

**SINGULARITÉS ANISOTROPES,
DIVERGENCE DES MOMENTS EN TURBULENCE:
INVARIANCE D'ÉCHELLE GÉNÉRALISÉE
ET PROCESSUS MULTIPLICATIFS**
D. Schertzer et S. Lovejoy

Résumé

Nous discutons en termes de processus multiplicatifs les propriétés fondamentales des écoulements turbulents: l'intermittence et l'anisotropie. Celles-ci sont observées, en particulier, dans le cadre géophysique. Nous présentons ce type de modèles à partir des notions phénoménologiques des cascades turbulentes.

L'apparition de lois d'invariance d'échelle multiple est discutée aussi bien dans le cadre d'une construction partielle du processus, flux "nus", que pour les quantités mesurées, flux "habillés", par intégration sur le processus complet. Dans le premier cas, le caractère multiple de l'invariance d'échelle correspond à l'apparition d'une multiplicité de singularités au cours de la construction du processus. Par intégration sur celles-ci, nous obtenons, pour les quantités "habillées", des divergences statistiques, à partir d'un ordre lié à la dimension de l'ensemble d'intégration.

Nous caractérisons les propriétés essentielles des générateurs des (semi-) groupes multiplicatifs d'intermittence et d'anisotropie, et donnons quelques éléments expérimentaux - à partir de données radar - soutenant cette approche.

1. Introduction

Cet article est motivé par l'indispensable besoin de mieux comprendre le comportement intermittent et anisotrope de nombreux champs géophysiques. Ceux-ci

manifestent une variabilité et une anisotropie extrêmes sur une vaste gamme d'échelles spatio-temporelles. Par exemple, le rapport des échelles horizontales intervenant dans la dynamique atmosphérique est de l'ordre du milliard (1 000 km sur 1 mm). Plus précisément, plusieurs résultats expérimentaux [1, 2] indiquent que si le spectre d'énergie cinétique $E(k)$ se comporte bien en $k^{-5/3}$ suivant l'horizontale, sa contre-partie verticale — le spectre vertical du vent horizontal — a une pente spectrale plus forte (de l'ordre de $11/5$) mettant ainsi en valeur une anisotropie — due à l'action de la gravité par le biais des forces de flottabilité — ne faisant pas intervenir de rupture d'échelle [3, 4]. Cette anisotropie est particulièrement évidente pour les structures à grandes échelles (fortement "stratifiées") ou à petites échelles (cellules "convectives"). Il est aussi constaté que l'essentiel des différents flux est concentré dans des régions extrêmement éparses. On observe ainsi une riche variété de structures anisotropes et intermittentes, posant de redoutables problèmes au traitement mathématique, aux simulations numériques ou à l'analyse des données de telles structures. On peut, en particulier, noter que l'absence d'échelle caractéristique (en particulier: celle d'un "trou spectral de méso-échelle") liée à l'anisotropie rend intenable la dichotomie entre grandes (quasi isotropie bidimensionnelle) et petites échelles (quasi isotropie tridimensionnelle) invoquée dans le schéma classique de la turbulence atmosphérique [5]. Nous avons été ainsi conduits [3] à proposer un schéma plus simple ne faisant intervenir qu'un régime unique déterminé par une cascade turbulente possédant une symétrie inhabituelle: une anisotropie invariante d'échelle associée à une dimension "elliptique" $23/9$ ($= 2.555...$).

A partir de ce schéma simplificateur, des développements théoriques [6] mènent à la notion de processus multiplicatifs et d'invariance généralisée d'échelle, pour tenir compte à la fois de l'intermittence et de l'anisotropie. Dans les deux cas, ce sont les propriétés mesurables (et non métriques) des écoulements qui interviennent: celles-ci résultent des caractéristiques de deux (semi-) groupes multiplicatifs à un paramètre (le rapport d'échelle généralisé), donc de leurs générateurs.

Dans cet article, nous montrons comment la distinction fondamentale entre propriétés "nues" et "habillées" d'un processus multiplicatif permet d'établir, pour l'intermittence, le lien entre la hiérarchie des singularités et celle des multiples dimensions d'un tel processus, la divergence des statistiques d'ordre élevé des grandeurs observées. Nous empruntons les termes précités au jargon des méthodes de renormalisation pour désigner respectivement celles d'un développement partiel du processus (par exemple le flux "nu" d'énergie d'une cascade développée jusqu'à une échelle ℓ_n , c'est-à-dire que le flux est homogène à cette échelle) et celles correspondant à la limite du processus (échelle d'homogénéité infiniment petite). De fait, dans cette limite, nous ne pouvons définir une "densité" du flux au sens des fonctions, mais seulement comme un opérateur (linéaire) agissant sur des mesures. Nous montrerons que l'invariance d'échelle multiple (hiérarchie d'exposants) des quantités nues conduit non seulement au comportement du même type pour les quantités intégrées ("habillées"), mais de plus à des divergences statistiques, déterminées par les dimensions des ensembles (d'observation) sur lesquels sont effectuées les intégrations. En remarquant que les grandeurs observées (en particulier par télédection) sont du type "habillées" — car elles résultent d'intégration sur une échelle d'observation bien plus importante que l'échelle interne des phénomènes considérés — on peut apprécier les multiples conséquences pratiques de ce type de comportement.

2. Symétries et singularités des écoulements géophysiques

Ces écoulements sont théoriquement régis par un ensemble complexe d'équations aux dérivées partielles non linéaires, dont les conditions d'existence, d'unicité et de régularité pour leur solutions sont rarement établies. Les équations de Navier-Stokes incompressibles, couplées avec l'équation d'advection d'un champ scalaire passif, forment le prototype de ce genre de système:

$$\begin{aligned}\partial \mathbf{v} / \partial t &= -(1 - \Pi(\nabla)) \cdot \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \partial p / \partial t &= \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v} - \nu \nabla^2 p - \kappa \nabla^2 p,\end{aligned}\tag{1}$$

où v désigne le champ de vitesse, p la concentration de scalaire passif, t le temps, f (de divergence nulle) et f' des termes sources (représentant partiellement les conditions aux limites), ν la viscosité cinématique, κ la diffusivité et Π le projecteur sur les composantes irrotationnelles du champ de vitesse ($1-\Pi$ sur les composantes purement rotationnelles), c'est-à-dire:

$$\Pi_{ij}(\nabla) = \nabla^{-2} \nabla_i \nabla_j. \quad (2)$$

L'équation (1) a la propriété formelle d'être invariante d'échelle ("scaling"), c'est-à-dire d'être invariante suivant les transformations d'échelle

$$\begin{array}{lll} x \rightarrow x/\lambda & t \rightarrow t/\lambda^{1-H} & \Pi \rightarrow \lambda \Pi \\ v \rightarrow v/\lambda^H & \nu \rightarrow \nu/\lambda^{H+1} & f \rightarrow f/\lambda^{2H-1} \\ p \rightarrow p/\lambda^{H'} & \kappa \rightarrow \kappa/\lambda^{H+1} & f' \rightarrow f'/\lambda^{H+H'-1}. \end{array} \quad (3)$$

Il reste à donner un sens précis à ces transformations formelles. Cela se fait souvent en termes statistiques, par exemple que les fluctuations "caractéristiques" $\Delta v(\ell)$ et $\Delta p(\ell)$, à l'échelle ℓ , sont réduites par les facteurs λ^H et $\lambda^{H'}$ respectivement, lorsque l'échelle ℓ est par un facteur λ . Par fluctuations caractéristiques, on entend que chaque moment statistique des fluctuations de ces champs (appelés fonction de structure de ces champs) est proportionnel à la puissance correspondante de ces fluctuations caractéristiques, c'est-à-dire:

$$\langle |v(x) - v(x')|^H \rangle \sim [\Delta v(\ell)]^H: |x-x'| = \ell \quad (4)$$

$\langle . \rangle$ indiquant une moyenne d'ensemble.

Nous pouvons noter que les exposants H et H' sont déterminés dès que nous faisons l'hypothèse de flux (conservés par les interactions non linéaires) homogènes, c'est-à-dire de flux ayant des dentisés (par unité de volume et de masse) très faiblement fluctuantes, donc considérées essentiellement comme des constantes; soit celles du flux d'énergie (ϵ) et du flux de variance scalaire (χ):

$$\begin{aligned}\epsilon &= \langle \partial v^2 / \partial t \rangle = \text{Cte} \\ \chi &= \langle \partial p^2 / \partial t \rangle = \text{Cte}\end{aligned}\tag{5}$$

$$\implies H = H' = 1/3.$$

Ces lois d'invariance d'échelle sont plus connues sous leurs formes spectrales [7]:

$$\begin{aligned}E(K) &\approx \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \\ E'(K) &\approx \chi \epsilon^{-1/3} k^{-5/3},\end{aligned}\tag{6}$$

$E(k)$ et $E'(k)$ étant respectivement les spectres (de puissance) des champs de vitesse et de concentration scalaire, k un nombre d'onde. Ces spectres sont effectivement obtenus par des techniques de renormalisation (cf. par exemple [8]) en forçant l'hypothèse d'homogénéité des flux (d'où des modifications plus ou moins ad-hoc des fonctions de Green renormalisées). Cette hypothèse d'homogénéité des flux a été depuis longtemps critiquée (par ex. [9]) et surtout mise en défaut expérimentalement (à partir de Batchelor et Townsend [10]). En fait, la mise en cause de l'hypothèse d'homogénéité conduit, en général, à sortir du cadre de loi d'invariance simple d'échelle décrite par l'équation (4) (et sous-tendue par une égalité en loi de distribution entre fluctuations à différentes échelles) qui ne fait intervenir que le seul exposant H pour accéder à des lois d'invariance multiples (voir aussi discussion dans [11]) qui font intervenir toute une hiérarchie d'exposants correspondant à différents ordres de singularités: dans le cas d'invariance simple d'échelle, nous avons une unique singularité d'ordre H ($= 1/3$) pour les fluctuations de vitesse et de concentration (leurs champs sont au plus $C^{1/3}$ tenant compte de (4) et (5)), aucune singularité pour les densités ϵ et χ des flux d'énergie et de flux de variance scalaire.

3. Intermittence et loi d'invariance multiple

Nous nous intéressons, contrairement à l'hypothèse d'homogénéité des flux, à des densités singulières du flux d'énergie correspondant à la notion d'intermit-

tence (les implications pour le champ de concentration sont explicitement discutées dans [11]). Pour en rendre compte, Kolmogorov [12] et Obukov [13] postulèrent que la densité du flux d'énergie suivait une loi log-normale (susceptible de rendre compte de fortes fluctuations observées de cette densité) et respectait une loi d'échelle multiple:

$$\langle (\varepsilon(x)\varepsilon(x+\Delta x/\lambda))^h \rangle \sim \lambda^{-\mu h(h-1)/2}, \quad (7)$$

où μ est la variance du logarithme de ε . Les exposants de la loi d'échelle des corrélations d'ordre h , sont donc non linéaires (quadratiques) en h , contrairement à une hypothèse d'invariance d'échelle en distribution de probabilité (ou loi d'invariance simple) menant à une expression linéaire. De tels postulats ne sont pas très évidents en soi, et nous verrons précisément qu'une telle hypothèse n'est pas valide pour h assez grand, car nous obtiendrons des divergences de moments. On peut aussi remarquer le défaut de propriétés additives pour des lois log-normales, ce qui pose a priori problème pour la définition des flux. Plus fondamentalement, nous verrons que la nature singulière de la limite d'un processus, ayant des propriétés semblant correspondre à (7), prévient de considérer ε comme une fonction. De fait, ce qui est plus ou moins implicite dans de telles hypothèses, c'est l'apparition de singularités d'ordre multiple pour la densité du flux, c'est-à-dire qu'au cours du processus de construction d'un tel modèle d'intermittence, quand l'échelle d'homogénéité est ℓ (que nous ferons tendre vers zéro), nous avons:

