

FAMILLE D'EXPOSANTS POUR LES PROPRIÉTÉS ÉLECTRIQUES DES FRACTALS

André-Marie Séguin Tremblay
Bertrand Fourcade et Pierre Breton

Sommaire

On rappelle l'intérêt des fractals pour l'étude de la physique des systèmes désordonnés, en insistant plus particulièrement sur les systèmes décrits par le modèle dit de la percolation. L'étude des propriétés électriques de ces systèmes mène à l'introduction de toute une famille d'exposants dont la dimension fractale fait partie. Des familles semblables sont apparues indépendamment dans plusieurs contextes en physique et semblent caractéristiques des mesures fractales. Le cas des propriétés électriques discutées ici est particulièrement simple et offre aussi l'intérêt de prédire des exposants qui sont accessibles expérimentalement.

Abstract

The relevance of fractals for the Physics of disordered systems is recalled, with an emphasis on systems described by the percolation model. The study of electrical properties of these systems leads to the introduction of a family of exponents which includes in particular the fractal dimension. Similar families have appeared independently in various fields of Physics and seem characteristic of fractal measures. The case of electrical properties discussed here is particularly simple. The exponents have the added interest of being experimentally accessible.

1. Introduction

L'intérêt des physiciens pour les fractals se situe à un niveau en général assez différent de celui qui préoccupe les mathématiciens. Par exemple, le fait que certaines courbes fractales soient des exemples de courbes continues mais différentiables nulle part ne semble pas jouer un rôle très important en physique. C'est bien sûr le livre de B. Mandelbrot [1] qui a fait remarquer l'intérêt des fractals pour les sciences naturelles en général et pour la physique en particulier. Dans ce bref résumé de la conférence présentée à l'atelier sur la Géométrie fractale, nous essaierons tout d'abord de rappeler le rôle que jouent les fractals pour la matière condensée en général et pour les systèmes désordonnés en particulier. Nous résumons ensuite certains des résultats obtenus par notre groupe pour les propriétés électriques des fractals, puis nous concluerons en faisant remarquer qu'un des résultats théoriques principaux de cette étude, soit l'existence de toute une famille d'exposants, est aussi apparu indépendamment dans plusieurs domaines de la physique. Les études mathématiques dans ce domaine semblent moins nombreuses mais devraient être stimulées par leur importance en physique.

Seulement quelques références à des ouvrages de synthèse plus complets ou à des articles essentiels seront données. La motivation de la présente discussion est pédagogique et ne prétend pas établir des priorités. Nous nous excusons d'avance auprès des auteurs non cités.

2. Fractals en matière condensée

A- Remarques générales

La physique de la matière condensée s'intéresse aux propriétés des ensembles d'atomes formant les solides et les liquides qui nous sont familiers de même qu'aux propriétés d'autres types d'états de la matière qui sont un peu plus ésotériques mais qui peuvent quand même être reproduits en laboratoire. Notre compréhension de la physique de ces systèmes à plusieurs particules repose principalement sur l'utilisation de l'invariance sous translation: en physique de l'état cristallin par

exemple, la périodicité dans l'espace est fondamentale; même pour les liquides, on fait constamment appel à l'invariance sous translation des fonctions de corrélation. Les systèmes solides mais désordonnés se sont par contre montrés beaucoup plus difficiles à comprendre, en particulier parce qu'on y perd l'invariance sous translation. Néanmoins, ces systèmes sont abondants et possèdent des propriétés physiques qui peuvent être qualitativement différentes de celles des systèmes ordonnés correspondants. Par exemple, les électrons dans un solide désordonné peuvent être localisés, menant à une grande résistance électrique (c'est le problème dit de la localisation d'Anderson). L'utilisation de l'invariance sous translation dans ces systèmes, même de façon approximative, peut conduire à des résultats qualitativement faux (par exemple, l'absence de localisation d'Anderson).

Néanmoins, il existe une catégorie de systèmes désordonnés possédant une symétrie approximative, soit l'invariance sous dilatation. Beaucoup d'efforts ont été dirigés vers cette catégorie de systèmes ces dernières années car qui dit symétrie, même approximative, dit souvent problème soluble. Plus spécifiquement, il y a un outil analytique puissant basé sur la symétrie de dilatation, soit le groupe de renormalisation [2], de même qu'une réalisation géométrique de cette symétrie, soit les fractals [1]. Ce sont les problèmes possédant ce type d'auto-similarité, ou de symétrie sous dilatation, qui sont le sujet de cet exposé.

Lorsqu'on parle de symétrie sous dilatation pour les systèmes désordonnés, on fait référence au fait que les propriétés de ces systèmes, moyennées sur le désordre, sont décrites par des lois d'échelle, c'est-à-dire que les propriétés physiques telles la masse, la conductivité, dépendent de la taille du système de façon algébrique: par exemple, si ξ est la taille du système, la masse sera ξ^D et la conductivité sera $\xi^{-\beta_L}$, où D la dimension fractale, et $-\beta_L$ sont en général des nombres réels non entiers. Lorsqu'un système a ces propriétés d'échelle (ou de "scaling"), on dit qu'il est invariant sous dilatation, ou fractal. Le terme self-affine ([1], [3]), bien que plus exact, est rarement employé.

Les exemples de systèmes invariants sous dilatation abondent. Par exemple, les polymères [4], la trajectoire des marches aléatoires [1], les agrégats limités par diffusion [5] (la suie!), les motifs des claquages diélectriques, les nuages [6]... Le cas qui nous intéressera particulièrement dans cet exposé est celui des amas de percolation.

