\partial V - \partial \bar{V})(\epsilon) \subset \partial V(\epsilon) \subset \partial \bar{V}(\epsilon) \cup (\partial V - \partial \bar{V})(\epsilon)$, on trouve

$$|(\partial V - \partial \bar{V})(\epsilon) \cap V| \leq |\partial V(\epsilon) \cap V| \leq |\partial \bar{V}(\epsilon)| + |(\partial V - \partial \bar{V})(\epsilon) \cap V|,$$

et donc $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \max(D-1, \Delta_{\text{int}}^*(\partial V))$.

On en déduit que, si $\Delta_{\text{int}}^*(\partial V) \geq D-1$, alors $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \Delta_{\text{int}}^*(\partial V)$. Et dans tous les cas, on a le résultat suivant:

LEMME 1. Si $|E| = 0$, alors $\Delta_{\text{int}}^*(\partial V) = \Delta(E)$. Si $|E| > 0$, alors

$$\Delta_{\text{int}}^*(\partial V) = \Delta_{\text{int}}(\partial V).$$

DÉMONSTRATION. Dans le cas, un peu simplifié, où $\text{dist}(E, \partial \bar{V}) > 0$:

$$\text{Si } |E| = 0, \text{ et } \epsilon \text{ assez petit, } |E(\epsilon)| = |E(\epsilon) \cap V| + |E| = |E(\epsilon) \cap V|,$$

donc

$$\Delta(E) = \Delta_{\text{int}}^*(\partial V).$$

Si $|E| > 0$, alors $\Delta(E) = D$. D'autre part, soit $w_{\text{int}}^*(2^n, E)$ le nombre de

cubes dyadiques de côté 2^{-n} intérieurs à V et contigus à un cube dyadique rencontrant E : comme en 2.2, on démontre que

$$\Delta_{\text{int}}^*(\partial V) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \log w_{\text{int}}^*(2^n, E) / \log 2^n.$$

Appelons Ω_n la réunion des $w(2^n, E)$ cubes dyadiques rencontrant E . Le volume de Ω_n est $w(2^n, E)2^{-nD}$, et sa frontière a une aire de l'ordre de $w_{\text{int}}^*(2^n, E)2^{-n(D-1)}$. La relation

$$|U|_D^{1/D} \leq k_1 (\text{aire de } \partial U)^{1/(D-1)},$$

valable pour tout ouvert U , donne pour Ω_n

$$w(2^n, E)^{1/D} \leq k_2 w_{\text{int}}^*(2^n, E)^{1/(D-1)},$$

d'où

$$\Delta(E) \leq \frac{D}{D-1} \Delta_{\text{int}}^*(\partial V).$$

Ceci donne $\Delta_{\text{int}}^*(\partial V) \geq D-1$, d'où l'on conclut

$$\Delta_{\text{int}}^*(\partial V) = \Delta_{\text{int}}(\partial V),$$

par la remarque précédant le lemme.

Nous déduisons de ce lemme que, pour les surfaces poreuses telles que $|E| = 0$, $\Delta(E)$ est l'indice caractéristique à envisager; pour celles telles que $|E| > 0$, c'est $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$.

Nous avons vu des exemples du premier cas avec le packing apollonien et le produit cartésien $F \times F$ lorsque $2^n a_n \rightarrow 0$. Nous verrons un exemple du deuxième cas en 3.4. Une illustration assez parlante est la surface poreuse constituée par une coupe d'un morceau de gruyère percé d'une infinité dense de trous: le fromage ayant un poids non nul, l'aire de la surface résiduelle est non nulle. L'ouvert V est constitué de l'ensemble des trous. Nous allons voir que $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$ est régi par l'ordre de décroissance vers 0 de la suite de leurs diamètres.

3. Relations entre la dimension intérieure et les empilements de V

3.1. Description du problème

Appelons "empilement" (packing) de V une suite (C_n) d'ouverts disjoints denses dans V , c'est-à-dire $UC_n \subset V$ et $\overline{UC_n} = \overline{V}$. Si (c_n) est la suite, décroissante, de leurs diamètres, est-il possible de déduire de (c_n) , ou plutôt de son ordre de décroissance vers 0, une notion de dimension pour l'ensemble résiduel $E = \partial V - \partial \overline{V}$? Question que se sont posé E. Borel [11], puis A.S. Besicovitch et S.J. Taylor [12], pour les compacts nulle part denses sur la droite. En admettant donc que les C_n sont des intervalles ouverts, de longueur c_n , et que (c_n) décroît vers 0, on pose

$$\rho(c_n) = \inf\{\alpha: n^{1-\alpha} \left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^\alpha \rightarrow 0\}$$

ou bien

$$\rho(c_n) = \inf\{\alpha: \sum_{i=1}^{\infty} c_n^\alpha < +\infty\}$$

ou plus simplement

$$\rho(c_n) = \limsup \log n / (-\log c_n).$$

Ces formulations sont équivalentes [2]. Or, il se trouve que, si $|E| = 0$, on a

$$\rho(c_n) = \Delta(E) \quad [13].$$

Ce problème est justement celui des surfaces poreuses: ici l'ouvert V est la réunion des C_n , et $E = \partial V$ est la fermeture de l'ensemble de leurs extrémités. L'égalité précédente s'écrit aussi

$$\rho(c_n) = \Delta_{\text{int}}(\partial V).$$

Ce sont ces égalités qu'il est intéressant de généraliser à des dimensions d'espace supérieures. Comment transférer l'étude des "intervalles complémentaires" à $\mathbb{R}^D$, $D \geq 2$?