$$\varepsilon_\ell(x) \geq \ell^{-\gamma(x)} \quad (8)$$

où γ peut prendre différentes valeurs positives (suivant le lieu x). L'inégalité (8) signifie que ℓ tendant vers 0, ε_ℓ diverge au moins aussi vite que $\ell^{-\gamma}$: γ correspond à l'ordre de la singularité (quand il est négatif, il correspond plutôt à l'ordre d'une régularité). Enfin, pour respecter à la fois les propriétés d'invariance (multiple) d'échelle et le caractère extrêmement rare des singularités, l'occurrence de celles-ci devrait a priori se caractériser par une codimension $c(\gamma)$ ($=d-D(\gamma)$, d dimension (topologique) de l'espace, $D(\gamma)$ dimension fractale des singularités) prescrivant la fraction de l'espace occupée par les singularités

d'ordre supérieur ou égal à γ , c'est-à-dire:

$$\Pr(\epsilon_\ell \geq \ell^{-\gamma}) \sim \ell^{c(\gamma)}. \quad (9)$$

L'existence d'une telle hiérarchie de singularités et de codimensions fractales (d'où le terme multifractal) a été postulée en tant que telle par Frisch et Parisi [14] pour la turbulence, Hasley et al. [15] pour les attracteurs étranges. Nous avons anticipé — à partir d'une simple variation (le α -modèle [16]) sur le β -modèle [17 et 18] — qu'une telle multiplicité de singularités était présente dans tout schéma de cascade à l'exception du trop trivial β -modèle. Dans ce but, était introduite une première fonction codimension $C(h)$ prescrivant la divergence du flux d'énergie $\Pi(A)$ sur des ensembles A (de dimension $D(A)$, entière ou non) de mesure (ou d'observation):

$$\Pi(A) = \int_A \epsilon d^{D(A)}x$$

$$D(A) < C(\alpha), \quad \alpha > 1: \text{ tout } h \geq \alpha \Rightarrow \langle \Pi(A)^h \rangle = \infty \quad (\text{divergence}) \quad (10)$$

en généralisant considérablement la remarque faite par Mandelbrot [17] que des divergences de flux pouvaient être obtenues sur des sous-espaces (de dimensions entières) et en obtenant, d'autre part, de premiers résultats expérimentaux ([1], [3], [4] et Section 8) soutenant cette approche.

Dans ce qui suit, nous préciserons les notions (et notations) introduites (en particulier: la nature de la limite ϵ , la notion d'intégration qui peut lui être associée pour obtenir le flux Π ...), discuterons la dualité entre les deux fonctions codimensions $C(h)$ et $c(\gamma)$ (d'où l'équivalence entre les différentes approches), mais surtout établirons quels sont les modèles associés à de tels comportements. En effet, nous traiterons surtout le problème "inverse": mettre en évidence les "générateurs" de ces comportements.

4. Phénoménologie de l'intermittence: cascades et processus multiplicatifs discrets

Depuis Richardson [19], la phénoménologie de la turbulence a été surtout saisie à travers de simples schémas auto-similaires de cascade, la question de

l'intermittence (ou d'inhomogénéité du flux d'énergie) fut reprise à travers de tels schémas [20] pour rendre plus explicite cette question. La figure 1 en donne l'illustration: un tourbillon est brisé en sous-tourbillons (par interactions non linéaires avec des tourbillons de même taille, non figurés ici), soit de façon homogène (A), soit inhomogène (B), une telle fragmentation étant indéfiniment itérée (dans la limite de viscosité nulle) de façon auto-similaire. Ces schémas sont à interpréter dynamiquement comme des coupes 2D, effectuées suivant l'axe des temps, d'un processus spatio-temporel 4D (récemment développés, dans cet esprit, pour des applications en physique des particules [21] à l'aide de l' α -modèle). La figure 1B représente le cas le plus simple (et le plus caricatural) d'inhomogénéité avec la seule alternative "mort" ou "vif" pour les sous-tourbillons. Ce cas, habituellement référencé comme le β -modèle, a la particularité d'être déterminé par un seul paramètre, par exemple la dimension de Hausdorff (D) [17], [18] du support (un ensemble de Cantor aléatoire) de la turbulence ou sa codimension C ($= d-D$, d étant la dimension (topologique) de l'espace sur lequel se développe la cascade), c'est-à-dire celle du sous-espace sur lequel survivent les sous-tourbillons, le nombre ($N(\ell)$) de sous-tourbillons survivants à une échelle ℓ variant comme:

$$N(\ell) \sim \ell^{-D} \quad (11)$$

et $D = d$ dans le cas homogène. Le paramètre souvent cité est $\beta = \lambda^{-C}$, λ étant le pas élémentaire de la cascade ($\ell_{n+1} = \ell_n / \lambda$, $\lambda = \text{Cte} > 1$) représentant le taux d'activité par pas de cascade.

Le cas du β -modèle est très singulier, car dès que l'on passe de l'alternative "vifs/morts" (pour les sous-tourbillons) à celle de "forts/faibles" (α -modèle [16]) tout un spectre de singularités se crée itération par itération; la définition des tourbillons "survivants" dépendra effectivement du seuil à partir duquel la "survie" sera définie, fera donc a priori (et c'est effectivement le cas) intervenir une hiérarchie de dimensions et non une dimension unique comme précédemment.

Explicitons maintenant la propriété fondamentale de ces modèles phénoménologiques d'intermittence: on considère qu'à chaque étape les interactions non

Processus isotropes
(auto-similarité) :

ISOTROPIC = SELF SIMILARITY

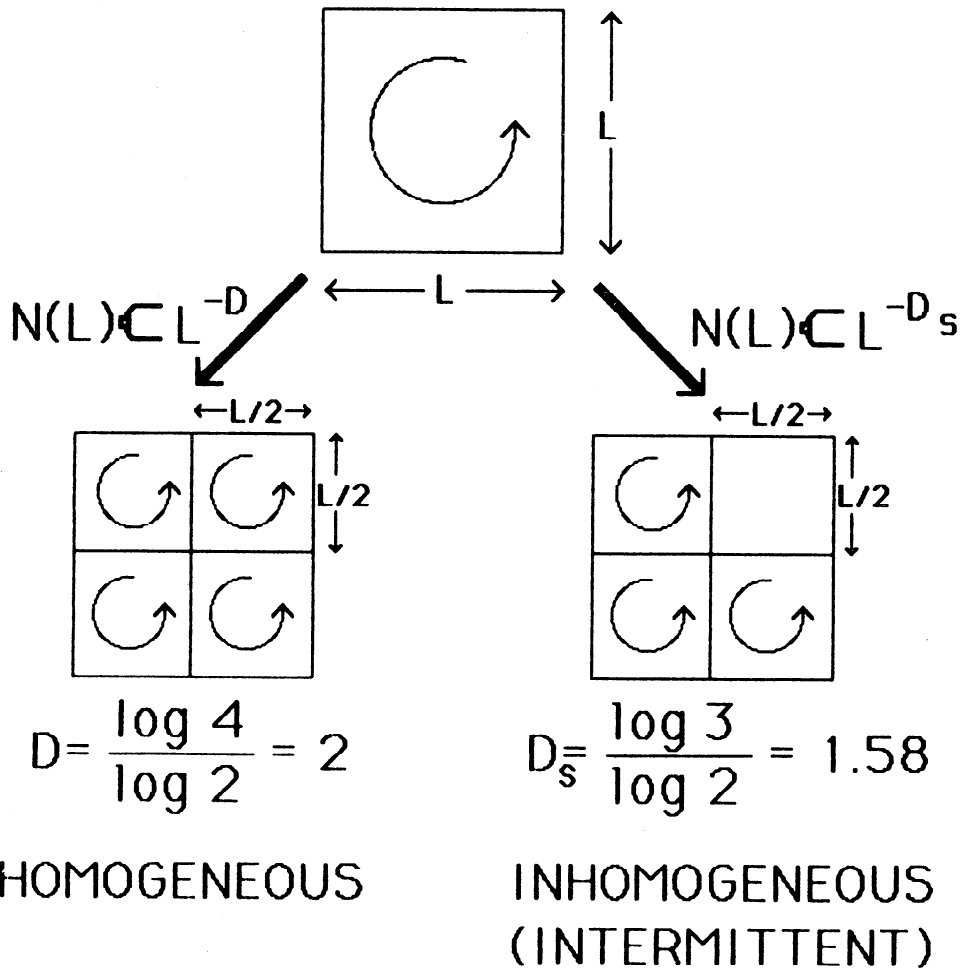


Fig. 1A

Le cas homogène et isotrope

Fig. 1B

Le cas inhomogène et isotrope

Figure 1

Schéma d'un pas de cascade

linéaires (entre tourbillons de tailles semblables) contrôlent (d'une manière indépendante de l'échelle) la fraction du flux d'énergie (et donc de sa densité) transmise aux sous-tourbillons créés. Ceci correspond à la propriété suivante de (semi-)groupe, en tenant compte du caractère auto-similaire de la cascade:

$$\epsilon_{n+m} = T_n(\epsilon_m) \epsilon_n. \quad (12)$$

où ϵ_m et ϵ_n sont deux réalisations indépendantes de la densité du flux jusqu'à des échelles ℓ_m et ℓ_n respectivement, c'est-à-dire constantes sur des cubes de ces tailles, et T_n la contraction (T_n^{-1} la dilatation) de rapport λ^{-n} (λ^n , respectivement): $T_n(\epsilon_m)$ résulte d'une cascade commençant sur des cubes de taille ℓ_n et se développant jusqu'à des cubes de taille ℓ_{n+m} . Nous avons donc:

$$\epsilon_n = \prod_{m=1, n} T_m(\mu \epsilon^{(m)}) \quad (13)$$

où les $\mu \epsilon$ sont des fonctions en escaliers (constantes sur les cubes, de la taille ℓ_0 de la grille, statistiquement invariantes par translations d'amplitude ℓ_0 suivant les axes de la grille) équidistribuées et indépendantes; ces fonctions jouent le rôle "d'incrément multiplicatifs" (d'où le μ a la place de l'usuel δ pour des processus additifs, et dans ce sens le pas de cascade λ est $(\mu \ell)^{-1}$). La conservation du flux d'énergie va jouer un rôle essentiel dans la définition de ces modèles, or, comme dans le cas de la thermodynamique classique, une distinction être faite entre différents types de conservation du flux d'énergie (au lieu de l'énergie dans le cas de la thermodynamique): cascades "micro-canoniques" (conservation détaillée) et "canoniques" (conservation en moyenne d'ensemble) avec les contraintes correspondantes (avec des notations abrégées):

$$\Pi_n(A) = \int_A \epsilon_n d^{D(A)} x;$$

$$\text{micro-canonique: } \Pi_{n+1}(A) = \Pi_n(A) \quad (D(A) = d)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sous-tourbillons}} \mu \epsilon = \text{nombre de sous-tourbillons} = \lambda^d$$

$$\text{canonique: } \langle \Pi_{n+1}(A) \rangle = \langle \Pi_n(A) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \mu \epsilon \rangle = 1 \quad (14)$$

Comme il est discuté dans [11], nous devons a priori considérer le système comme ouvert, et donc nous placer dans le cadre canonique. On peut aussi remarquer que la contrainte micro-canonique ne joue pas sur des ensembles A épars ($D(A) < d$), alors que la contrainte canonique se maintient, et surtout que nous avons (dans ce cas) une "conservation détaillée faible" correspondant à une propriété de martingale du processus:

$$\langle \Pi_{n+1}(A) \rangle_n = \Pi_n(A) \quad (15)$$

où $\langle . \rangle_n$ indique l'espérance conditionnée par les n premières étapes. Cette propriété joue un rôle essentiel dans la convergence du processus et la définition de sa limite (cf. section 6). Le cas canonique autorise à prendre des valeurs indépendantes sur les différents sous-tourbillons, ce qui est contraire à leur (faible) dépendance linéaire dans le cas micro-canonique (cf. éq. (14)).