B- La percolation

Le problème de la percolation est étudié depuis environ une quarantaine d'années, mais l'introduction du nom percolation et les débuts des recherches systématiques sur le sujet datent probablement d'un article de 1957 par Broadbent et Hammersley [7]. En pratique on peut faire des amas de percolation en évaporant une faible concentration de métal sur un isolant ([8], [9]), ou en mélangeant des billes d'isolant et de métal, pour ne prendre que deux exemples simples. L'Alcan fabrique aussi des frittés, qui sont des espèces d'éponges métalliques ayant une structure semblable à celle des amas de percolation. Indépendamment de ces réalisations physiques, le modèle suivant décrit bien ce qu'est le problème de la percolation. (Pour une introduction, cf. [10] et [11].)

Considérons un réseau hypercubique, ou un repère cartésien de points (sites) numérotés par les entiers. Entre chaque paire de sites, on pose un lien avec une probabilité p , ou on laisse les sites disjoints avec une probabilité $1-p$. Pour un réseau infini, il semble intuitivement plausible que lorsque la probabilité p est suffisamment grande, on puisse toujours trouver un chemin de liens connectés traversant le réseau d'un bout à l'autre. Si p est suffisamment petit, il n'existera pas de tel chemin. Il existe donc une valeur "critique" de p , appelée p_c , pour laquelle un chemin connecté apparaît. Quelle est cette valeur critique de p ? Comment les propriétés physiques dépendent-elles de p ? Formulé de cette façon, ce problème (ou des variantes évidentes) est facile à comprendre et applicable à toutes sortes de problèmes n'ayant rien à voir avec la physique [11], tels les problèmes de propagation de maladies infectieuses. Citant Stauffer [10], c'est un des rares problèmes de physique théorique contemporaine non complètement résolu dont la

formulation puisse être comprise sans plusieurs années de cours préalables! C'est aussi un problème dont les aspects purement mathématiques sont d'intérêt! [12].

Pour voir où se trouve l'invariance sous dilatation dans ce problème, il faut d'abord décrire un peu sa phénoménologie. Soit $P_{\infty}(p)$ la probabilité qu'un lien occupé appartienne à l'amas infini. Près du seuil de percolation on observe que $P_{\infty}(p) \approx (p-p_c)^{\beta}$. De même, la conductivité σ près de ce seuil obéit à $\sigma \approx (p-p_c)^t$. Pour voir que ces comportements reflètent des propriétés d'échelle au sens décrit plus haut, il suffit de remarquer que la longueur de corrélation, ou plus simplement la taille moyenne ξ des amas connectés, obéit près du point critique à la relation $\xi \approx |p-p_c|^{-\nu}$. La signification intuitive de cette longueur est que pour des échelles de longueur plus petites que ξ , la structure des amas de percolation est statistiquement self-similaire (fractale), alors que pour des échelles plus grandes que cette longueur, la structure est statistiquement euclidienne. Une autre façon de présenter ce résultat [13], d'ailleurs expérimentalement vérifiable [8], est la suivante: par définition de la dimension fractale, nous savons que P_{∞} pour une structure self-similaire de taille ξ est égale à ξ^D ; par contre, un système de taille $L \gg \xi$, contiendra en moyenne $(L/\xi)^d$ amas de taille ξ , où d est la dimension euclidienne du réseau hypercubique; on en conclut donc que P_{∞} pour un système de taille L est proportionnel à $\xi^D (L/\xi)^d$, ou encore, exprimant le tout en fonction de $p-p_c$,

$$P_{\infty} \approx (p-p_c)^{\nu(d-D)}$$

ce qui veut dire [14], utilisant nos définitions précédentes, que $D = d-\beta/\nu$. Les exposants β et ν , connus depuis longtemps dans la littérature de la percolation, sont donc simplement reliés à la dimension fractale, une quantité pour laquelle nous avons une image géométrique claire.

Ce problème de la percolation a été formulé bien avant l'introduction des fractals en sciences naturelles. Les solutions qui y ont été apportées ont fait appel à l'ordinateur et aussi à des concepts et à des outils empruntés à l'étude des transitions de phase. C'est le groupe de renormalisation [2] qui a d'abord révolu-

tionné ce domaine. C'est grâce à cette méthode que l'importance de la longueur de corrélation est apparue. C'est aussi cette approche qui a permis de saisir un peu mieux la notion d'universalité, d'abord introduite phénoménologiquement en transition de phase. L'universalité fait référence au fait que les exposants décrivant le comportement d'échelle des propriétés physiques près du point critique sont indépendants de beaucoup de détails du modèle: par exemple, le fait qu'on ait choisi de travailler sur un réseau carré plutôt que triangulaire, ou qu'on ait discuté la percolation de liens plutôt que celle des sites, n'influence pas la valeur des exposants. D'autres quantités par contre, telle la valeur de p_c , sont non universelles, i.e. dépendent de plusieurs détails du modèle choisi.