Dans tout ce qui suit, les C_n seront des domaines ouverts, disjoints, de diamètre c_n et (C_n) un empilement de V . Z.A. Melzak [10] a le premier posé la

notion générale de "constante de l'empilement" (packing constant) $\rho(c_n)$, et ses travaux ont été continués par J. Wilker [14]. Nous nous intéressons ici spécialement à la comparaison entre $\rho(c_n)$ et les dimensions connues de ∂V , spécialement $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$, à la suite des travaux [9] et [15]. En fait les deux questions que nous allons nous poser sont les suivantes:

- (i) Pour tout ouvert V borné, existe-t-il un empilement (C_n) de V tel que $\rho(c_n) = \Delta_{\text{int}}(\partial V)$?
- (ii) Quelles conditions doivent remplir les empilements (C_n) de V pour que $\rho(c_n) = \Delta_{\text{int}}(\partial V)$?

3.2. Familles de Whitney

Voici une réponse à la première question: partageons R^D en un réseau de cubes dyadiques de côté 2^{-n} , $n \in \mathbb{N}$. Appelons C_1 , de diamètre c_1 , le plus grand (ou l'un des plus grands) cube dyadique inclus dans V , tel que $\text{dist}(C_1, \partial V) \geq c_1$. Puis C_2 , de diamètre c_2 , le plus grand cube dyadique inclus dans $V - C_1$, tel que $\text{dist}(C_2, \partial V) \geq c_2$, puis C_3 dans $V - C_1 - C_2$, etc. (Voir d'autres applications de telles constructions dans [16].) On appelle (C_n) une "famille de Whitney". Elle est clairement dense dans V , c'est-à-dire $\overline{UC_n} = \bar{V}$. Pour démontrer que

$$\rho(c_n) = \Delta_{\text{int}}(\partial V)$$

on utilise le lemme suivant, qui servira également par la suite:

LEMME 2. Soit $\sigma > 0$, et (ε_n) une suite décroissante, tendant vers 0. Si $\sum \varepsilon_n^\sigma < +\infty$, alors $\rho(\varepsilon_n) = \inf\{\alpha: \varepsilon_n^{\alpha-\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^\sigma \rightarrow 0\}$. Si $\sum \varepsilon_n^\sigma = +\infty$, alors $\rho(\varepsilon_n) = \inf\{\alpha: \varepsilon_n^{\alpha-\sigma} \sum_{n=1}^n \varepsilon_n^\sigma \rightarrow 0\}$.

Voir [15] pour une démonstration, dans un cadre plus général.

Comme tous les C_n tels que $c_n \leq \varepsilon$ sont à distance $\leq 3\varepsilon$ de ∂V , on a

$$\sum_{c_n \leq \varepsilon} c_n^D \leq |\partial V(4\varepsilon) \cap V|.$$

Mais comme aucun point de $\partial V(\epsilon) \cap V$ n'appartient à un C_n de diamètre $c_n \geq \epsilon$:

$$|\partial V(\epsilon) \cap V| \leq \sum_{c_n \leq \epsilon} c_n^D.$$

De ces deux inégalités on tire:

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \inf\{\alpha: c_n^{\alpha-D} \sum_n c_1^D \rightarrow 0\}.$$

Le lemme précédent montre que le membre de droite vaut $\rho(c_n)$.

REMARQUE. Si l'on cherche, par un procédé du même genre, à construire une suite (C_n) telle que $\rho(c_n) = \Delta_{\text{int}}^*(\partial V)$, pour un ouvert V du type II, il est nécessaire de transformer la frontière $\partial \bar{V}$, c'est-à-dire de la remplacer par la frontière d'un cube dyadique. On prend plutôt comme domaine initial $\bar{W}$ le plus petit cube dyadique fermé tel que $V \subset \text{Int } \bar{W}$. Le nouvel ouvert W est défini par l'ensemble des points intérieurs à $\bar{W}$, à distance positive de $E = \partial V - \partial \bar{V}$. Ainsi E peut encore s'écrire $E = \partial W - \partial \bar{W}$. On construit alors (C_n) dans W , comme précédemment. En fait la frontière de $\bar{W}$ sera bordée par un nombre fini de C_n . L'idée sous-jacente est la suivante: l'ensemble de tous les points limites de sous-suites (C_{n_k}) dont le diamètre tend vers 0, doit être exactement égal à $\bar{E}$. Le fait de partir du cube W permet de dire qu'aucun point de $\partial \bar{W}$ n'est limite d'une telle suite. On peut, comme précédemment, construire la famille de Whitney recouvrant W : celle-ci sera telle que $\rho(c_n) = \Delta_{\text{int}}(\partial W)$, valeur égale à $\Delta_{\text{int}}^*(\partial W)$.

3.3. Conditions pour que $\rho(c_n) \leq \Delta_{\text{int}}(\partial V)$

PROPOSITION 1. Soit (C_n) un empilement de V , où les C_n sont des domaines simplement connexes, de diamètre c_n . Si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$(P1) \quad c_n^D = O(|C_n|_D)$$

$$(P2) \quad \text{dist}(C_n, \partial V) = O(c_n)$$

alors $\rho(c_n) \leq \Delta_{\text{int}}(\partial V)$.

Remarquons que la condition (P1) évite un allongement excessif des C_n : autrement dit le diamètre intérieur, ou diamètre de la plus grande sphère incluse dans C_n , doit être comparable à c_n .