D'autre part, le générateur (discret, du fait du pas discret de la cascade) du groupe multiplicatif associé à la cascade est tout simplement "l'incrément exponentiel" élémentaire γ' défini par:

$$\mu \epsilon = \lambda^{\gamma'} = \exp(\gamma' \log(\lambda)) \quad (16)$$

respectant la conservation (en moyenne d'ensemble) du flux d'énergie:

$$\langle \mu \epsilon \rangle = \langle \lambda^{\gamma'} \rangle = 1. \quad (17)$$

De ce fait n'importe quelle famille de fonctions aléatoires (dont l'exponentiel à une espérance finie) γ (en escalier, sur la grille de résolution ℓ_0 statistiquement invariante par translation d'amplitude ℓ_0 suivant les axes de la grille) peut être aisément normalisée de façon à satisfaire cette contrainte:

$$\lambda^{\gamma'} = \lambda^{\gamma} / \langle \lambda^{\gamma} \rangle \quad (18)$$

(cette normalisation étant un peu moins triviale pour les processus continus, nous commençons à distinguer, en général, les générateurs normalisés par un prime). On peut noter que les incréments exponentiels non élémentaires Γ_n (normalisés ou non)

correspondant au rapport d'échelle λ^n (au lieu du pas élémentaire λ) forment un (semi-) groupe additif:

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= \sum_{m=1, n} T_m(\gamma^{(m)}) \\ \varepsilon_n &= \lambda^{\Gamma_n} / \langle \lambda^{\Gamma_n} \rangle \\ \Gamma_{n+m} &= T_n(\Gamma_m) + \Gamma_n\end{aligned}\tag{19}$$

les $\gamma^{(m)}$ étant des fonctions indépendantes de résolution ℓ_0 (c'est-à-dire correspondant à différents "tirages" de γ).

On remarque que les produits répétés d'incrément multiplicatifs (indépendants), correspondant à des sommations sur les incréments exponentiels, construisent des dépendances à longue portée. Nous définissons la fonction $C(h)$ pour une étape élémentaire:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_1^h \rangle / \langle \varepsilon_0^h \rangle &= \langle \mu \varepsilon^h \rangle = \lambda^{(h-1)C(h)} = \lambda^{(K_Y(h) - hK_Y(1))} \\ \langle \exp(h\gamma) \rangle &= \int \lambda^{h\gamma} dP(\gamma) = \exp(K_Y(h) \log(\lambda)) = \lambda^{K_Y(h)}\end{aligned}\tag{20}$$

$K_Y(h)$ étant la seconde fonctionnelle caractéristique (au sens de Laplace, en base λ) de γ (de densité de probabilité dP) est nécessairement convexe (en h) et $C(h)$, ainsi définie comme pente de sa corde passant par les points d'abscisses 1 et h , est nécessairement croissante. La multiplicité (ou caractère multiple) de la loi d'invariance d'échelle correspondra à la non linéarité introduite par $C(h)$ en général différente d'une constante (ou $K(h)$ non linéaire en h). Le cas d'exception est le β -modèle et l' α -modèle échappe déjà à cette exception:

$$\begin{aligned}\Pr(\gamma(x) = C/\alpha) &= \lambda^{-C} \\ \Pr(\gamma(x) = -C/\alpha') &= 1 - \lambda^{-C}\end{aligned}\tag{21}$$

$\gamma(x)$, constante pour les x appartenant à un même cube de taille ℓ_0 , valeurs indépendantes entre différents cubes (en tenant aussi compte des différentes invariances par translation, nous pouvons omettre la référence au point x). On peut noter qu'il se réduit au β -modèle pour $\alpha' = 0$, et donc $\alpha = 1$ (et: $C(h) = C$,

$K(h) = (h-1)C$. Dans les autres cas la non-linéarité est évidente, en particulier avec le développement asymptotique suivant de la fonction $C(h)$:

$$C(h) = (h-\alpha)C/(h-1) + O(1/h^2); \quad h \gg 1. \quad (22)$$

Pour observer l'apparition des multiples singularités, après plusieurs étapes, nous sommes conduits à considérer la distribution $dP(\gamma)$ sous la forme, encore "diagonale" mais un peu plus générale que celle de l' α -modèle, suivante:

$$\begin{aligned} dP(\gamma) &= \sum_{i=1, M} \delta_{\gamma-\gamma_i} \Pr(\gamma = \gamma_i) \\ \Pr(\gamma = \gamma_i) &= p_i \sum_{j=1, SM(i)} q_{i,j} \lambda^{-c_{i,j}} \\ p_i &> 0; \quad q_{i,1} = 1, \quad c_{i,j} \text{ croissant avec } j \quad (i \text{ fixé}) \end{aligned} \quad (23)$$

où M représente la multiplicité, $SM(i)$ la sous-multiplicité associée à chaque valeur ("propre") γ_i , $c_{i,j}$ la codimension caractérisant la fraction d'espace occupée par cette singularité dans le j -ième espace ("propre") associé. $c_{i,j}$ garde le sens intuitif de codimension comme exposant intervenant pour une densité de probabilité (c'est-à-dire: nombre de chance d'avoir γ /nombre de tirages $= \lambda^{Di,j}/\lambda^d$), donc comme codimension d'un ensemble fractal sur lequel est distribué γ_i . Par exemple dans le cas de l' α -modèle nous avons une multiplicité 2, C/α a pour sous-multiplicité 1 et l'unique codimension C , $-C/\alpha$ a une sous-multiplicité 2: une première codimension nulle (l'espace entier) et une seconde C ($q_{2,2} = -1$).

Après n étapes, nous avons un générateur γ_n équivalent à γ :

$$\gamma_n = \Gamma_n/n \quad (24)$$

donnant en une étape (de rapport d'échelles λ^n) les mêmes résultats que γ en n étapes (chacune de rapport d'échelles λ). On peut noter que γ_n , contrairement à γ (mais comme Γ_n) ne se décompose pas en valeurs indépendantes sur chacun de ses sous-tourbillons (ceux-ci, correspondant à la n -ième génération de sous-tourbillons de γ , ont donc des interrelations). Bien évidemment, les fonctionnelles caractéristiques (en bases λ^n et λ resp.) $K_{\gamma_n}(f)$ et $K_{\gamma}(f)$ sont identiques, et

$dP(\gamma_n)$ admet une décomposition du type diagonal (éq. 23) comme $dP(\gamma)$, mais avec l'apparition de nouvelles singularités et de codimensions associées $c_{i,j}^{(n)}$ correspondant à des combinaisons linéaires des précédentes. D'autre part, les relations (20) sont conservées pour une étape maintenant non élémentaire (donc pour $\{\varepsilon_n, \gamma_n, \lambda^n\}$ au lieu de $\{\varepsilon, \gamma, \lambda\}$) ce qui justifie pleinement les considérations faites sur le caractère multiple de la loi d'invariance.

Le caractère très singulier du β -modèle est alors évident: la prolifération de nouvelles singularités est interdite par l'ordre $-\infty$ ($\alpha' = 0$) qui "tue" toute singularité naissante (c.-à-d. une succession de $\gamma = C$) et γ_n reste identique à γ (mise à part la présence d'interrelations, déjà notées, entre sous-tourbillons). Dans les autres cas $\gamma = -C/\alpha'$ ($\alpha' \neq 0$) ne fait que "calmer" (temporairement) une singularité naissante ($\gamma_{n-1} > 0$), γ_n et sa probabilité deviennent de plus en plus complexes.

Cependant, du fait de l'identité des deux fonctions génératrices ($K_Y(h)$ et $K_{\gamma_n}(h)$), toutes deux transformées de Laplace des lois de probabilités (de γ et γ_n respectivement en bases λ et λ^n), et que pour n grand la transformation de Laplace se réduit (par l'approximation usuelle du point de selle) à une dualité de Legendre pour les exposants en jeu (c'est-à-dire $c_{i,1}^{(n)}$, le plus important des $c_{i,j}^{(n)}$, et $K_{\gamma_n}(h)$), alors $c(\gamma)$ défini comme transformée de Legendre de $K_Y(h)$:

$$\begin{aligned} c(\gamma) &= \max_h [\gamma h - K_Y(h)] \\ K_Y(h) &= \max_{\gamma} [\gamma h - c(\gamma)] \end{aligned} \quad (25)$$

correspondra à la limite des $c_{i,1}^{(n)}$, n tendant vers l'infini, et est convexe comme $K_Y(h)$.

Les propriétés précédentes sont valables pour des distributions en multiplicité et sous-multiplicités continues (γ_i et j continus dans l'éq. (23), et l'intégrale double au lieu d'une double sommation) puisqu'elles résultent directement du simple fait que les moments ne sont que les transformées de Laplace de la (première) fonction caractéristique (d'où la transformation de Legendre pour les exposants,

c.-à-d.: seconde fonction caractéristique et $c(\gamma)$). La distribution continue en multiplicité correspond à l'un des postulats de Frisch et Parisi [14], mais il est aisé de vérifier que la sous-multiplicité (omise dans [14]) est indispensable pour assurer la normalisation de la probabilité ($\int dP = 1$). L'apparition des $c_{i,j}^{(n)}$ ($j \neq 1$) correspond à des sous-codimensions, autrement dit dP fait intervenir des mesures "généralisées" de Hausdorff (cf. section 6). Il est important de noter que la transformée de Legendre est mise en défaut dès que $K_\gamma(h)$ (et $c(\gamma)$) est linéaire, ce qui correspond à des divergences de moments (et à une chute algébrique pour la loi de distribution, dite alors hyperbolique) escomptées pour les flux "habillés". De façon plus générale, on peut déjà noter l'intérêt que représentent les processus multiplicatifs pour éviter des postulats, par exemple: postulat de convexité de $c(\gamma)$ dans [14] d'un "objet" assez complexe, ici la convexité résulte de celle (nécessaire) de la seconde fonction génératrice du générateur du processus, et nous aurons une définition précise de l'objet à considérer (la limite du processus). Nous n'avons pas non plus de raison de vouloir borner les valeurs de $c(\gamma)$, comme postulé dans [14, 15], bien que ce soit le cas dans l' α -modèle. Il nous faut évidemment sortir du cadre étiqué des processus discrétisés sur une grille rigide pour mettre en valeur des générateurs ayant des propriétés d'invariance ($\gamma_n = \gamma$) ou d'universalité.

5. Processus multiplicatifs continus

Ils correspondent à la définition de la densité ε_λ du flux jusqu'à une échelle d'homogénéité $\ell = \ell_0/\lambda$ pour n'importe quel $\lambda > 1$ (et non plus, comme précédemment, pour seulement les différentes puissances du pas élémentaire de cascade) satisfaisant la propriété — maintenant continue — de modulation de la fraction du flux d'énergie transmise ou la propriété de (semi-) groupe d'invariance d'échelle:

$$\varepsilon_{\lambda\lambda'} = \{T_{\lambda'}(\varepsilon_\lambda)\}\varepsilon_\lambda \quad (26)$$

$T_{\lambda'}$, étant la contraction de rapport λ'^{-1} . Nous avons toujours la propriété de (semi-) groupe additif pour les incréments exponentiels (non élémentaires) Γ_λ :

additif pour les incréments exponentiels (non élémentaires) Γ_λ :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda\lambda} &= T_\lambda (\Gamma_\lambda) + \Gamma_\lambda \\ \varepsilon_\lambda &= e^{\Gamma_\lambda} / \langle e^{\Gamma_\lambda} \rangle.\end{aligned}\quad (27)$$

Nous considérons ε_λ et Γ_λ comme des bruits de nombre d'onde maximal λ/ℓ_0 , ce qui correspond à une définition de l'échelle d'homogénéité ℓ_n comme longueur d'onde minimale des bruits présents (plus généralement, celle des bruits non négligeables). Il est donc plus aisé d'étudier le générateur infinitésimal γ dans l'espace de Fourier, en notant par un astérisque les quantités définies sur l'espace de Fourier ($\underline{k}$ étant un vecteur d'onde, k le nombre d'onde = $|\underline{k}|$):

$$\Gamma_\lambda^*(\underline{k}) = \gamma^*(\underline{k}) \mathbb{I}_{S_\lambda}^*(\underline{k}) \quad (28)$$

$\mathbb{I}_{S_\lambda}^*$ indiquant la fonction indicatrice du volume (S_λ) délimité par les sphères de rayons 1 et λ dans l'espace de Fourier ($\mathbb{I}_{S_\lambda}^*(\underline{k}) = 1$ si $1 \leq k \leq \lambda$, 0 sinon). On remarque que les fonctionnelles caractéristiques K et K^* de Γ_λ et Γ_λ^* doivent satisfaire:

$$K_{\Gamma_\lambda}(h\delta_\lambda) = K_{\Gamma_\lambda^*}^*(h\mathbb{I}_{S_\lambda}^*) = \log \lambda K(h) \quad (29)$$

du fait de la transformation par Fourier de δ en l'unité. Cette divergence logarithmique de la fonction caractéristique correspond en fait à un "bruit en $1/f$ ".