Ce que les fractals ont apporté de leur côté, c'est une image simple, une intuition géométrique pour ce genre de physique. Une des contributions majeures de Mandelbrot [1] à ce domaine a sans doute été de remarquer que les figures exactement self-similaires étudiées par les mathématiciens (tamis de Sierpiński, courbe de Von Koch, etc.) partagent plusieurs propriétés qualitatives mais essentielles avec les systèmes statistiquement self-similaires retrouvés dans plusieurs domaines des sciences naturelles: premièrement, toutes les propriétés physiques de ces deux genres de systèmes obéissent à des lois d'échelle, et deuxièmement, les relations entre les exposants qui s'appliquent pour les figures exactement self-similaires, s'appliquent aussi en général pour les systèmes statistiquement self-similaires. En fait, ces deux types de systèmes, exactement ou statistiquement self-similaires, qu'on aurait pu croire a priori très différents, s'appellent aujourd'hui fractals.

Pour être un peu plus spécifique, considérons le tamis de Sierpiński de la Figure 1. On sait que pour la percolation, la taille ξ des amas de percolation croît lorsqu'on se rapproche de p_c . On peut se faire une image géométrique de ceci en imaginant que la Fig. 1b représente un amas de percolation typique lorsque ξ est deux fois plus grand qu'à la Fig. 1a. Remarquons que, contrairement à la construction fréquemment utilisée en mathématique, la distance élémentaire entre deux vertex de la figure reste fixe alors que la taille globale augmente. Ceci correspond bien au fait que le pas du réseau pour un amas de percolation est fixe.

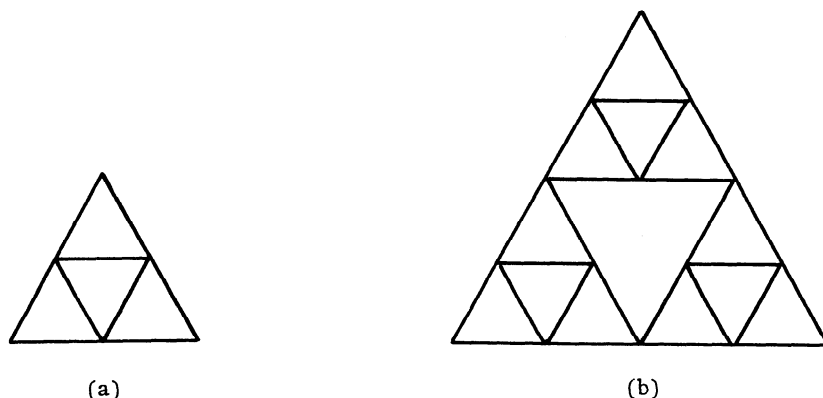


Figure 1:

Tamis de Sierpiński pour deux valeurs différentes de la taille ξ .

La limite du "scaling" ici est donc la limite $\xi \rightarrow \infty$. Il y a d'autres cas où la construction de subdivision habituelle est utile, mais ce n'est pas le cas pour la percolation.

Bien que la valeur numérique des exposants pour le tamis de Sierpiński soit près des valeurs numériques pour la percolation [15], il y a d'autres constructions ayant des valeurs encore plus rapprochées [16]. De toute façon, ce n'est pas l'intérêt principal de ce type de figures. Elles nous amènent plutôt à poser des questions qualitatives du genre suivant. Nous savons que la résistance d'un morceau de matériel homogène de taille L dépend de la taille comme L^{2-d} . Est-ce que pour un fractal cette relation est remplacée par ξ^{2-D} ? La réponse à cette question n'apparaît pas évidente pour un amas de percolation, mais on peut évidemment y répondre facilement pour le tamis de Sierpiński et pour d'autres structures fractales simples. La réponse apparaît alors très clairement: La résistance d'un fractal dépend de la taille ξ , dans la limite du "scaling", comme $\xi^{-\beta_L}$ où l'exposant $-\beta_L$ n'a rien à voir avec $2-D$. Il est vérifié que ce résultat qualitatif est valable pour les amas de percolation.

Comme autre exemple, on peut supposer qu'on place sur le fractal une particule effectuant une marche aléatoire, c'est-à-dire une particule qui, à chaque

vertex, choisit une direction de façon équiprobable parmi celles qui sont disponibles. Quelle est la probabilité de revenir à l'origine après N pas (en supposant que la particule ne se déplace pas assez longtemps pour atteindre les bords)? Cette probabilité est proportionnelle à $N^{\tilde{d}/2}$, où $\tilde{d}$ est relié aux exposants définis précédemment de la façon suivante [17]:

$$(1) \quad \tilde{d} = \frac{2D}{-\beta_L + D}.$$

Cette relation peut être vérifiée en général aisément sur des fractals tels le tamis de Sierpiński, mais elle s'applique aussi pour les amas de percolation et pour les structures statistiquement self-similaires en général. Ceci illustre ce que nous mentionnions plus haut sur le fait qu'une relation entre exposants qui s'applique sur les fractals "exacts" s'applique aussi en général sur les fractals "statistiques".

Les exemples précédents montrent la place qu'occupent les fractals exacts dans l'étude du désordre. Plusieurs exposants ont aussi été définis. On les dénote souvent par un symbole ressemblant à la lettre d simplement parce que dans la limite d'un système homogène, ces exposants deviennent égaux à la dimension euclidienne. En général, ils ne représentent pas une dimension. Pour résumer, nous avons parlé de la dimension euclidienne d , de la dimension fractale D , et de la dimension spectrale $\tilde{d}$ (égale à deux fois la co-dimension de récurrence [18]). On peut aussi parler de la dimension d'étalement [19] $\hat{d}$, définie de façon analogue à la dimension fractale, à l'exception que la distance n'est pas mesurée dans l'espace euclidien où le fractal est inséré, mais plutôt en unités du nombre de "liens" minimum qu'il faut franchir sur le fractal lui-même pour aller d'un point à l'autre. C'est la dimension qui est pertinente pour discuter des feux de forêts [20]! Ces dimensions obéissent aux inégalités [21]: $\tilde{d} \leq \hat{d} \leq D \leq d$. Dans le cas euclidien, toutes ces inégalités deviennent des égalités; un cas bien banal quoi! Tous ces exposants sont connus avec deux ou trois chiffres significatifs dans le cas de la percolation. Dans ce qui suit, nous verrons qu'il y a d'autres exposants importants, en fait une infinité d'exposants.