Montrons que l'inégalité en question peut être fausse si (P1) ou (P2) ne sont pas vérifiées:

EXEMPLE 2. Soit $C_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\times]0,1[$ dans R^2 : comme $c_n > 1$, $\rho(c_n) = +\infty$ et (P1) n'est pas vérifiée. Ici $\bar{V} = \overline{UC_n} = [0,1] \times [0,1]$, et $\partial V = \partial \bar{V}$ est le périmètre du carré:

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) = 1.$$

EXEMPLE 3. Soit (C_n) la famille de tous les carrés

$$R_{ij} =]\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}[\times]\frac{j}{i(i+1)}, \frac{j+1}{i(i+1)}[,$$

pour $i \geq 1$ et $j = 0, \dots, i(i+1)-1$. On a de nouveau $V =]0,1[\times]0,1[$ et $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = 1$. La propriété (P1) est évidemment vérifiée pour les carrés mais (P2) ne l'est pas: en effet $\text{dist}(R_{i, i(i+1)/2}, \partial V) = \frac{1}{i+1}$ pour tout i , alors que

$$\text{diam}(R_{i, i(i+1)/2}) = O(i^{-2}).$$

Enfin $\sum c_n^\alpha \sim \sum i^{2(1-\alpha)}$ qui converge si $\alpha > \frac{3}{2}$: $\rho(c_n) = \frac{3}{2}$.

Nous donnerons un aperçu de la démonstration de cette proposition dans l'Exemple 5 décrit en 3.4. On peut la trouver complète dans [15].

3.4. Conditions pour que $\Delta_{\text{int}}(\partial V) \leq \max(D-1, \rho(c_n))$

PROPOSITION 2. Supposons que ∂C_n , variété de dimension $D-1$, ait une aire finie 1_n . Si de plus

$$(P3) \quad 1_n = O(c_n^{D-1}),$$

alors

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) \leq \max(D-1, \rho(c_n)).$$

Montrons qu'effectivement, si (P3) n'est pas vérifiée, l'inégalité peut être fausse:

EXEMPLE 4. La courbe Γ du "flocon de neige", bien connue, est formée d'un triangle équilatéral de côté 1 et de la juxtaposition de $3 \cdot 4^{n-1}$ triangles équilatéraux de côté 3^{-n} . V est l'ouvert intérieur à Γ , $\partial V = \Gamma$, et $\Delta(\Gamma) = \Delta_{\text{int}}(\partial V) = \log 4 / \log 3$. Si on prend pour C_n les triangles en question, $\sum c_n \sim \sum 4^n 3^{-n}$, donc $\rho(C_n) = \log 4 / \log 3$, et la Proposition 2 est vérifiée. Mais construisons un empilement de V moins régulier, de la façon suivante: On remarque d'abord que Γ est la limite d'une suite Γ_k de courbes polygonales incluses dans $\bar{V}$, formées de $3 \cdot 4^k$ segments de longueur 3^{-k} . Les domaines connexes délimités par $\Gamma_k \cup \Gamma_{k+1}$ sont les triangles précédents. Mais prenons une suite (n_k) strictement croissante, et appelons τ_k la famille de tous les domaines connexes bordés par $\Gamma_{n_k} \cup \Gamma_{n_{k+1}}$:

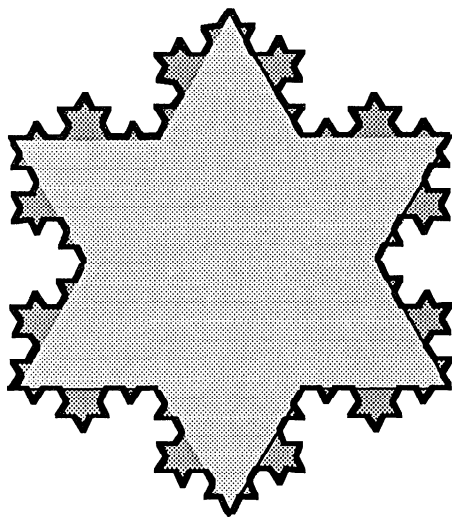


Figure 6

On peut vérifier qu'il y en a un nombre $a_k = 3(2^{n_{k+1} + n_k} - 2^{2n_k})$, de diamètre compris entre $3^{-n_{k+1}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}} 3^{-n_k - 1}$ (voir Figure 6, où $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, et τ_1 comporte 36 ouverts). Tout ouvert de τ_k a un diamètre supérieur à tout ouvert de τ_{k+1} . Si (n_k) croît très rapidement, par exemple si $n_k \sim \exp(\exp k)$, alors

$$\log \sum_{i=1}^k a_i \sim n_{k+1} \log 2,$$

et

$$\rho(c_n) = \lim (\log \sum_{i=1}^k a_i) / (\log 3^{n_{k+1}}) = \log 2 / \log 3.$$

On a donc $\Delta_{\text{int}}(\partial V) > \max(1, \rho(c_n))$. En effet (P3) n'est pas vérifiée: le plus grand périmètre d'ouvert dans τ_k vaut

$$3^{-n_k-1} + 2^{-2n_k-1} (4/3)^{n_{k+1}}, \text{ qui tend vers } +\infty.$$

Afin d'éviter des considérations un peu techniques, dont on trouvera le détail dans [15], donnons une justification des Propositions 1 et 2 sur un exemple simple de surface poreuse:

EXEMPLE 5. Soit $1 < \alpha < 2$, et (C_n) une famille de disques ouverts, disjoints, inclus dans un disque ouvert D , et tels que $\rho(c_n) = \alpha$. On peut toujours supposer que UC_n est dense dans D (sinon: construire par récurrence une suite (C'_n) de disques disjoints, et disjoints de UC_n , centrés sur les points à coordonnées rationnelles de $D - UC_n$, et de diamètre $c'_n < 2^{-n}$ arbitrairement petit, puis considérer la famille $\{C_n\} \cup \{C'_n\}$: comme $\rho(c'_n) = 0$, l'exposant de convergence de cette nouvelle suite est toujours α), donc (C_n) est un empilement de D . Ici $V = UC_n$, $\bar{V} = \bar{D}$. Le bord ∂V contient toutes les circonférences ∂C_n et ∂D , mais, dans le cas apollonien (Figure 4), ne se réduit pas à ces ensembles. Il est clair que les propriétés (P1), (P2), (P3) sont vérifiées, avec $D = 2$, et $\text{dist}(C_n, \partial V) = 0$. La Figure 7 représente en gris l'ensemble $\partial V(\epsilon) \cap V$.