Définissons de façon générale le spectre $E_{\Gamma_\lambda^*}$ de Γ_λ^* par:

$$K_{\Gamma_\lambda^*}^*(\mathbb{I}_{S_\lambda}^*) = \int_1^\lambda E_{\Gamma_\lambda^*}(k) dk \quad (30)$$

en vérifiant que cette définition correspond à celle usuelle du spectre d'un bruit gaussien et se généralise bien aux bruits de Lévy. Soit en effet $\gamma_\alpha^*(k)$ un bruit blanc gaussien ($\alpha = 2$), ou de Lévy-stable d'indice α ($1 < \alpha < 2$ — nous utilisons le traditionnel indice α pour de telles lois — qui ne doit pas être confondue avec l' α , tout à fait différent, utilisé dans l' α -modèle), et en le supposant "unitaire" (et symétrique) dans le sens que sa fonctionnelle caractéristique est:

$$K_{\gamma_{\alpha}}^*(f^*) = K^{(\alpha)}(f) = \|f^*\|_{\alpha}^{\alpha}; \quad (31)$$

$$\|f^*\|_{\alpha} = \left\{ \int f^*(\underline{k})^{\alpha} d\underline{k} \right\}^{1/\alpha}$$

donc la puissance α de la norme α de la fonction test f^* . En prenant:

$$\Gamma_{\lambda}^*(\underline{k}) = f^*(\underline{k}) \gamma_{\alpha}^*(\underline{k}) \mathbf{1}_{S_{\lambda}}^*(\underline{k}), \quad (32)$$

on obtient:

$$\begin{aligned} K_{\Gamma_{\lambda}^*}^*(f^*) &= \|\mathbf{1}_{S_{\lambda}}^* f^*\|_{\alpha}^{\alpha}; \\ E_{\Gamma^* \lambda}(k) &= \int_{\partial S_k} |f^*(\underline{k})|^{\alpha} d^{d-1} \underline{k} \end{aligned} \quad (33)$$

∂S_k étant la frontière de la sphère de rayon k , ce qui correspond bien à la définition usuelle du spectre dans le cas gaussien et son extension naturelle pour les bruits de Lévy.

Ainsi pour obtenir une divergence logarithmique (en λ) des K et K^* , le spectre (généralisé) doit être en k^{-1} (des bruits de ce type sont souvent appelés "bruits $1/f$ "), ce qui s'obtient simplement par (éqs 32-33):

$$f^*(\underline{k}) = (Ck^{-d}/(\alpha-1))^{1/\alpha} \quad (34)$$

correspondant à une intégration de type fractionnaire sur le bruit blanc γ_{α} . La Figure 2 montre un exemple d'une telle cascade continue simulée par ordinateur (se reporter à [11] pour plus de détails). Nous obtenons comme fonction-codimension $C(h)$:

$$C^{(\alpha)}(h) = C(h^{\alpha}-h)/[(h-1)(\alpha-1)]; \quad C^{(\alpha)}(1) = C \quad (35)$$

et du fait que h^{α}/α et $\gamma^{\alpha'}/\alpha'$ ($1/\alpha + 1/\alpha' = 1$) sont duales pour la transformation de Legendre, la fonction codimension des singularités $c(\gamma)$ pour γ le générateur non normalisé:

$$c^{(\alpha)}(\gamma) = (\alpha' C)^{-\alpha'/\alpha} \gamma^{\alpha'/\alpha}, \quad (36)$$

celle du générateur normalisé γ' s'obtient par translation ($\gamma' = \gamma - C \alpha'/\alpha$).

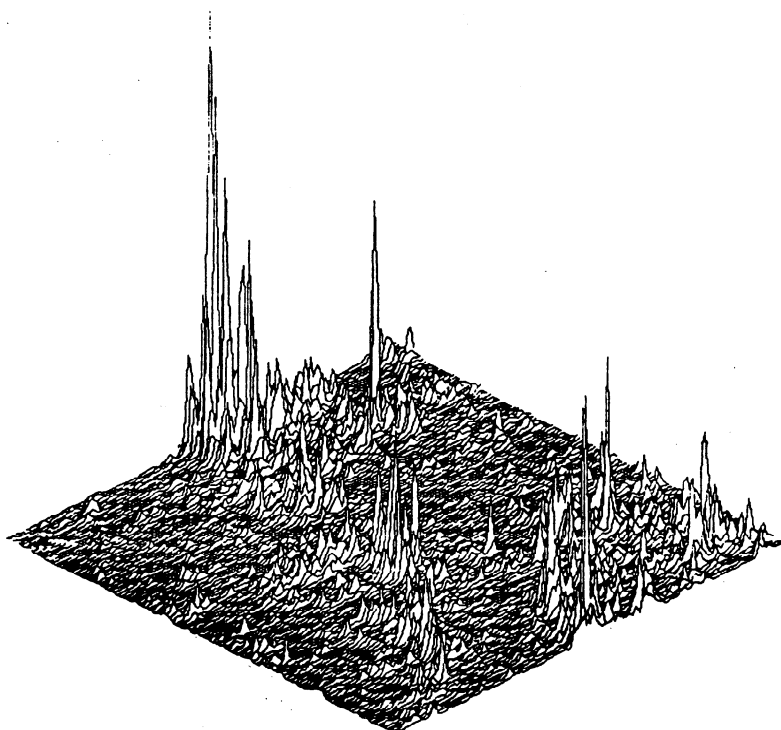


Figure 2

Un exemple de processus multiplicatif sur un réseau 128^2 . Les pics correspondent aux singularités.

Dans le cas gaussien, nous obtenons deux paraboles pour $K(h)$ et $c(\gamma)$ ($C(h)$ est linéaire). Du fait des propriétés d'attractivité, pour les sommations d'incrémentes élémentaires, des bruits de Gauss ou de Lévy (par ex. [22]), nous avons obtenu des générateurs infinitésimaux (bruits en $1/f$ de ces types) ayant des propriétés d'universalité. Plus précisément [11], les bruits blancs de ces différents types (Gauss et Lévy) représentent les "sous-générateurs" universels, les générateurs (les bruits en $1/f$ correspondants) étant obtenus par intégration fractionnaire à partir d'eux. Néanmoins certains modèles pathologiques échappent à cette attraction: c'est en particulier le cas du (très pathologique) β -modèle (qui fait intervenir des valeurs infinies pour "tuer" les singularités). Nous pouvons remarquer que l'analyse mathématique de tels processus continus n'a été menée que dans le cas gaussien [23], et qu'il serait particulièrement intéressant d'étudier à ce niveau le cas de Lévy soit par génération dans l'espace de Fourier (comme proposé dans cet article),

soit dans l'espace physique, en notant qu'il n'y a pas a priori équivalence, contrairement au cas gaussien, entre ces deux types de démarches (espace Fourier/espace physique). Une analyse en "ondelettes" [24], question partiellement reliée à la précédente, pourrait être aussi très pertinente (en notant que l'analyse faite dans [25] en "paquets d'ondes intermittents" s'y rattache).

6. Limites singulières des processus multiplicatifs

Des suites divergentes de densités (nues) du flux d'énergie $\epsilon_n(x)$ (ou $\epsilon_\lambda(x)$) sont générées par les valeurs positives de Γ'_n (resp. Γ'_λ), les générateurs normalisés non élémentaires. La figure 2 indique clairement que, après quelques itérations, la plupart de l'espace devient inactif, alors que des régions, de plus en plus rares, deviennent de plus en plus actives pour assurer la conservation du flux. De façon plus précise: pour tout point x , $\epsilon_n(x)$ tend vers 0 presque sûrement (excepté le cas homogène), sinon tous les moments divergeraient. Ainsi dans le β -modèle, la probabilité de survie tend vers 0 comme λ^{-nC} . Plus généralement, la probabilité qu'un point x soit le lieu d'une singularité d'ordre γ (> 0) tend vers 0 comme $\lambda^{-nC(\gamma)}$. Il est important de noter que cette convergence vers 0 est bien plus faible que celle du cas dégénéré: $\epsilon_n(x)$ tend vers 0 presque sûrement pour tout point x . La limite ϵ d'un processus multiplicatif (exceptés les cas homogène et dégénéré) est donc très singulière et ne peut correspondre à une densité au sens des fonctions, mais l'on peut, au contraire escompter que les flux, pris sur différents ensembles convergent bien du fait de la conservation du flux d'énergie. C'est ce que nous assure justement la propriété de martingale (qui en découle, section 3) grâce au théorème de Doob (par ex. [22, 26]) qui assure une convergence presque sûre pour ce type de variable aléatoire:

$$\Pi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(A) \quad \text{p.s.} \quad (\Pi_n(A) = \int_A \epsilon_n dm). \quad (37)$$

Il s'en déduit implicitement une limite ϵ , pour les densités, dans un sens faible (voir discussion mathématique dans [23, 27]: ϵ est considéré comme limite d'opérateurs linéaires opérant sur des mesures, ce que sont les ϵ_n par rapport aux

différentes mesures m caractérisant les "volumes" de différents ensembles:

$$\varepsilon_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^m. \quad (38)$$

On peut désigner par "faiblement mesurable" ce type de convergence, ou toute propriété associée. Dans ce qui suit, on se restreindra à des ensembles mesurables par des mesures de Hausdorff, en rappelant la règle de simple divergence de ces mesures (que nous noterons $\int d^D x$ pour souligner l'extension qu'elle représente par rapport à la mesure de Lebesgue à laquelle elle se réduit pour $D = d$, d entier):

$$\int_A d^D x = \infty \text{ pour } D < D(A); \quad \int_A d^D x = 0 \text{ pour } D > D(A) \quad (39)$$

la valeur critique $D(A)$ étant précisément la dimension de Hausdorff de l'ensemble A (généralisant la règle: "la longueur d'une surface est infinie, le volume d'une courbe est nulle"). Rappelons que la mesure de Hausdorff généralise aussi la propriété d'auto-similitude de celle de Lebesgue, c'est-à-dire:

$$\int_{A_\lambda} d^D x = \lambda^{-D(A)} \int_A d^D x; \quad A_\lambda = T_\lambda(A) \quad (40)$$

T_λ étant une contraction de rapport λ . Ajoutons que la famille des mesures de Hausdorff peut être généralisée (en introduisant des sous-dimensions en plus des dimensions) pour que tout ensemble A (compact) ait bien une mesure finie et non nulle. Mais la propriété d'auto-similitude est alors plus faible: $\lambda^{-D(A)}$ est alors facteur (dans l'éq. 40) d'une fonction faiblement variable avec λ : les sous-dimensions correspondent alors au développement du logarithme de cette fonction en itérées de logarithme de λ . Comme déjà noté (Section 4), la loi de probabilité semble nécessiter un tel traitement.

Nous pouvons a priori tenter le même type de définition pour les différentes puissances de ε , c'est-à-dire par convergence faiblement mesurable:

$$\varepsilon_m^h = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^h \quad (41)$$

m appartenant à la même famille de mesures (dans notre cas: celles d'Hausdorff).