3. Propriétés électriques des fractals et des amas de percolation

Nous avons déjà parlé de la résistance des amas de percolation. Une autre propriété intéressante physiquement est le bruit électrique. La mesure utilisée pour caractériser le bruit est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation des fluctuations de tension, aussi connue sous le nom de spectre de puissance. Si $\delta V(t)$ est une fluctuation de tension au temps t autour de la valeur moyenne, alors ce spectre, $S_V(\omega)$, est donné par:

$$(2) \quad S_V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \delta V(0) \delta V(t) \rangle,$$

où les crochets représentent une moyenne d'ensemble ou une moyenne temporelle.

Il y a plusieurs types de bruit électrique. Tout d'abord, il y a le bruit thermique qu'on mesure avec un voltmètre aux bornes d'une résistance laissée en équilibre avec son environnement. On sait depuis longtemps que ce bruit est simplement relié à la résistance: c'est le contenu du théorème de fluctuation-dissipation [22]. Ce qui nous intéresse ici, c'est un autre type de bruit, soit celui qu'on mesure, par exemple, dans les fluctuations de tension lorsqu'une résistance est polarisée par un courant constant [23]. Le spectre pour ce type de fluctuations est souvent en $1/\omega^\gamma$, où γ est près de 1. L'origine physique de ce type de bruit est souvent mystérieuse. On cherche souvent des mécanismes pouvant prédire la loi de puissance ω^{-1} . La diffusion a déjà été proposée [24]. Comme la diffusion (marche aléatoire) sur un fractal est anormale, il est d'intérêt d'étudier ce problème [25]. Les exposants définis dans la section précédente surgissent alors naturellement dans le résultat des calculs. Nous ne nous attarderons pas sur cet aspect.

Le problème suivant est d'intérêt plus général pour le domaine des fractals: Comment la grandeur du bruit en $1/\omega$ se comporte-t-elle près du seuil de percolation, ou, en d'autres mots, quelle est la loi d'échelle décrivant la dépendance en taille de la grandeur du bruit en $1/\omega$ sur des amas de percolation dans le régime fractal? Ce problème définit-il un nouvel exposant ([26], [27])?

Pour étudier cette question, on peut utiliser le modèle suivant: Prenons un réseau de résistances aléatoires, i.e. un modèle de percolation de lien tel que défini plus haut. Supposons que chacune des résistances présentes avec une probabilité p , fluctue dans le temps autour d'une valeur moyenne r , indépendamment des fluctuations des autres résistances. En d'autres termes, si α et β sont des résistances présentes,

$$(3a) \quad r_{\alpha} = r + \delta r_{\alpha}$$

$$(3b) \quad \langle \delta r_{\alpha} \rangle = 0$$

$$(3c) \quad \langle \delta r_{\alpha} \delta r_{\beta} \rangle = \rho^2(\omega) \delta_{\alpha, \beta}$$

où le dernier δ est celui de Kronecker, et où nous avons supposé que c'est la transformée de Fourier des fluctuations de résistance dans le temps qui nous intéresse. Un tel modèle est conforme à la phénoménologie [23] des fluctuations en $1/\omega$, i.e. ce sont des modulations lentes des paramètres du système qui causent le bruit, et ces modulations ont une longueur de cohérence très courte.

Dans ce qui suit, nous considérerons la dépendance en fréquence comme donnée. Le problème qui nous intéresse est celui de calculer la dépendance en taille de la grandeur des fluctuations de résistance totale δR , étant donné le modèle des équations (3). On sait déjà qu'on peut calculer la résistance totale à l'aide de

$$(4) \quad RI^2 = \sum_{\alpha} r_{\alpha} i_{\alpha}^2 = r \sum_{\alpha} i_{\alpha}^2$$

où I est le courant total à l'entrée, et i_{α} est le courant dans la branche α du réseau. Le théorème de Cohn [28] nous montre ensuite qu'à l'ordre linéaire dans les fluctuations,

$$(5) \quad \delta RI^2 = \sum \delta r_{\alpha} i_{\alpha}^2.$$

Utilisant le modèle des équations (3), nous avons alors que

$$(6) \quad \frac{S_V(\omega)}{V^2} = \frac{S_R(\omega)}{R^2} = \frac{\rho^2(\omega)}{r^2} \frac{\sum i_{\alpha}^4}{\left(\sum i_{\alpha}^2\right)^2} \sim \xi^{-b}$$

où le dernier signe de proportionnalité définit l'exposant b décrivant la loi

d'échelle à laquelle on s'attend pour un fractal de taille ξ .