a) Si $\epsilon = c_n$, $\partial V(\epsilon)$ contient tous les C_i de diamètres $c_i < 2\epsilon$, par (P2): donc

$$|\partial V(\epsilon) \cap V| > \sum_{c_i < 2\epsilon} |C_i|.$$

Le membre de droite est $\geq k_1 \sum_{c_i < 2\epsilon} c_i^2$, par (P1), pour une certaine constante k_1 .

Lorsque (c_n) est une suite décroissante on trouve

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) \geq \inf\{\alpha: c_n^{\alpha-2} \sum_n c_i^2 \rightarrow 0\},$$

et nous savons que cette dernière expression vaut $\rho(c_n)$ (Lemme 2).

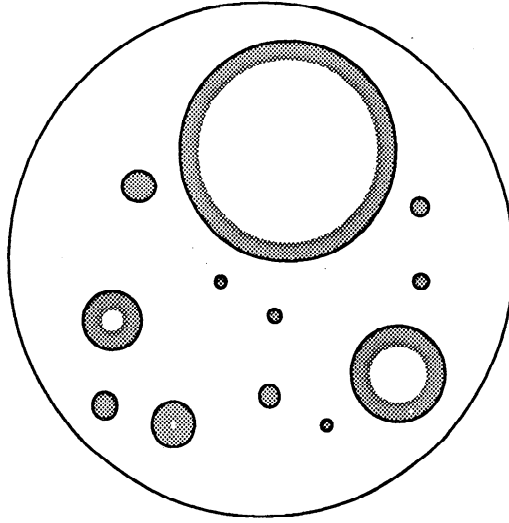


Figure 7

b) D'autre part $\partial V(\epsilon) \cap V$ est inclus dans la réunion des $\partial C_n(\epsilon) \cap C_n$, dont l'aire est équivalente à c_n^2 si $c_n \leq 2\epsilon$, et à ϵl_n ($\sim \epsilon c_n$ par (P3)) si $c_n \geq 2\epsilon$. Pour deux constantes k_2 et k_3 on trouve donc

$$|\partial V(\epsilon) \cap V| \leq k_2 \sum_{c_i \leq 2\epsilon} c_i^2 + k_3 \epsilon \sum_{c_i > 2\epsilon} c_i,$$

d'où l'on tire

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) \leq \max(\Delta_1, \Delta_2),$$

avec

$$\Delta_1 = \inf\{\alpha: c_n^{\alpha-2} \sum_n c_i^2 \rightarrow 0\}$$

$$\Delta_2 = \inf\{\alpha: c_n^{\alpha-1} \sum_1^n c_i \rightarrow 0\}.$$

D'après le Lemme 2, Δ_1 est toujours égal à $\rho(c_n)$, tandis que Δ_2 vaut 1 si $\sum c_n < +\infty$, et $\rho(c_n)$ si $\sum c_n = +\infty$. On en déduit que $\Delta_{\text{int}}(\partial V) \leq \max(1, \rho(c_n))$.

REMARQUE. Nous savons que $\Delta_{\text{int}}(\partial V) \geq D-1$. Les propriétés (P1), (P2), (P3) impliquent donc

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \max(D-1, \rho(c_n)).$$

Considérons maintenant le cas des surfaces poreuses (type II). Soit E la fermeture de $\partial V - \partial \bar{V}$. Si $|E| > 0$, $\Delta(E) = D$. Si $\rho(c_n)$ prend une quelconque valeur entre 0 et $D-1$, $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = D-1$. Par contre, si $|E| = 0$, les démonstrations précédentes, et le fait que $\Delta(E) = \Delta_{\text{int}}^*(\partial V)$ (Lemme 1) impliquent immédiatement

$$\rho(c_n) \leq \Delta(E) \leq \max(D-1, \rho(c_n)).$$

Si $\rho(c_n) \geq D-1$, on obtient $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \Delta(E) = \rho(c_n)$. Si $\rho(c_n) < D-1$, on obtient $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = D-1$, et finalement l'égalité $\Delta(E) = \rho(c_n)$, sous des conditions décrites en 3.5.

3.5. Conditions pour que $\rho(c_n) = \Delta(E)$, lorsque E est de mesure nulle

On a vu que (P1), (P2), (P3) entraînaient $\rho(c_n) = \Delta(E)$ lorsque $\rho(c_n) \geq D-1$. Dans le cas contraire, où $\rho(c_n) < D-1$, c'est-à-dire lorsque la suite (c_n) tend rapidement vers 0, et que, pour arriver à un ensemble résiduel de mesure nulle, les C_n sont obligés de se "coller" les uns contre les autres et de former des agrégats très serrés, la géométrie du problème devient assez complexe, et notre première condition impose $D = 2$. Il va de soi que dans bon nombre de cas (par exemple lorsque les C_n sont des cubes [17], ou plus particulièrement encore un pavage de Whitney: voir 3.2) cette condition n'est pas nécessaire. Cependant elle est fondamentale dans la démonstration du résultat suivant, que nous ne donnerons pas pour éviter des longueurs, mais que l'on trouve dans [15].