Comme les puissances ϵ^h ($h > 1$) de plus en plus élevées renforcent les singularités (à l'inverse, pour $h < 1$, elles les affaiblissent), ce type de convergence sera lui-même de plus en plus difficile à assurer (nous n'avons évidemment pas l'équivalent de conservation du flux pour $h \neq 1$). D'autre part, les moments du flux correspondent à des puissances d'intégrales, donc pour h entier et différent de 1, il s'agit de tester la $h^{\text{ième}}$ puissance tensorielle de la mesure $\epsilon^{D(A)}_x$ (ou $d\Pi^{D(A)}$, le flux "élémentaire" correspondant à la dimension $D(A)$) sur A . Pour relier ces deux aspects (puissance de la densité du flux, en un même point, et puissance du flux, faisant intervenir des produits de sa densité en des points distincts), nous définissons de façon générale (h non entier) la trace de la puissance h du flux sur A par (les boules $B_{m,j}$ formant un recouvrement de A , chacune de taille $\ell_m = \ell_0/\lambda^n$, plus faible que ℓ_n):

$$\text{tr}_A \Pi^h = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\substack{U_{m,j} \\ m \geq n}} \inf_{\{B_{m,j}\} \supset A} \sum_{B_{m,j}} \sup_{B_{m,j}} [\epsilon_m(x)^h] \ell_m^{hD(A)} \quad (42)$$

c'est-à-dire: nous mesurons le flux élémentaire (à la puissance h) avec la même résolution que celle du recouvrement). Il est utile de noter que cette définition correspond à celle d'une mesure de Hausdorff à partir de propriétés mesurables et non métriques, comme il est fait usuellement (ce type de définition sera discutée plus longuement à la section 7), et surtout qu'elle se réduit à la mesure de Hausdorff de dimension $hD(A)$ pour le cas homogène ($\epsilon_n = 1_A$), ce qui confirme la possibilité d'écrire:

$$\text{tr}_A \Pi^h = \int_A \epsilon_d^{hD(A)} x. \quad (43)$$

On peut noter une "approximation" (utile à défaut d'être rigoureuse) à l'équation (42) en définissant des traces (de flux) à la résolution ℓ_n

$$\text{tr}_{A_n} \Pi_n^h = \int_{A_n} \epsilon_n^{hD(A)} x \quad (44)$$

avec A_n signifiant " A avec une résolution ℓ_n ": on ne considère que des recouvrements de A par des boules $(B_{n,j})$ de même résolution (ℓ_n) que le flux nu

(ou sa densité) considéré, pour ne pas descendre en-dessous de sa longueur d'homogénéité (sinon nous obtiendrions la simple divergence de la mesure de Hausdorff, tenant compte de l'homogénéité des échelles plus petites), soit:

$$\text{tr}_{A_n} \Pi_n^h = \ell_n^{hD(A)} \inf_{U_j \{B_{n,j}\} \supset A} \sum_{B_{n,j}} \sup_{B_{n,j}} (\epsilon_n^h(x)) \quad (45)$$

et l'on peut considérer sa limite quand l'échelle d'homogénéité tend vers 0:

$$\text{tr}_A^* \Pi^h = \lim_{n \rightarrow \infty} [\text{tr}_{A_n} \Pi_n^h]. \quad (46)$$

On définit naturellement les moments-trace (dénotés avec des T majuscules) comme étant les quantités correspondantes obtenues par moyenne d'ensemble (notée $\langle . \rangle$), c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A \Pi^h &= \langle \text{tr}_A \Pi^h \rangle \\ \text{Tr}_{A_n} \Pi_n^h &= \langle \text{tr}_{A_n} \Pi_n^h \rangle \\ \text{Tr}_A^* \Pi^h &= \langle \text{tr}_A^* \Pi^h \rangle \end{aligned} \quad (47)$$

et $\text{Tr}_A \Pi$ correspond au flux moyen sur A ($\langle \Pi(A) \rangle$). D'autre part, nous pouvons escompter quelques divergences logarithmiques de $\text{Tr}_A^* \Pi^h$ par rapport à $\text{Tr}_A \Pi^h$ du fait de mêmes constats pour des procédures de ce type (troncature dans la mesure de Hausdorff, puis passage à la limite d'échelle d'homogénéité nulle) sur de nombreux problèmes [28].

Du fait de la loi d'invariance multiple d'échelle, nous avons:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{A_n} \Pi_n^h &\sim \left\langle \sum_A \epsilon_n^h \ell_n^{hD(A)} \right\rangle \\ &\sim \langle \epsilon_n^h \rangle \ell_n^{(h-1)D(A)} = \ell_n^{(h-1)(D(A)-C(h))} \end{aligned} \quad (48)$$

ce qui indique une divergence double pour $\text{Tr}_A^* \Pi^h$ (cf. Fig. 3) déterminée par les deux zéros de la fonction convexe $(h-1)(D(A)-C(h))$. Plus fondamentalement l'invariance d'échelle multiple ne fait que modifier la dimension de l'intégral aussi:

$$\text{Tr}_A \Pi^h \sim \int_A d^{D(A)+(h-1)(D(A)-C(h))} x \quad (49)$$

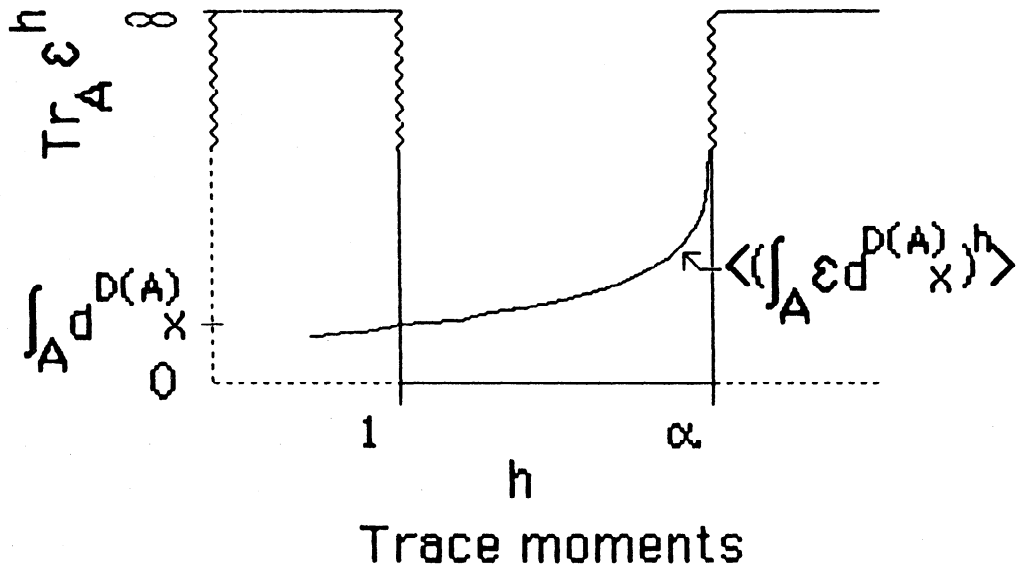


Figure 3

Le schéma des moments tracés en fonction de h , pour un processus de cascade non dégénérée, quand le flux dans une région A est intégré sur une dimension $D = D(A)$. La fonction croissante indiquée représente un moment de flux habillé, et sa divergence quand $h = \alpha$.

la double divergence sus-mentionnée résulte alors directement de la règle de divergence de la mesure de Hausdorff (éq. 39). Comme la fonction $(\sum_i x_i^h)^{1/h}$ est décroissante avec h , nous avons d'autre part la relation suivante entre les moments-trace et les moments du flux d'énergie ($\text{tr}_A \Pi = \Pi(A)$):

$$\underline{h} \geq \underline{1}: \quad \text{Tr}_A \Pi^h \leq \langle \Pi(A)^h \rangle \leq \text{Tr}_A \Pi^h + R_A(h) \quad (50)$$

$$\underline{h} \leq \underline{1}: \quad \text{Tr}_A \Pi \geq \langle \Pi(A)^h \rangle \quad (51)$$

où $R_A(h)$ est un reste qui ne fait intervenir qu'une somme (finie) sur des moments d'ordre inférieurs (dont l'ordre est déterminé par la partie entière de h , quand celui-ci n'est pas entier). On peut noter que les inégalités de même type sont valables non seulement pour les différents moments-trace, mais aussi pour les traces elles-mêmes (exceptée celle qui fait intervenir le reste $R_A(h)$ dans (50)).

Finalement, de la double divergence des moments-trace et des inégalités précédentes, il résulte que (la figure 3 schématise ce résultat):

- une divergence d'ordre bas ($h < 1$) des moments-trace est nécessaire pour éviter la dégénérescence du flux ($h < 1$: $\langle \Pi(A)^h \rangle = 0$, et même $\Pi(A) = 0$ p.s.): $D(A) > C(1)$.
- les divergences d'ordre élevé ($h > 1$) des moments-trace sont équivalentes à celles des moments statistiques usuels (aux mêmes ordres). Celles-ci interviennent sur les ensembles A et les moments d'ordre h tels que $C(h) > D(A)$.

On peut noter que du fait des divergences logarithmiques précédemment notées (entre $\text{Tr}_A^* \Pi$ et le flux moyen) les inégalités entre $D(A)$ et $C(h)$ sont à prendre au sens large. Ce dernier point correspond d'ailleurs aux résultats mathématiques établis pour un générateur gaussien dans [23].

On remarque que le dernier type de divergence des moments-trace ($h > 1$) intervient toujours pour des ensembles assez épars dès que $C(h) \nrightarrow \text{Cte}$, c.-à-d. avec la seule exception du β -modèle. Cependant dès que $C(h)$ est borné par un $C_\infty < d$ (la dimension de l'espace sur lequel se développe la cascade), il existe alors aussi des ensembles sur lesquels tous les moments du flux sont finis ($D(A) > C_\infty$). On peut d'abord noter que dans le cas de l' α -modèle, C_∞ ($= C$, dans les notations de la section 3) n'est pas nécessairement inférieur à d , et surtout que les modèles continus mènent à des $C(h)$ non bornés. Cette divergence permet de définir un ordre critique $\alpha(A)$ (fini ou non) pour chaque ensemble A : les moments au-dessus de cet ordre divergent.

Ces divergences ont une interprétation géométrique simple avec ledit "théorème d'intersection" ($C(A \cap S_h) = C(A) + C(S_h)$, $C(\cdot)$ indiquant la codimension d'un ensemble): quand une divergence intervient, c'est que A intersecte trop peu l'essentiel (S_h) des contributions au moment-trace d'ordre h (si l'on interprète la fonction $C(h)$ comme égale à $C(S_h)$) pour pouvoir "lisser" ces contributions, elles y restent singulières. Par le biais de la relation de Legendre, l'ordre de ces singularités est précisé (c.-à-d.: $\gamma(A) = \gamma(h)$, pour $h = \alpha(A)$), et quand A est assez grand pour lisser toutes singularités présentes ($D(A) > C_\infty$) — c.-à-d. les intersecter "largement" — il n'y a plus de divergence statistique.

Enfin, on peut remarquer que le "théorème d'intersection" se généralise au cas où A n'est plus un ensemble de points géométriques, mais correspond à une densité d'observations ("réseau multifractal").