Suivant la philosophie décrite dans la Section 2, nous avons d'abord évalué [26] l'équation (6) pour toute une série de fractals exactement self-similaires: tamis de Sierpriński, courbe de Von Koch, etc. Pour tous ces fractals, nous avons trouvé que l'exposant b ne semblait pas avoir de relation avec les autres exposants définis précédemment pour les fractals. Nous avons ensuite évalué cet exposant numériquement [27] pour des amas de percolation. Là encore, la même conclusion prévaut.

Des expériences ont ensuite été faites par d'autres groupes. D'abord [29] sur des films métalliques minces percés par des jets de sable. Dans ce cas, l'interprétation de l'expérience est un peu difficile car il faut tenir compte de corrections dites du continuum [30]. Nous ne discuterons donc pas de cette question ici. D'autres expériences plus récentes [31] ont mesuré l'exposant b de façon indirecte en étudiant la réponse thermique d'un échantillon artificiel. Là encore, nous n'entrerons pas dans les détails.

4. Famille d'exposants pour les fractals

Les équations (4) et (6) suggèrent d'étudier les exposants x_n définis de la façon suivante:

$$(7) \quad \sum_{\alpha} i_{\alpha}^{2n} \approx \xi^{-x_n}.$$

Lorsque $n = 0$, la somme compte simplement le nombre de liens transportant un courant. $-x_0$ est donc égal à la dimension fractale de l'amas infini moins les bouts pendants, amas connu sous le nom de squelette (backbone). Utilisant les équations (4) et (6) et nos définitions précédentes, nous retrouvons aussi $-x_1 = -\beta_L$ et $x_2 = b + 2\beta_L$. Pour $n = \infty$, il n'y a que les liens transportant un courant unité qui contribuent à la somme. Pour des raisons qui sont particulières au problème de la percolation [13], ceci veut dire que $x_{\infty} = -1/\nu$. En fait, les exposants pour d'autres valeurs de n peuvent aussi être accessibles expérimentalement en mesurant des

fonctions de corrélation d'ordre plus élevé pour les fluctuations de la résistance [26]. Nous avons évalué ces exposants numériquement pour les amas de percolation [27]. Dans ce cas, la somme dans le terme de gauche est évaluée pour chaque réalisation du désordre, puis moyennée sur les différentes réalisations pour obtenir les x_n .

Les exposants x_n montrent donc que toute une série d'exposants *mesurables*, définis auparavant pour la percolation font en fait partie de la même famille. Cette famille a aussi été trouvée et calculée indépendamment par de Arcangelis et al. [16]. Utilisant des résultats très généraux de la théorie des probabilités, on sait aussi que $x_0 - x_n$ est une fonction convexe décroissante de n . Les inégalités suivantes en particulier sont satisfaites ([26], [32]):

$$(8) \quad x_{n-1} \leq x_n \leq \frac{n}{n-1} x_{n-1} - \frac{1}{n-1} x_0.$$

La dernière de ces deux inégalités ne s'applique que pour $n \geq 1$.

Notons en passant qu'on trouve pour les amas de percolation,

$$(9) \quad \left[\sum_{\alpha} i_{\alpha}^2 \right]^n \approx \xi^{-nx_1}$$

ce qui est très différent du résultat de l'équation (7). Si on définissait les x_n par l'équation (9), on aurait alors ce qui s'appelle en phénomènes critiques un "scaling de gap", i.e. les x_n seraient décrits par une fonction linéaire de n , ce qui n'est pas du tout le cas en général pour les x_n définis par l'équation (7).

Jusqu'à présent, nous avons supposé que les éléments formant le réseau de résistances aléatoires obéissent à la loi d'Ohm, i.e. $V = rI$. On peut aussi généraliser ([33], [34], [35]) ce problème au cas où $V = rI^{\alpha}$ avec $-1 < \alpha < \infty$. Plusieurs résultats intéressants en découlent. Par exemple, pour $\alpha = \infty$, $-\beta_L(\alpha)$ est égal à la dimension d'étalement $\hat{d}$, définie plus haut [33]. On peut aussi généraliser le théorème de Cohn, définir une famille d'exposants ([34], [35]) comme à l'équation (7), etc. Ceci est une direction supplémentaire que nous ne pouvons discuter ici.

5. Conclusion et connexions avec d'autres domaines

Il est important de remarquer que l'existence d'une infinité d'exposants pour les propriétés électriques des amas de percolation n'est pas une conséquence du désordre, mais plutôt de la structure fractale du système. En effet, on peut prendre des fractals exactement self-similaires (e.g. [16]) et montrer que les x_n ne sont pas une fonction banale de n telle une constante ou une fonction linéaire de n . De ce point de vue, il n'est donc pas surprenant que des exposants analogues aux x_n soient apparus dans d'autres domaines de la physique où l'aspect fractal est important. Nous discutons brièvement ces autres domaines ci-dessous.

La nécessité de définir une infinité d'exposants pour complètement caractériser les propriétés physiques des fractals a d'abord été proposée par Mandelbrot [36]. Ce n'est que récemment cependant que toute la signification de ce résultat est apparue. Dans le problème de la turbulence, ([36], [37], [38]) on remarque d'abord que l'équation de Navier-Stokes possède, dans le régime où la dissipation est négligeable, une invariance d'échelle. Ceci veut dire que le champ de vitesse autour de points singuliers (les tourbillons), a des propriétés d'échelle, ce qui entraîne que le champ de vitesse obéit, dans la limite des petits r , à une équation du type

$$(10) \quad \langle [v(r) - v(0)]^p \rangle \sim r^{\zeta_p}.$$

Les premières hypothèses suggérèrent que ζ_p était une fonction linéaire de p , de façon analogue au "scaling de gap" discuté plus haut. Ce n'est que plus tard que l'on se rendit compte qu'il peut exister plusieurs types de singularités, qui sont en plus chacune réparties sur un ensemble de dimension fractale différente. Ceci veut dire que les ζ_p forment un ensemble d'exposants indépendants, analogues aux x_n ci-haut, qui furent découverts indépendamment. Les exposés de Lovejoy et Schertzer dans les mêmes comptes rendus discutent de ce problème en plus de détail, nous ne nous y attarderons donc pas ici.