PROPOSITION 3. On suppose $D = 2$, $|E| = 0$, $\rho(c_n) < 1$. Les c_n sont rangées en ordre décroissant, et $U_n = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Si les C_n vérifient (P1), (P2), (P3) et

(P4) le nombre de composantes connexes de $\bar{V} - \bar{U}_n$ est $o(n)$,

alors $\Delta(E) = \rho(c_n)$.

REMARQUE. Ceci implique en particulier que si l'on construit une surface poreuse avec des disques disjoints comme dans l'Exemple 5, avec $\rho(c_n) < 1$, il est impossible d'obtenir un ensemble résiduel E de mesure nulle: en effet, un disque ne peut être tangent qu'à au plus six autres disques disjoints de taille non inférieure. Les $C_1, \dots, C_n$ étant placés, C_{n+1} ne crée donc pas plus de six nouvelles composantes connexes. Ainsi (P4) est vérifiée, et si $|E| = 0$, $\Delta(E) = \rho(c_n) < 1$. C'est impossible, puisque E contient les circonférences des C_n .

Une conjecture est que la même remarque est vraie pour tout $\rho(c_n) < 1.3$ (dimension du "packing apollonien") [15].

La propriété (P4) est également facilement vérifiée si les C_n sont des corps convexes vérifiant (P1) [15].

REMARQUE. Dans les hypothèses de la Proposition 3, E ne peut contenir aucun arc puisque $\Delta(E) < 1$. Pour tout n , $\partial C_n \cap E$ est donc soit vide, soit nulle part dense. Ainsi presque toute la frontière ∂C_n est commune avec d'autres ∂C_k . Ce phénomène d'agrégation des C_n se remarque bien dans l'Exemple 1 de 2.4: diminuer $\Delta(E)$ revient à augmenter relativement les parties de frontière communes entre les croix d'ordre n et celles d'ordre $n+1$.

Montrons maintenant qu'une condition telle que (P4) se révèle nécessaire:

EXEMPLE 6. On reprend un ensemble "parfait symétrique" E dans $[0,1]$, tel que décrit dans l'Exemple 1, défini comme $E = \bigcap E_n$ où E_n est la réunion de 2^n intervalles de longueur a_n disposés symétriquement selon la construction de Cantor. On définit $F_n = E_n \times [-a_n, a_n]$ dans le plan: chaque F_n est formé de 2^n rectangles $a_n \times 2a_n$ et $\bigcap F_n = E$. On se donne une suite croissante (n_k) , $n_0 = 1$, et on définit C_1 et C_2 comme les deux ouverts $]0,1[\times]0,1[- F_{n_1}$ et $]0,1[\times]-1,0[- F_{n_1}$ (voir Figure 8, où $n_1 = 3$); puis $C_3, \dots, C_K$, où $K = 2 + 2^{n_1+1}$, les domaines ouverts dont la réunion forme

$$]0,1[\times]0,a_{n_1}[- F_{n_2} \quad \text{et} \quad]0,1[\times]-a_{n_1},0[- F_{n_2},$$

et ainsi de suite.

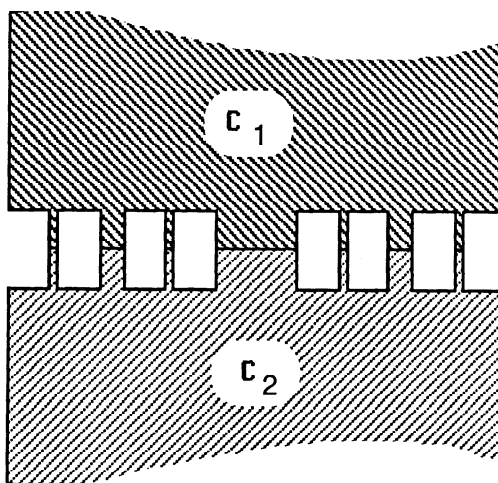


Figure 8

Si $V = UC_n$, alors $\bar{V} = [0,1] \times [-1,1]$ et l'ensemble de Cantor E est précisément la fermeture de $\partial V - \partial \bar{V}$. C'est un ensemble d'aire nulle. Comme $\text{dist}(C_n, E) = 0$ pour tout n , et que les périmètres restent dans le même ordre de grandeur que les diamètres, (P1), (P2) et (P3) sont vérifiées. Par contre (P3) ne le sera pas nécessairement si (n_k) croît très rapidement: En posant

$$m_k = \sum_{i=1}^k 2^{n_i+1},$$

le nombre de composantes connexes de $\bar{V} - \bigcup_{i=1}^{m_k} \bar{C}_i$ est du même ordre que $2^{n_{k+1}}$ (pour cela, prendre par exemple $n_k \sim \exp(\exp k)$). En même temps on peut choisir (a_n) de façon que

$$\limsup \log 2^n / (-\log a_n) = 1 \quad \text{et} \quad \log 2^{n_k} / (-\log a_{n_k}) \rightarrow 0.$$

Ainsi $\Delta(E) = 1$. Comme $\sum c_n^\alpha \sim \sum 2^{n_k} a_{n_k}^\alpha$, $\rho(c_n) = \limsup \log 2^{n_k} / (-\log a_{n_k}) = 0$.

Remarquons que dans cet exemple $\rho(c_n) = \delta(E)$. Ceci permet de penser que l'on pourrait améliorer la Proposition 3, en faisant usage de l'indice δ .

4. Exemples

Voici quelques exemples appartenant aux types I ou II, étudiés à la section 2. Nous avons vu l'exemple de la courbe Γ du flocon de neige (Exemple 4) où $\Delta(\Gamma) = \Delta_{\text{int}}(\partial V)$. Il donne lieu à une conjecture:

CONJECTURE. Si le domaine V est bordé par une courbe Γ possédant une structure de similitude interne, alors $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \Delta(\Gamma)$.