7. Processus anisotropes (compression et réduction)

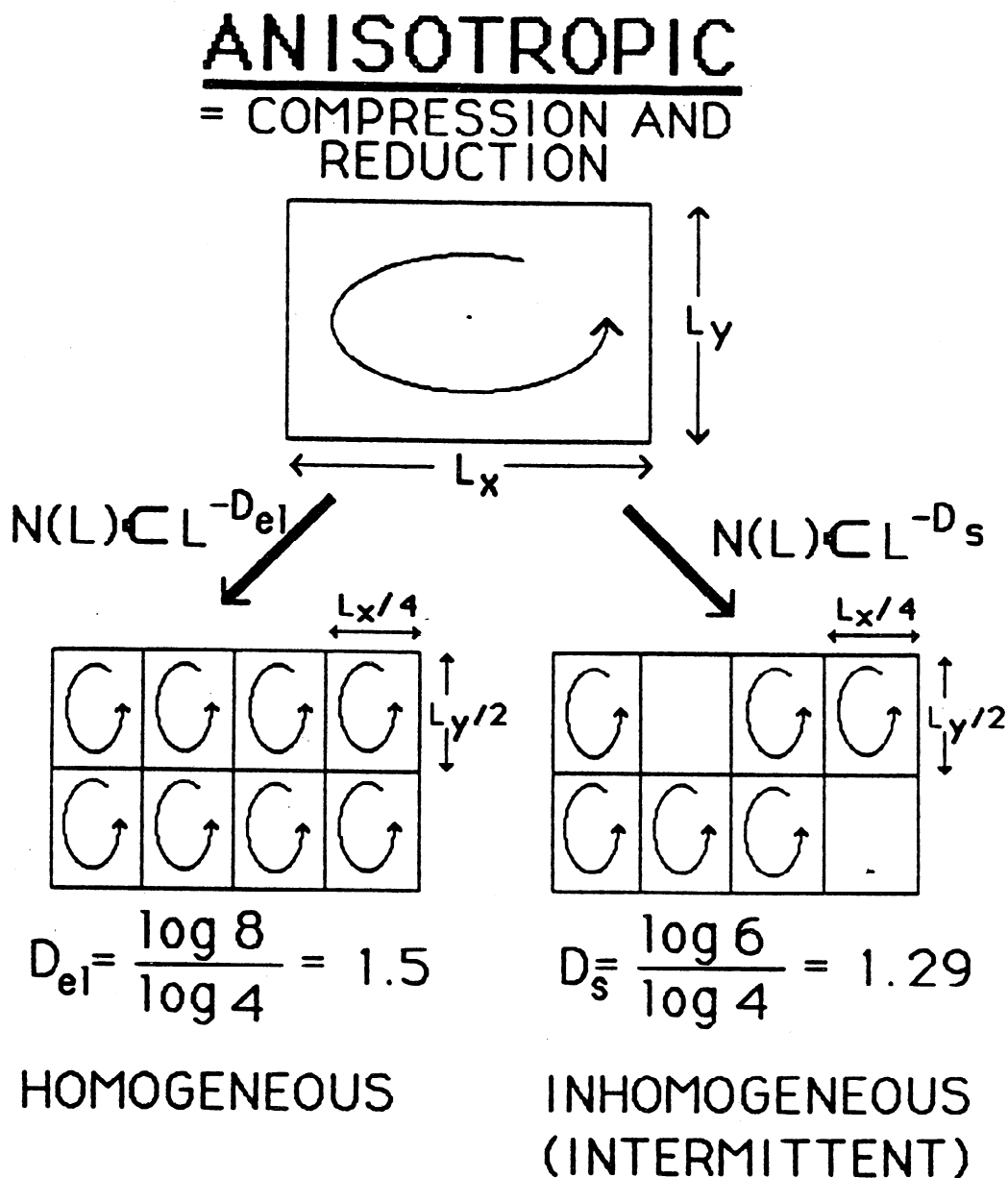


Fig. 4A

Le cas homogène

Fig. 4B

Le cas inhomogène

Figure 4

Schéma d'un pas d'une cascade anisotrope

La figure 4 donne un exemple de distribution anisotrope du flux dans le cas du β -modèle: les "sous-tourbillons", sur lesquels est distribuée l'activité de la turbulence, sont maintenant des rectangles auto-affins. Plus généralement, on peut rechercher des contractions du type:

$$T_\lambda = \lambda^{-G} = \exp(-G \log \lambda) \quad (52)$$

G étant une transformation linéaire ($G = 1$, dans le cas isotrope) non nécessairement diagonale (ou même diagonalisable). La conséquence de ce genre de transformation est évidemment que les sous-espaces de même dimension topologique ne sont plus nécessairement équivalents pour la distribution des singularités (dans le cas de la figure 4, l'horizontale n'est plus équivalente à la verticale. Nous commençons à généraliser au cas anisotrope les notions de mesures de Hausdorff et les dimensions associées.

Dans le cas isotrope, nous avons trois éléments essentiels:

- une sphère unité S_1 ,
- une transformation d'échelle, qui n'est autre que le groupe des contractions, $T_\lambda = \lambda^{-1}$ (λ étant le rapport d'échelle de la contraction) et qui définit la famille des boules fondamentales (les sphères auto-similaires): $S_\lambda = \lambda^{-1} S_1$,
- la notion d'échelle ϕ (le rayon de la sphère S_λ) qui s'en déduit: $\phi(S_\lambda) = \lambda^{-1} \phi(S_1) = \lambda^{-1}$.

L'extension de la notion d'échelle doit se faire à partir de ces mêmes éléments, en particulier $T_\lambda = \lambda^{-G}$, mais $G \neq 1$ (voir figures 5a, 5b, 5c, 5d pour divers exemples). Nous noterons par ϕ_{el} la notion d'échelle associée (nous utilisons le suffixe "el" pour elliptique, car, dans le cas linéaire et anisotrope, les boules fondamentales ($E_\lambda = T_\lambda S_1$), sur lesquelles l'activité de la turbulence sera distribuée, seront typiquement des ellipsoïdes auto-affines et non des sphères auto-similaires). Nous sommes donc amenés à étudier quelles sont les conditions que doivent satisfaire le générateur G (d'un groupe multiplicatif T_λ) pour que les boules fondamentales E_λ :

$$E_\lambda = \Gamma_\lambda S_1 \quad (53)$$

et ϕ_{e1} définie par:

$$\phi_{e1}(E_\lambda) = \lambda^{-1} \phi_{e1}(S_1) \quad (\phi_{e1}(S_1) = \phi(S_1)) \quad (54)$$

satisfassent quelques propriétés minimales, pour que ϕ_{e1} puisse effectivement être considérée comme correspondant à une notion (généralisée) d'échelle. La plus évidente semble être que les E_λ devraient se "contracter" effectivement avec λ croissant. Cette contraction peut être exigée soit au sens de l'inclusion d'ensemble [6], soit au sens de certaines propriétés mesurables [29]. Comme nous nous intéressons à ce dernier type de propriétés, cette option est la plus séduisante.

Etudions donc comment l'on passe du triplet isotrope $\{S_1, 1, \phi\}$, avec $\phi(S_\lambda) = (\int_{S_\lambda} d^d x)^{1/d}$, au triplet anisotrope $\{S_1, \mathbb{G}, \phi_{e1}\}$. Désignons par $\sigma(\mathbb{G})$ le spectre (généralisé) de $\mathbb{G}$ (plus précisément de son extension sur le complexifié $C \times R^d$):

$$\sigma'(\mathbb{G}) = \{\mu_j^! \in C \mid \mathbb{G} - \mu_j^! \mathbf{1} \text{ non inversible sur } C \times R^d\} \quad (55)$$

avec les sous-espaces propres (généralisés) associés $E_j^!$. En revenant à R^d , les sous-espaces associés seront obtenus en regroupant les valeurs propres conjuguées ($E_j = \text{Re}(E_j^!)$), et l'on note par:

$$d_{e1,j} = \text{Trace}(\mathbb{G}_{E_j^!}) = d_j \text{Re}(\mu_j^!) \quad (56)$$

la trace de la restriction de $\mathbb{G}$ sur E_j (d_j étant la dimension (topologique) de ce sous-espace, de $E_j^!$ ou de son conjugué). En remarquant que les restrictions ϕ_j , $\phi_{e1,j}$, $E_{\lambda,j}$ à l'espace E_j de ϕ , ϕ_{e1} , E_λ respectent:

$$\begin{aligned} \phi_{e1,j}^d(E_{\lambda,j}) &= \phi_j^d(E_{\lambda,j}) \\ &= \lambda^{-d_{e1,j}} \phi_j^d(S_{1,j}) = \lambda^{-d_{e1,j}} \phi_{e1,j}^d(S_{1,j}) \end{aligned} \quad (57)$$

On conclut que les E_λ se contractent (au sens de ϕ_{e1} comme de ϕ) sur chacun des sous-espaces propres (généralisés) E_j si et seulement si pour tout j :

$$d_{e1,j} > 0 \quad (58)$$

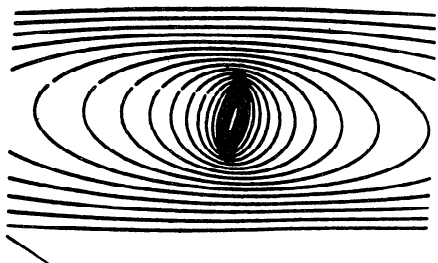


Fig. 5A

La forme des tourbillons moyens (les boules E_λ) dans le cas linéaire, avec uniquement un phénomène de stratification.

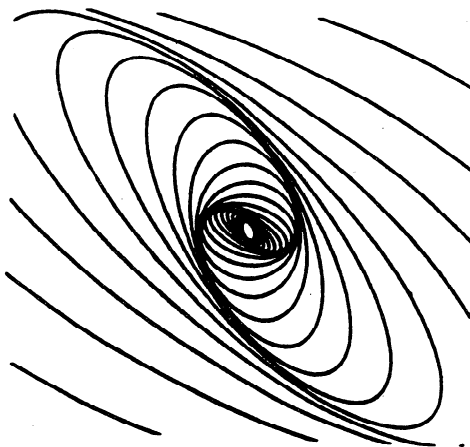


Fig. 5B

Le cas linéaire, mais avec une rotation différentielle (pour modéliser la force de Coriolis).

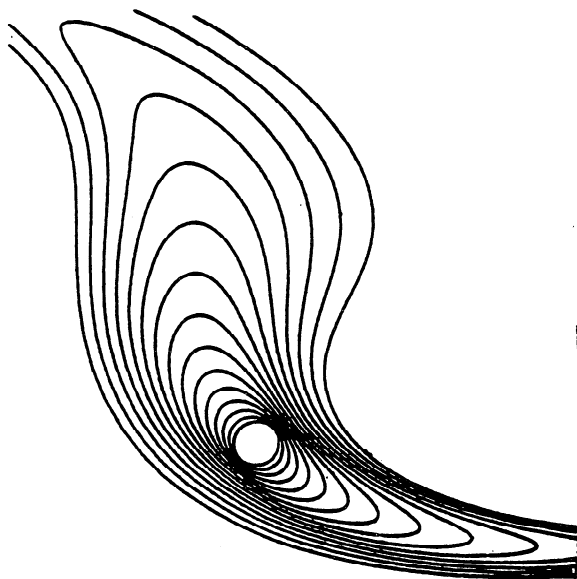


Fig. 5C

Un exemple de boules dans l'invariance d'échelle généralisé non linéaire, modélisant une variation du paramètre de Coriolis.

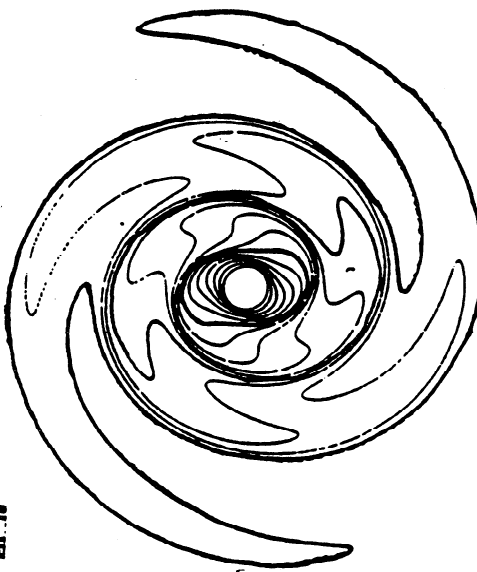


Fig. 5D

Un autre cas non linéaire, qui peut être perçu comme un "cyclone" invariant d'échelle.

soit encore:

$$\inf[\operatorname{Re}(\sigma'(G))] \geq 0 \quad (59)$$

enfin, particulièrement du fait de l'éq. (57), il est clair que sur tout sous-espace F (réunion de sous-espaces propres E_j), la trace de la restriction de $\mathbb{G}$ ($\mathbb{G}_F$):

$$d_{el,F} = \operatorname{Trace}(\mathbb{G}_F) = \sum_j d_{el,j}; \quad F = \bigcup_j E_j \quad (60)$$

jouera le rôle de dimension effective de cet espace que nous appellerons "dimension elliptique de l'espace F " (en général différente de sa dimension topologique (d_F)). Les restrictions de ϕ_{el} et E_λ , sur F se factorisent alors (d'une façon similaire à ϕ et S_λ):

$$\begin{aligned} \phi_{el,F}^{d_{el,F}}(E_{\lambda,F}) &= \prod_j \phi_{el,j}^{d_{el,j}}(E_{\lambda,j}) = \phi_F^{d_F}(E_{\lambda,F}) \\ &= \lambda^{-d_{el,F}} \phi_F^{d_F}(S_{1,F}) = \lambda^{-d_{el,F}} \phi_{el,F}^{d_{el,F}}(S_{1,F}). \end{aligned} \quad (61)$$