C'est probablement l'article de Hentschel et Procaccia [39] qui est à l'origine de l'intérêt plus récent pour ces familles d'exposants. Ces auteurs voulaient caractériser les attracteurs étranges. Ils définirent donc les exposants D_q de la façon suivante:

$$(11) \quad \tau(q) = (q-1)D_q \equiv \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\log \sum p_i^q}{\log \ell}$$

où p_i est la probabilité qu'un point de l'attracteur tombe dans un intervalle de taille ℓ autour du point i . D_0 est alors la dimension fractale de l'attracteur, D_2 un exposant relié à la fonction de corrélation à deux points, et la limite $q \rightarrow 1$ donne l'exposant pour l'"entropie" de l'attracteur. Les fonctions de corrélation d'ordre plus élevé sont contrôlées par les autres D_q .

Les p_i dans l'équation (11) sont en quelque sorte une "mesure" associée à l'attracteur. Halsey et al. [40] ont donc récemment considéré ce problème de ce point de vue plus général. Supposant, de façon analogue à ce que nous avons mentionné plus haut pour la turbulence, qu'il y a différents types de singularités,

$$(12) \quad p_i^q \sim \ell^{\alpha q},$$

on peut faire l'hypothèse que dans la limite $\ell \rightarrow 0$,

$$(13) \quad \sum_i p_i^q \rightarrow \int d\alpha \rho(\alpha, \ell) \ell^{\alpha q}.$$

Lorsque les singularités sont disposées sur un ensemble de dimension fractale, on peut poser que

$$(14) \quad \rho(\alpha, \ell) \sim \ell^{-f(\alpha)}$$

où $f(\alpha)$ est la dimension fractale du support des singularités de type α . Substituant (13) dans (12) et faisant l'approximation du point de selle, on trouve que $\tau(q)$ tel que défini dans l'équation (11) est la transformée de Legendre ([40], [41]) de $f(\alpha)$, i.e.

$$(15a) \quad f(\alpha) = q\alpha - \tau(q)$$

$$(15b) \quad \alpha = \frac{\partial \tau}{\partial q}.$$

Les $f(\alpha)$ ou les $\tau(q)$ (ou x_n) peuvent donc être obtenues l'une de l'autre, mais la signification géométrique des $f(\alpha)$ donne un nouvel éclairage sur le problème.

Il y a d'autres domaines de la physique qui ont profité de ce nouveau point de vue. Par exemple, le domaine des agrégats limités par diffusion, où on essaie cette fois de comprendre comment des particules diffusant de façon indépendante et se collant de façon irréversible sur un point de nucléation puis sur les particules déjà collées, forment des agrégats de dimension fractale bien définie [5]. Dans ce domaine, la mesure (dite harmonique) est donnée par la probabilité qu'une particule puisse tomber sur un point donné de l'agrégat.

Pour en revenir à nos propriétés électriques des amas de percolation, notons que la mesure p_i est analogue à la puissance i_α^2 dissipée dans une branche donnée du circuit, et que ξ est analogue à $1/\ell$ car, comme nous l'avons mentionné plus haut, le pas du réseau est fixe, ce qui veut dire que la limite de "scaling" est atteinte pour les grandes tailles. Récemment, de Arcangelis et al. [42] ont fait remarquer que l'analogue de $f(\alpha)$ pour les circuits caractérise la distribution de courant dans le réseau lorsque la variable utilisée pour décrire cette distribution est $\log V/\log \xi$, où V est la chute de tension dans une résistance quelconque.

En terminant, quelques remarques sur l'universalité et sur les analogies avec le domaine des phénomènes critiques qui, après tout, est probablement celui où les idées d'universalité et de lois d'échelle sont apparues pour la première fois en physique de la matière condensée. Soit $\phi(x)$, l'aimantation moyenne autour du point x . On associe en général à chaque configuration des ϕ une fonctionnelle d'énergie libre de la forme

$$F = \int \Pi_x d\phi_x [r_0 \phi^2 + |\nabla \phi|^2 + u_3 \phi^3 + u_4 \phi^4 + \dots].$$

On calcule ensuite comment les paramètres r_0 et u_n se renormalisent sous changement d'échelle. Près d'un point fixe, le groupe de renormalisation peut en général être linéarisé et les valeurs propres des relations de récurrence donnent les

différents exposants. Il y a donc en général une infinité d'exposants associés aux différents u_n , ou plus précisément aux combinaisons linéaires de ceux-ci correspondant aux vecteurs propres. La plupart de ces exposants sont qualifiés de non pertinents parce que négatifs. Ce que ceci veut dire en pratique, c'est que les quantités mesurables comme

$$\begin{aligned} \langle \int dx \phi(x) \rangle &\sim (T-T_c)^\beta \\ \langle \int dx \phi^2(x) \rangle &\sim (T-T_c)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

où T est la température, sont contrôlées seulement par les exposants dits pertinents. Les autres quantités accessibles par des mesures thermodynamiques, comme

$$\langle [\int dx \phi(x)]^2 \rangle$$

qui est la susceptibilité, sont aussi contrôlées par un exposant qui est simplement relié à α et β . C'est une forme de "gap scaling". Il va sans dire cependant, que si on avait accès expérimentalement aux champs associés aux autres valeurs propres, on observerait de nouveaux exposants, qui ne sont pas simplement reliés aux exposants "pertinents" [43].