Les exemples suivants montrent comme l'égalité n'est pas toujours vraie; remarquons que ces exemples (7, 8, 9) représentent des ouverts V hérissés d'"aiguilles" de plus en plus fines à mesure que l'échelle de la construction diminue. Ceci permet la production d'une "dissymétrie fractale" entre l'extérieur et l'intérieur.

EXEMPLE 7. On se donne deux suites décroissantes (a_n) et (b_n) , tendant vers 0, telles que $a_{n+1} + b_{n+1} < a_n - b_n$, et on place dans $\mathbb{R}^2$ les points $A_n = (a_n + b_n, 0)$, $B_n = (a_n, a_n)$, $C_n = (a_n - b_n, 0)$. Soit Γ la courbe (c'est, si l'on veut, un graphe de fonction) composée de segments $A_n B_n$, $B_n C_n$, $C_n A_{n+1}$, d'extrémités A_1 et $(0,0)$. Soit Γ' un arc simple de mêmes extrémités, dans la partie d'ordonnées négatives du plan.

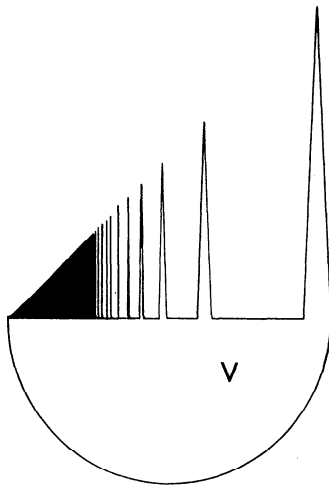


Figure 9

L'ouvert V est bordé par $\Gamma \cup \Gamma'$. Le tracé de Γ' est tel que les "pics" $A_n B_n C_n$ sont tournés vers l'extérieur. On rendra l'aire de ces pics négligeable en faisant tendre b_n rapidement vers 0: vu de l'intérieur, Γ ne sera pas alors très différent d'une courbe rectifiable. Soit par exemple $a_n \sim 1/\log n$, $b_n \sim 2^{-n}$: on obtient

$$\begin{aligned} |\partial V(\varepsilon) \cap V| &\sim k_1 \varepsilon + k_2 \sum_{b_n > 2\varepsilon} a_n \varepsilon + k_3 \sum_{b_n \leq 2\varepsilon} a_n b_n \\ &= o(\varepsilon), \end{aligned}$$

donc $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = 1$. D'autre part,

$$|\partial V(\varepsilon)| \geq k_4 \sum_{i=1}^N \varepsilon a_i,$$

où N est le plus grand entier tel que $\text{dist}(C_N, A_{N+1}) \leq \varepsilon$. En prenant $\varepsilon_n = \text{dist}(C_n, A_{n+1}) \sim a_n - a_{n+1} \sim n^{-1}(\log n)^{-2}$, on en tire

$$\begin{aligned} |\partial V(\varepsilon_n)| &\geq k_5 n^{-1} (\log n)^{-2} \sum_{i=1}^n (\log i)^{-1} \\ &\sim (\log n)^{-3} \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta(\partial V) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (2 - \log \partial V(\varepsilon_n) / \log \varepsilon_n) = 2.$$

C'est aussi, si l'on veut, la valeur de $\Delta_{\text{ext}}(\partial V)$.

EXEMPLE 8. Soit E un ensemble parfait symétrique dans $[0,1]$, tel que décrit déjà dans les Exemples 1 et 6, défini par la suite (a_n) , $a_0 = 1$, des intervalles de recouvrement. Le complémentaire de E dans $[0,1]$ est formé de 2^{n-1} segments de longueur $b_n = a_n - 2a_{n+1}$, pour tout $n \geq 1$. Au-dessus de chacun de ces intervalles, considérés comme alignés dans l'axe Ox du plan, on construit un pic de base b_n (comme dans l'exemple précédent), et de hauteur $c_n = a_n^\gamma$, où $0 < \gamma < 1$. La réunion de ces pics et de E forme un arc simple Γ d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$: on le complète par un arc Γ' pour former une courbe fermée $\Gamma \cup \Gamma' = \partial V$ (voir la Figure 10, où les 6 premières étapes de la construction de Γ sont représentées).

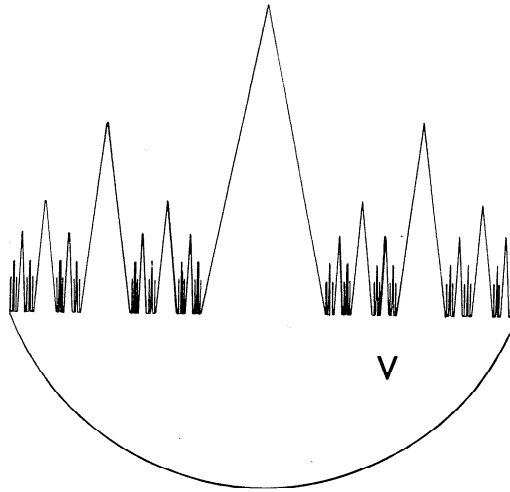


Figure 10

On donne à (b_n) une décroissance très rapide vers 0 pour assurer que $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = 1$: Par exemple $2^{n-1}b_n = 2^{-2^n}$, ce qui entraîne $2^n a_n \sim 2^{-2^n}$. On obtient

$$|\partial V(\varepsilon) \cap V| \sim k_1 \varepsilon + k_2 \varepsilon \sum_{b_n \geq 2\varepsilon} 2^{n-1} c_n + k_3 \sum_{b_n < 2\varepsilon} 2^{n-1} c_n b_n,$$

donc

$$\Delta_{\text{int}}(\partial V) = \max(1, \Delta_1, \Delta_2)$$

où

$$\Delta_1 = \limsup (1 - (\log \sum_{i=1}^n 2^i c_i) / \log b_n) = 1,$$

et

$$\Delta_2 = \limsup (2 - (\log \sum_n 2^i c_i b_i) / \log b_n) = 1 - \gamma,$$

donc $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = 1$.