Nous pouvons définir très simplement les mesures anisotropes de Hausdorff de dimension elliptique $D_{el,F}$ ($\leq d_F$) pour un ensemble (compact) A inclus dans le sous-espace F (éventuellement égal à $\mathbb{R}^d$) comme:

$$\int_A d^{D_{el,F}} x = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\substack{UE_{i,F} \supset A \\ \delta_i < \delta}} \sum_i \delta_i^{D_{el,F}}; \quad \delta_i = \phi_{el,F}(E_{i,F}) \quad (62)$$

Il est évidemment important de trouver une relation assez générale entre mesures isotropes et anisotropes. Celle-ci est obtenue en remarquant la similitude entre $\int_A d^{D_{el,F}} x$ et $\int_A d^D x$ pour $D = (d_F/d_{el,F}) D_{el,F}$ du fait que $\phi_{el,F}^{D_{el,F}}(T_\lambda S_1) = \phi^D(T_\lambda S_1)$ (cf. éq. (61)), mais dans le premier cas ce sont des recouvrements de A , contenus dans F , par des ellipsoïdes (E_F) et non par des sphères (S_F). Cependant si A n'est pas trop pathologique, nous pouvons supposer qu'à un recouvrement presque optimal d'ellipsoïdes correspond un recouvrement du même type par des sphères, se déduisant en recouvrant chacun des ellipsoïdes par des sphères (de taille légèrement plus faible). Nous obtenons alors le même type de divergence pour

$\int_A d^{D_{el,F}} x$ et $\int_A d^D x$, d'où la règle (assez générale, mais acceptant de nombreuses exceptions):

$$D(A) = (d_F/d_{el,F}) \cdot D_{el,F}(A) \quad (63)$$

pour A non "pathologique" dans F (par ex.: A doit être non seulement inclus dans F , mais y doit être suffisamment dense, sinon il faudrait prendre en considération un des sous-espace de F possédant une propriété de ce type). Cette règle, qui a l'intérêt d'indiquer une relation entre mesures anisotropes et isotropes, pour des cas simples, est importante pour l'analyse de données (voir plus bas).

L'utilisation directe des notions anisotropes, précédemment développées, est particulièrement utile pour des simulations stochastiques de champs anisotropes: nous n'avons qu'à remplacer les contractions isotropes par des contractions anisotropes et remplacer ensuite les notions de mesures, et dimensions associées, par leur contre parties anisotropes. Ainsi, dans le cas des processus multiplicatifs anisotropes, intervient une fonction codimension (elliptique) $C_{el}(h)$, prescrivant la divergence des moments d'ordre élevé, qui sera la même pour toute restriction du processus sur un sous-espace propre E_i de G , le générateur d'anisotropie, donc admettant pour générateur de singularités γ_{E_i} (la restriction à E_i de γ). Il en sera de même pour toute réunion (F) de sous-espaces propres E_i . Par contre, si nous étudions ce processus dans un cadre anisotrope distinct, de générateur G' , ayant des sous-espaces propres communs E_i avec ceux de G , alors la règle précédente (équ. (63)) indique l'apparition de fonctions codimensions (elliptiques) "apparentes" $C'_{a,i}(h)$ dépendant en général de E_i , contrairement à $C(h)$, puisque:

$$C'_{a,i}(h)/d'_{el,i} = C(h)/d_{el,i} \quad (64)$$

en particulier pour $G' = 1$ (isotropie), nous avons $d'_{el,i} = d_i$, la dimension topologique de E_i , donc une variation régie par le rapport de la dimension topologique sur la dimension elliptique des sous-espaces considérés (de même pour toute réunion de ces sous-espaces). Ce fait souligne tout l'intérêt, que ce soit pour des simulations ou l'analyse de tels processus, à se placer directement dans le cadre ellipti-

que correspondant au générateur d'anisotropie. Le refuser au niveau théorique [30] conduit à n'introduire que d'une façon artificielle les différentes familles de fonctions-codimension "apparentes", sans pouvoir remonter aux fonctions intrinsèques ($C(h)$ et $c(\gamma)$ elliptiques). Toute déviation, par rapport à ce cadre, peut être quantitativement déterminée au niveau expérimental, par des formules du type (64), comme analysé dans la section suivante.

Dans cette section, nous nous sommes limités au cas d'un groupe linéaire de contractions, ceci est insuffisant aux regards des besoins de la géophysique. Cependant, la plupart des notions précédemment développées s'étendent a priori sans difficulté majeure sur les variétés (munies d'une mesure) en utilisant les contractions définies localement et satisfaisant des propriétés de transport (et non plus de translation). Ces contractions définissent alors seulement un semi-groupe. Nous nous contentons dans cet article de donner quelques exemples (Fig. 5) de familles de boules ainsi obtenues, en notant que ces boules ne sont plus convexes même en partant d'une boule unité sphérique. Enfin, on peut noter aussi que la détermination de la sphéro-échelle (quand elle existe, ce qui n'est pas nécessairement le cas) et de ses (possibles) fluctuations seraient du plus haut intérêt pour confronter les analyses du type invariance d'échelle anisotrope aux analyses plus communes (cf. [31] pour revue) de retour à l'isotropie aux petites échelles.

7. Implications expérimentales

Dans cette section, nous donnons quelques exemples des implications au niveau expérimental des notions précédemment développées. Nous le ferons en étudiant la densité de la réflectivité radar de la pluie (Z), tenant compte du fait que ce champ (fortement) intermittent est celui pour lequel nous pouvons disposer le plus facilement de données quadri-dimensionnelles (espace-temps) de très haute qualité. Nous utiliserons précisément les archives de l'Observatoire Radar McGill portant sur deux décades suivant l'horizontale, une sur la verticale, cinq pour le temps, et six en intensité. Ces données sont étudiées (pour chaque temps) sous la forme (r, θ, z) (portée, azimuth, altitude) avec $(200 \times 375 \times 8)$ éléments et seize niveaux

(logarithmiques) d'intensités multiples de 4 dBZ (dont la dernière classe de niveau 60 dBZ = $10^6 \times$ le minimum du signal détectable).

Cette réflectivité représente l'intégration, sur un volume tridimensionnel (de l'ordre de 1 km^3), de la rétro-diffusion des gouttelettes pour la longueur d'onde du radar (10 cm). A cette longueur d'onde, l'atténuation du faisceau est négligeable, et l'approximation de Raleigh excellente: la rétro-diffusion de chaque gouttelette est alors proportionnelle au carré de son volume. Pour souligner l'importance pratique de la réflectivité radar, nous rappelons qu'il est usuel de relier le taux de pluie R (exprimé en mm/heure) à la réflectivité radar Z (en $(\text{mm})^6 \text{ m}^{-3}$) par la formule (semi-empirique) de Marshall et Palmer [32]:

$$Z = 200 R^{1.6} \quad (65)$$

dérivant, sous l'hypothèse d'une distribution exponentielle de la taille des gouttelettes, du fait que R est le produit du volume de celles-ci par leur vitesse de chute.

Nous remarquons tout d'abord que ces données correspondent à des quantités "habillées", puisque résultant d'intégration sur des volumes de taille bien supérieure à l'échelle interne des fluctuations du phénomène (inférieure au mètre);

$$Z_n = \left\{ \int_{B(n)} Z d^{D(A)} x \right\} / \left\{ \int_{B(n)} d^{D(A)} x \right\} \quad (66)$$

où $B(n)$ est un sous-domaine de A (et de même dimension $D(A)$) de taille ℓ_n . C'est en particulier le cas pour ce que mesure directement le radar: B est alors le "volume de la pulsation" du radar, A est l'espace tridimensionnel usuel, ℓ est de l'ordre du kilomètre. Ces quantités mènent donc a priori à des divergences de moments statistiques. Ces divergences elles-mêmes remettent en cause, comme nous allons le voir, la procédure usuelle pour estimer expérimentalement ces moments. La figure 6 présente la loi de distribution des densités de réflectivités observées par le radar, et tend à confirmer ce type de comportement avec un exposant critique α_Z à peine supérieur à 1 (c'est-à-dire: les moments statistiques d'ordre supérieurs à α_Z divergent). L'estimation expérimentale des moments (ici les moments-trace)

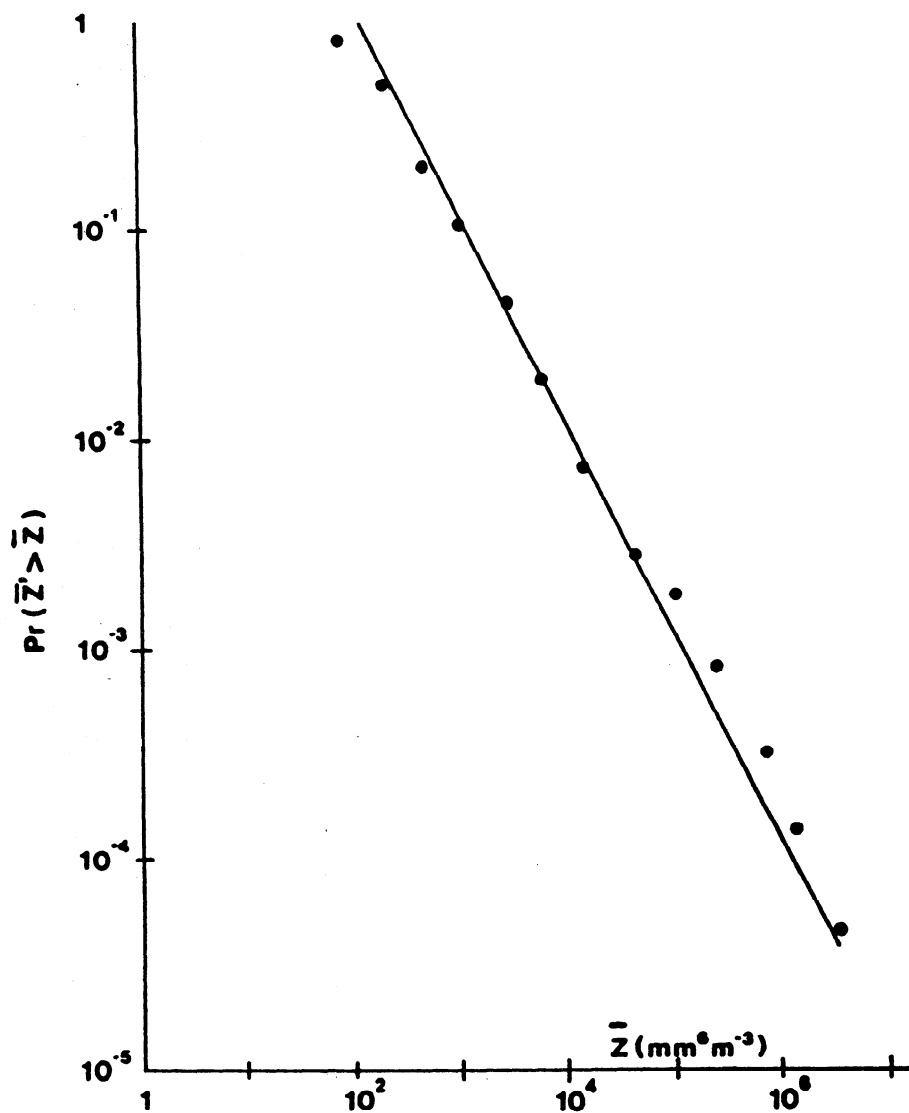


Figure 6

La probabilité $Pr(Z' > Z)$ obtenue par l'analyse de 10 balayages du radar, Z est la réflectivité. La ligne droite a une pente correspondant à $\alpha = 1.06$.