Ce qui différencie les problèmes que nous avons considérés, c'est donc que nous avons accès expérimentalement, en principe, à tous les exposants. Les x_n ont en fait été calculés par Park, Harris et Lubensky [44] en utilisant un formalisme de théorie des champs tout à fait analogue au formalisme de renormalisation dans l'espace de Fourier utilisé en phénomènes critiques. Une approche de renormalisation dans l'espace des positions, dite méthode de Migdal-Kadanoff, aussi utilisée en phénomènes critiques, a aussi été employée [34] pour calculer les x_n .

Finalement, qu'advient-il de l'universalité? Même s'il y a une infinité d'exposants, ceux-ci sont indépendants du réseau de départ utilisé et aussi du type de percolation (lien ou site). En ce sens donc, l'universalité est préservée même s'il faut maintenant une fonction (les x_n) pour caractériser cette classe d'universalité plutôt que seulement quelques exposants pertinents. Nous croyons pouvoir cependant démontrer [45] que les valeurs entières de n suffisent pour caractériser

une classe d'universalité. Ce n'est qu'une des questions qui restent encore à éclaircir dans ce domaine.

Remerciements

Les résultats résumés ici sont le fruit de nombreux travaux faits en collaboration avec C. Tannous de Montréal et R. Rammal de Grenoble; ce dernier étant plus particulièrement à l'origine de plusieurs des idées discutées ici. Nous tenons à remercier C. Bourbonnais pour ses commentaires sur les analogies avec les phénomènes critiques. Ces travaux ont été supportés financièrement par le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie (CRSNG) grâce à une subvention individuelle et grâce au programme Attaché de recherche. L'aide du Gouvernement du Québec par le fonds FCAR est aussi grandement appréciée.

Références

- [1] MANDELBROT, B.B., *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*, Flammarion, Paris, 1975.
- MANDELBROT, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [2] WILSON, K., *Nobel Lectures in Physics*, 1982, Rev. Mod. Phys. (55), 477-509, 1983.
- [3] MANDELBROT, B.B., présents comptes rendus.
- [4] De GENNES, P.G., *Scaling Properties in Polymer Physics*, Cornell University Press, Ithaca, New York, 1979.
- [5] WITTEN, T.A. et SANDER, L.M., *Diffusion limited aggregation as a kinetic critical phenomenon*, Phys. Rev. Lett. (47), 1400-1403, 1981.
- [6] LOVEJOY, S. et SCHERTZER, D., présents comptes rendus.

- [7] BROADBENT, S.R. et HAMMERSLEY, J.M., *Percolation processes. Crystals and mazes*, Proc. Cambridge Philos. Soc. (53), 629-641, 1957.
- [8] KAPITULNIK, A. et DEUTSCHER, G., *Percolation characteristics in discontinuous thin films of Pb*, Phys. Rev. Lett. (49), 1444-1447, 1982.
- [9] LAIBOWITZ, R.B., VOSS, R.F. et ALESSANDRINI, E.I., *Clustering in thin Au films near the percolation threshold*, 145-160 dans Percolation, Localization, and Superconductivity, NATO ASI Series B, Vol. 109, édité par Goldman, A.M. et Wolf, S.A., Plenum, New York, 1984.
- [10] STAUFFER, D., *Introduction to Percolation Theory*, Taylor & Francis, London, 1985.
- [11] DEUTSCHER, G., ZALLEN, R. et ADLER, J., éditeurs, *Percolation structures and processes*, Annals of the Israel Physical Society, Vol. 5, Hilger, Bristol, 1983.
- [12] KESTEN, H., *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhauser, Boston, 1982.
- [13] STANLEY, H.E. et CONIGLIO, A., *Fractal structure of the incipient infinite cluster in percolation*, 101-120 dans [11] ci-dessus.
- [14] KIRKPATRICK, S., *Models of disordered materials*, 321-403 dans La matière mal condensée, III Condensed Matter, Les Houches Session XXXI, édité par Balian, R., Maynard, R. et Toulouse, G., North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [15] GEFEN, Y., AHARONY, A., MANDELBROT, B.B. et KIRKPATRICK, S., *Solvable fractal family, and its possible relation to the backbone at percolation*, Phys. Rev. Lett. (47), 1771-1774, 1981.
- [16] De ARGANGELIS, L., REDNER, S. et CONIGLIO, A., *Anomalous voltage distribution of random resistor networks and a new model for the backbone at the percolation threshold*, Phys. Rev. B (31), 4725-4727, 1985.