D'autre part, comme $\partial V(a_n)$ contient le rectangle $[0,1] \times [0, c_n]$,

$$\begin{aligned} \Delta(\partial V) &\geq \limsup (2 - \log c_n / \log a_n) \\ &= 2 - \gamma. \end{aligned}$$

En fait, on pourrait voir que $\Delta(\partial V)$ est exactement égal à $2 - \gamma$.

EXEMPLE 9. La courbe Γ des deux exemples précédents est localement rectifiable. Dans celui-ci, nous présentons un graphe Γ qui est nulle part différentiable, et dont la construction est analogue à celle des ensembles "à affinité interne" [7], mais différente en ce sens que les échelles utilisées changent à chaque étape. On se donne une suite (a_n) d'entiers, et on définit les schémas S_n , T_n et T'_n comme dans la Figure 11 (où $a_n = 3$).

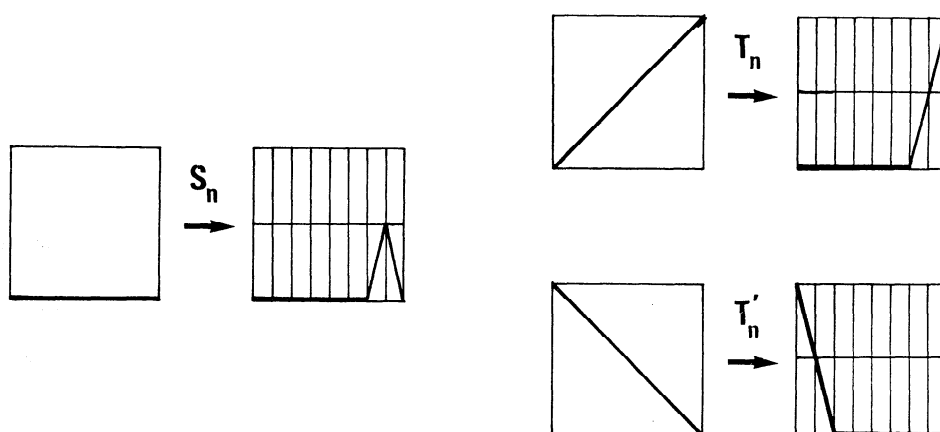


Figure 11

Partant d'une diagonale du carré unité on applique le schéma T_1 , puis on applique, à chaque rectangle $2^{-1} \times 2^{-a_1}$ traversé par une diagonale, le schéma T_2 et, à chaque rectangle traversé par un segment horizontal, le schéma S_2 et ainsi de suite: les deux premières étapes de la construction et l'ensemble final sont représentés sur la Figure 12, avec $a_1 = a_2 = 3$. Augmenter a_n permet de resserrer les pentes des courbes successives Γ_n .

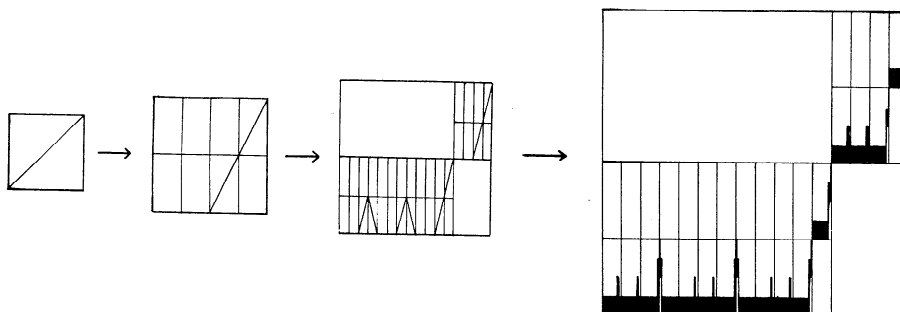


Figure 12

Soit $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$: les rectangles fondamentaux de l'étape n sont de taille $2^{-n} \times 2^{-A_n}$, et Γ_n se trouve composé de P_n segments diagonaux (de longueur $\sim 2^{-n}$) et de Q_n segments horizontaux (de longueur $\sim 2^{-A_n}$). Supposons que $a_n \rightarrow +\infty$. Les équations

$$P_n = 2 P_{n-1} + 2 Q_{n-1}$$

$$Q_n = (2^{a_n-2}) P_{n-1} + (2^{a_n-2}) Q_{n-1}$$

donnent $P_n \sim 2^{A_{n-1}}$, $Q_n \sim 2^{A_n}$. En comptant le nombre de rectangles fondamentaux de l'étape n qui recouvrent Γ , on en tire le nombre w_n de carrés de côté 2^{-A_n} qui recouvrent Γ : $w_n \sim 2^{2A_n - n}$, donc $\Delta(\Gamma) = \limsup (2 - \frac{n}{A_n}) = 2$.

D'autre part, on considère le voisinage de Γ formé de tous les points placés sous Γ , et à proximité de Γ : l'indice correspondant est $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$ si on complète Γ par un arc Γ' dans le demi-plan des ordonnées négatives pour en faire une courbe fermée. Cet indice se calcule aisément par un empilement de tous l'espace situé entre Ox et Γ , selon les méthodes décrites à la section 3: cet espace se recouvre par P_{n-1} rectangles de côtés $2^{-n} \times 2^{-A_n}$, donc par $P_{n-1} 2^{A_n-n}$ carrés de côtés 2^{-A_n} . La réunion de tous ces carrés, pour tout n , vérifie les propriétés (P1), (P2) et (P3).

Il suffit donc de trouver $\rho(c_n)$, exposant de convergence de la série:

$$\sum 2^{A_n + A_{n-2} - n} 2^{-\alpha A_n}.$$

Si on prend par exemple $a_n =$ partie entière de $2^{n/\gamma}$, $\gamma > 0$, alors $A_n = 2^{(n+1)/\gamma}$, et la série converge si $\alpha > 1 + 2^{-2/\gamma}$. On en tire $\Delta_{\text{int}}(\partial V) = 1 + 2^{-2/\gamma}$.

Quant aux ouverts de type II (surfaces poreuses), nous en avons déjà donné un certain nombre d'exemples (Figures 4, 5, 7). Rappelons le suivant, déjà abordé dans [8] et [9], à partir d'un modèle décrit dans [3], qui d'ailleurs comme tout modèle, peut soulever quelque critique [18]. Ceci ne doit pas nous empêcher de le considérer comme une excellente application, quitte à en transposer les idées dans un autre contexte si nécessaire.

EXEMPLE 10. Un modèle fractal du réseau sanguin dans le corps consiste en un arbre construit par récurrence, de telle façon que chaque branche de l'étape n , vue comme un tuyau, ou cylindre, de longueur l_n et diamètre δ_n , se divise à l'une de ses extrémités en deux branches de l'étape $n+1$. Cet arbre, c'est-à-dire l'ensemble de ces 2^n cylindres, $n \geq 1$, qui forment le réseau d'irrigation du corps, constitue l'ouvert V . L'hypothèse est que V est dense dans le corps, sans néanmoins en prendre toute la masse. Le corps est donc $\bar{V}$, et l'ensemble résiduel E des tissus possède un volume non nul. Ici donc $\Delta(\partial V) = \Delta(E)$ vaut 3 et n'a pas de signification spéciale. Par contre $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$ en a une: il décrit la relation de proximité qui existe entre V , composé des cellules du liquide sanguin, et sa frontière, milieu d'échange entre le sang et les tissus irrigués. Une cellule est considérée comme d'autant plus efficace pour les échanges qu'elle est proche de ∂V , comme dans un processus de diffusion. Une valeur élevée de $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$ (maximum 3, minimum 2) indique une haute efficacité de la construction du réseau, en vue d'un maximum d'échanges avec les tissus.

On peut calculer $\Delta_{\text{int}}(\partial V)$ facilement en empilant dans chaque cylindre d'ordre n un nombre l_n/δ_n de petits cylindres réguliers, et en calculant $\rho(c_n)$, valeur critique de la somme $\sum 2^n (l_n/\delta_n) \delta_n^\alpha$. Une hypothèse supplémentaire précise

qu'il existe deux constantes l et δ telles que $l_n = l^n$ et $\delta_n = \delta^n$, ce qui donne à $\rho(c_n) = \Delta_{\text{int}}(\partial V)$ la valeur $1 - \log 21 / \log \delta$. Des estimations numériques accordent finalement à cette expression la valeur 2.7.

Références

- [1] BOULIGAND, G., *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, Bull. sc. math. II 52(1928), 320-376.
- [2] TRICOT, C., *Douze définitions de la densité logarithmique*, C.R. Acad. Sc. Paris 293(1981), 549-552.
- [3] MANDELBROT, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982.
- [4] TRICOT, C., *Sur la classification des ensembles boréliens de mesure de Lebesgue nulle*, Thèse de doctorat, Genève, 1979.
- [5] TRICOT, C., *Two definitions of fractional dimension*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91(1982), 57-74.
- [6] TRICOT, C. (Senior), *Sur la notion de densité*, Cahiers du Dép. d'économétrie, Univ. de Genève, 1973.
- [7] MANDELBROT, B.B., *Self-affine fractal sets*, A paraître dans *Fractals in Physics*, Trieste, 1985.
- [8] GREBOGI, C., McDONALD, S., OTT, E., YORKE, J.A., *Exterior dimension of fat fractals*, Phys. Lett. 110 A(1985), 1-4.
- [9] TRICOT, C., *The geometry of the complement of a fractal set*, Phys. Lett. 114 A (1986), 430-434.
- [10] MELZAK, Z.A., *Infinite packings of disks*, Canad. J. Math. 18(1966), 838-852.
- [11] BOREL, E., *Sur l'addition vectorielle des ensembles de mesure nulle*, C.R. Acad. Sc. Paris 227(1948), 103-105.

- [12] BESICOVITCH, A.B. and TAYLOR, S.J., *On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure*, J. Lond. Math. Soc. 29(1954), 449-459.
- [13] HAWKES, J., *Hausdorff measure, entropy, and the independance of small sets*, Proc. Lond. Math. Soc. 28(1974), 700-724.
- [14] WILKER, J., *Almost Perfect Packings*, Ph.D. Thesis, Toronto, 1968.
- [15] TRICOT, C., *Porous surfaces*, Preprint.
- [16] STEIN, E.M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, 1970.
- [17] TRICOT, C., *Etude dimensionnelle d'un compact, par le pavage du complémentaire*, dans Thèse de doctorat d'état, Paris XI, 1983.
- [18] McDONALD, N., *Fat fractals in the lung? A comment on a paper by Grebogi et al.*, Phys. Lett. 112 A(1985), 417-419.

Département de mathématiques
et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. "A"
Montréal, Québec
Canada H3C 3P8

Manuscrit reçu le 20 juin 1986.