- [17] RAMMAL, R. et TOULOUSE, G., *Random walks on fractal structures and percolation clusters*, J. Phys. (Paris) Lett. (44), L-13 - L-23, 1983.
- [18] MANDELBROT, B.B., *Comment on the equivalence between fracton/spectral dimensionality, and the dimensionality of recurrence*, J. Stat. Phys. (36), 541-543, 1984.
- [19] PIKE, R. et STANLEY, H.E., *Order propagation near the percolation threshold*, J. Phys. A (14), L-169 - L-177, 1981.
- [20] ALBINET, G., SEARBY, G. et STAUFFER, D., *Fire propagation in a 2-d random medium*, J. Phys. (Paris) (47), 1-7, 1986.
- [21] RAMMAL, R., ANGLES D'AURIAC, J.C. et BENOÎT, A., *Metric properties of fractal lattices*, J. Phys. A (17), L-491 - L-494, 1984.
- VANNIMENUS, J., *On intrinsic properties of fractal lattices and percolation clusters*, J. Phys. (Paris), Lett. (45), L-1071 - L-1076, 1984.
- [22] REIF, F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, p. 567, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [23] DUTTA, P. et HORN, P.M., *Low-frequency fluctuations in solids: 1/f noise*, Rev. Mod. Phys. (53), 497-516, 1981.
- [24] RICHARDSON, J.M., *The linear theory of fluctuations arising from diffusional mechanisms - An attempt at a theory of contact noise*, Bell Syst. Tech. J. (29), 117-141, 1950.
- [25] FOURCADE, B. et TREMBLAY, A.-M.S., *Diffusion noise of fractal networks and percolation clusters*, Phys. Rev. B, soumis pour publication. Cf. bibliographie de cet article pour des références supplémentaires.
- [26] RAMMAL, R., TANNOUS, C. et TREMBLAY, A.-M.S., *1/f noise in random resistor networks: fractals and percolating systems*, Phys. Rev. A (31), 2662-2671, 1985.

- [27] RAMMAL, R., TANNOUS, C., BRETON, P. et TREMBLAY, A.-M.S., *Flicker (1/f) noise in percolation networks: a new hierarchy of exponents*, Phys. Rev. Lett. (54), 1718-1721, 1985.
 - [28] COHN, R.M., *The resistance of an electrical network*, Proc. Am. Math. Soc. (1), 316-324, 1950.
 - [29] GARFUNKEL, G.A. et WEISSMAN, M.B., *Noise scaling in continuum percolating films*, Phys. Rev. Lett. (55), 296-299, 1985.
 - [30] TREMBLAY, A.-M.S., FENG, S. et BRETON, P., *Exponents for 1/f noise near a continuum percolation threshold*, Phys. Rev. B (33), 2077-2080, 1986.
 - [31] DUBSON, M.A., HUI, Y.C., GARLAND, J.C. et WEISSMAN, M.B., *Measurement of the noise exponent in 2-d percolating networks: lattice vs swiss cheese*, Bull. Am. Phys. Soc., sous presse.
 - [32] LOEVE, M., *Probability Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1963.
 - [33] BLUMENFELD, R. et AHARONY, A., *Nonlinear resistor fractal networks, topological distances, singly connected bonds and fluctuations*, J. Phys. A, L-443 - L-448, 1985.
 - [34] RAMMAL, R. et TREMBLAY, A.-M.S., *Resistance noise in non-linear resistor networks*, Phys. Rev. Lett. (58), 415-418, 1987.
 - [35] BLUMENFELD, R., MEIR, Y., HARRIS, A.B. et AHARONY, A., *Infinite set of exponents describing physics on fractal networks*, soumis pour publication.
 - [36] MANDELBROT, B.B., *Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid Mech. (62), 331-358, 1974.
- MANDELBROT, B.B., *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*, Paris, Flammarion, 1975.

- [37] SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., *On the dimension of atmospheric motions*, 141-144 dans preprint vol., IUTAM Symposium on Turbulence and Chaotic Phenomenon in Fluids, Kyoto, Japan 5-9 sept. 1983.

- FRISCH, U. et PARISI, G., *On the singularity structure of fully developed turbulence*, 84-87 dans Turbulence and Predictability of Geophysical Flows and Climate Dynamics, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course LXXXVIII, édité par Ghil, H., Benzi, R. et Parisi, G., North Holland, Amsterdam, 1985.

- [38] BENZI, R., PALADIN, G., PARISI, G. et VULPIANI, A., *On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems*, J. Phys. A (17), 3521-3531, 1984.

- [39] HENTSCHEL, H.G.E. et PROCACCIA, I., *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*, Physica 8D, 435-444, 1983.

- GRASSBERGER, P., *Generalized dimensions of strange attractors*, Phys. Lett. (97A), 227-230, 1983.

- [40] HALSEY, T.C., JENSEN, M.H., KADANOFF, L.P., PROCACCIA, I. et SHRAIMAN, B.I., *Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets*, Phys. Rev. A (33), 1141-1151, 1986.

- [41] AHARONY, A., Séminaire au 55th Statistical Mechanics Meeting, Rutgers University, 1986 (non-publié).

- [42] De ARGANGELIS, L., REDNER, S. et CONIGLIO, A., *Multiscaling approach in random resistor and random superconducting networks*, Phys. Rev. B(34), 4656-4673, 1986.

- [43] Nous remercions Claude BOURBONNAIS pour une discussion d'où ces idées sont sorties.

- [44] PARK, Y., HARRIS, A.B. et LUBENSKY, T., *Noise exponents of the random resistor network*, soumis pour publication.

[45] FOURCADE, B., BRETON, P. et TREMBLAY, A.-M.S., en préparation.

*Département de physique et
Centre de recherche en physique du solide
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec J1K 2R1*

Manuscrit reçu le 18 juillet 1986.