se fait usuellement par application de la loi des grands nombres, c'est-à-dire par moyenne sur un grand nombre (N) de réalisations ($j = 1, N$) à peu près indépendantes (c'est-à-dire des images radars prises à des jours assez distants dans le temps):

$$\text{Tr}_{A_n} Z_n^h = \langle \text{tr}_{A_n} Z_n^h \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \{N^{-1} \sum_{j=1}^N [\text{tr}_{A_n} Z_{n,j}^h]\} \ell_n^{-p(h)} \quad (67)$$

et dans ce cas, on aurait simplement:

$$p(h) = K(h) = (h-1)C(h). \quad (68)$$

La loi des grands nombres souffre effectivement peu d'exceptions: pour qu'elle soit applicable (ce qui correspond à un comportement "ergodique") il faut et il suffit que le moment concerné soit effectivement fini (cf., par ex., [22]). Sinon le terme de droite de l'éq. (67) ne converge plus vers un nombre (le moment statistique) mais, comme discuté dans [16], vers une variable de Lévy dont l'amplitude diverge comme $(\ell_m^{-D(A)} N)^{h/\alpha-1}$, c'est-à-dire, d'une part diverge avec la taille de l'échantillon (N) et d'autre part, conduit à un exposant apparent d'invariance d'échelle:

$$p(h) \sim (D(A)/\alpha)(h-\alpha); \quad h > \alpha. \quad (69)$$

Dans ce cas, la fonction (expérimentale) $C'(h) = p(h)/(h-1)$ ne peut plus être interprétée comme correspondant à $C(h)$, on obtient en particulier une borne aberrante:

$$C'_\infty = D(A)/\alpha. \quad (70)$$

Cette remarque est d'une grande importance pratique, au moins pour deux raisons. Premièrement, si l'on calcule des $C'(h)$ d'une manière similaire à celle que nous venons de décrire — c'est le cas ainsi dans [15] — on peut très bien trouver une borne du type C'_∞ qui ne soit nullement pertinente, masquant à la fois la divergence de moments et le fait que l'on sous-estime le "vrai" C_∞ , ou même que $C(h)$ ne soit pas borné. Deuxièmement, nous pouvons déterminer de façon plus précise le seuil critique $(\alpha(A))$ de divergence statistique sur l'ensemble A en calculant $p(h)$ et en étudiant son comportement asymptotique ($h \gg \alpha(A) > 1$) et en utilisant (70). La figure 7 en donne le comportement ($D(A) = 2$, et un rapport d'échelle global de 128), à partir de 70 images radar. Les asymptotes figurées correspondent à $\alpha = 1.05$ et $\alpha = 1.075$, d'où l'estimation plus précise:

$$\alpha_Z = 1.06 \pm 0.02$$

(71)

ce qui indique que Z est "de justesse", suivant l'horizontale, une "densité" (c'est-à-dire correspond à un processus non dégénéré).

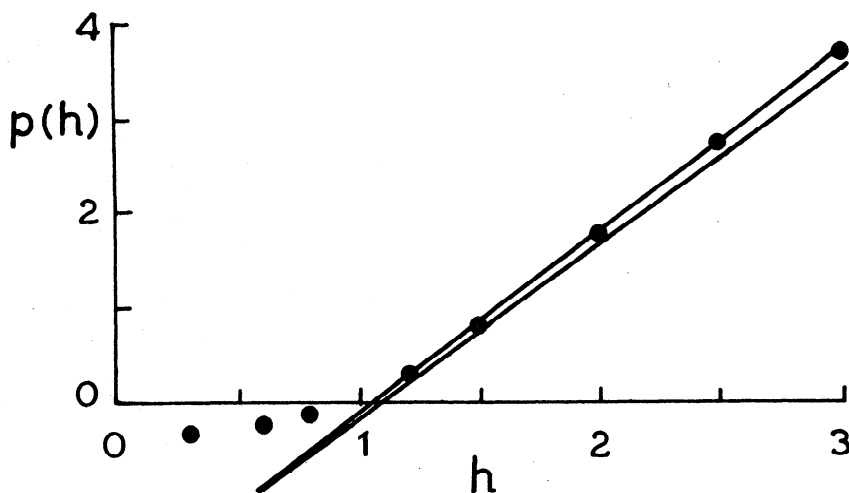


Figure 7A

La fonction $p(h)$ pour les données analysées à la Figure 6.

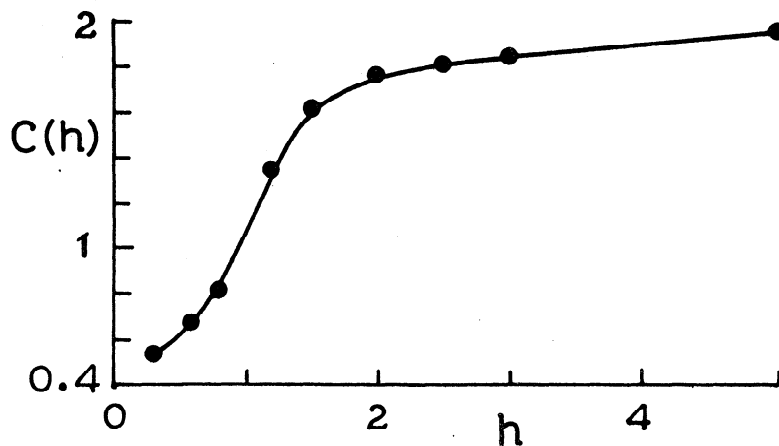


Figure 7B

La fonction de codimension $C(h)$ pour les mêmes données, obtenue par l'équation: $C(h) = p(h)/(h-1)$.

L'estimation des fonctions-codimension $c(\gamma)$ des singularités (γ) posent des problèmes du même ordre, si l'on procède par une estimation indirecte par des transformations de Laplace ou de Legendre à partir des fonctions-codimension $C(h)$. On peut plus simplement recourir à une estimation directe de ces fonctions-codimension, y compris en testant différents types de générateurs d'anisotropie pour déterminer celui qui correspondrait au type de processus multiplicatif menant à la stratification de la pluie (suivant l'horizontale, pour les larges structures) et l'apparition de cellules convectives (orientées suivant la verticale). Soient $c_{m,i}(\gamma_j)$ ces fonctions-codimension — estimées d'une façon que nous préciserons — des singularités $(\gamma_j, j = 1, k)$ pour différents générateurs d'anisotropie G_m (de dimensions elliptiques $d_{el,m,i}$ sur des espaces communs E_i — propres ou réunion d'espaces propres pour ces générateurs — et de dimensions topologiques d_i) correspondant au fait que les réflectivités moyennées spatialement sur des échelles (généralisées) ℓ_n et sur ces espaces soient telles que (cf. éq. (9)):

$$\Pr(Z_{n,i} \geq \ell_n^{-\gamma_j}) \sim \ell_n c_{m,i}(\gamma_j) \quad (72)$$

G_m coïncidera avec le générateur d'anisotropie du processus lui-même (sur les espaces E_i) si les fonctions-codimension $c_{m,i}(\gamma_j)$ sont indépendantes de i . Pour évaluer ces fonctions-codimension, nous pouvons, par exemple, recourir à une version "fonctionnelle" (dépendance en i) et anisotrope (boîtes générées par G , et non auto-similaire) du traditionnel algorithme de "comptage de boîtes", c'est-à-dire estimer que le nombre $N_{m,i,j}(\ell_n)$ de boîtes (de taille ℓ_n) où $Z_{n,i}$ dépasse effectivement le seuil $\ell_n^{-\gamma_j}$, varie comme:

$$N_{m,i,j}(\ell_n) \sim \ell_n^{-D_{el,m,i}(\gamma_j)};$$

$$D_{el,m,i}(\gamma_j) = d_{el,m,i} - c_{m,i}(\gamma_j). \quad (73)$$

Pour étudier le phénomène de stratification de la pluie (sans étudier les éventuelles rotations différentielles) nous pouvons nous restreindre à prendre à considérer des transformations auto-affines, dont les générateurs (G_m) n'ont (dans l'espace tridimensionnel usuel) qu'une seule valeur propre $(u_{3,m})$ différente de 1

(celle suivant la verticale):

$$d_{el,m,2} = d_2 = 2; \quad d_{el,m,3} = 2 + \mu_{3,m}; \quad d_3 = 3 \quad (74)$$

et nous pouvons prendre pour estimateur linéaire (statistique sur les singularités, et éventuellement les réalisations) de $\Delta\mu$ ($= \mu_{3,m} - \mu_3$), l'écart à la valeur propre (verticale) du générateur du processus (μ_3):

$$\begin{aligned} f(\Delta\mu) &= \sum_{j=1}^k (c_{m,3}(\gamma_j) - c_{m,2}(\gamma_j)) \\ &= \Delta\mu_{3,m} \left(\sum_{j=1}^k c(\gamma_j) \right) / (2 + \mu_3). \end{aligned} \quad (75)$$

La Figure 8 représente cette fonction, $\mu_{3,m}$ prenant 15 valeurs entre 1 et 0.13 (la plus faible valeur accessible avec le jeu de données), en utilisant 9 niveaux de singularités et 20 réalisations. La régression linéaire donne:

$$\mu_3 = 0.22 \pm 0.07; \quad d_{el,3} = 2.22 \pm 0.07 \quad (76)$$

l'erreur étant estimée par l'écart type sur chacune des réalisations (voir [33] pour plus de détails). On peut noter que cette valeur de μ_3 est plus petite que celle trouvée (expérimentalement et théoriquement) pour le champ de vitesse ($d_{el} = 23/9 = 2.555\dots$, [3], ou $\mu_3 = 5/9$ pour le champ de vitesse — était notée H_Z).

8. Conclusions et résumé

Les différents éléments que nous avons abordés, tant au niveau expérimental que théorique, montrent que l'on commence à posséder quelques outils pour procéder à une investigation systématique des phénomènes d'intermittence et d'anisotropie des champs géophysiques en termes d'anisotropie invariante d'échelle, de fonctions-codimension et de générateurs de (semi-) groupes multiplicatifs. Nous avons indiqué, à chaque fois, la nécessité de distinguer soigneusement les propriétés "nues" (correspondant à la construction partielle du processus multiplicatif) et celles "habillées" (correspondant à des mesures sur le processus complet).

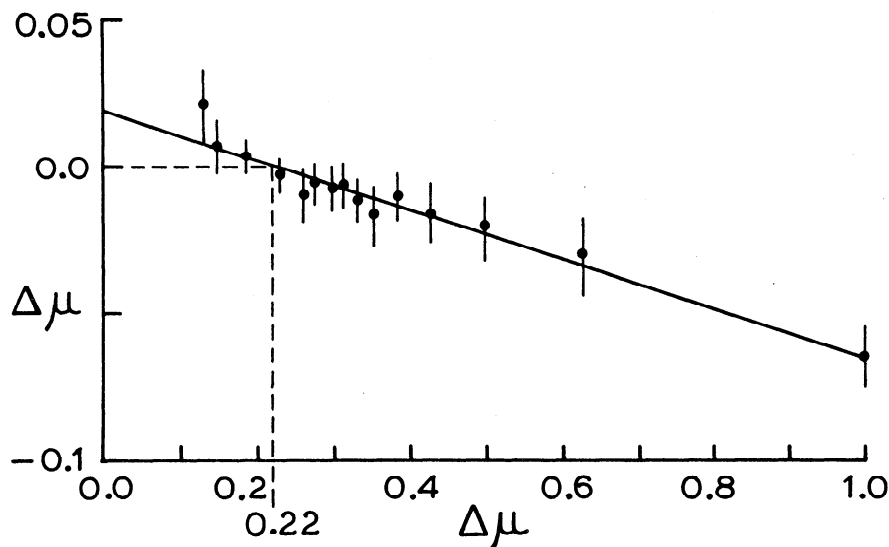


Figure 8

La fonction $f(\Delta\mu)$ obtenue en analysant les données de 20 balayages radar, en utilisant 15 valeurs de $\Delta\mu_{3,m}$ et 9 seuils différents (donc de $16 \times 20 \times 9 = 2\,880$ dimensions différentes). Les barres d'erreurs représentent un écart type des 20 cas. La ligne droite coupe l'axe horizontal à la valeur $\Delta\mu = 0.22$ ou $d_{e1} = 2.22$.

Le (semi-) groupe d'intermittence permet d'accéder à des échelles d'inhomogénéité de plus en plus petites et a les propriétés suivantes:

- son générateur γ est "un bruit en $1/f$ ", les bruits de Gauss et de Lévy de ce type sont particulièrement intéressants car ils possèdent des propriétés d'universalité.

- il définit deux fonctions-codimension liées à la seconde fonction caractéristique du générateur (ou son "flux libre" pour poursuivre l'analogie avec la thermodynamique...). Il en résulte qu'elles sont duales au sens de Laplace ou de Legendre. La première est celle des singularités des densités "nues" du flux; elle prescrit comment celles-ci sont distribuées, avec des dimensions de plus en plus petites pour les singularités de plus en plus élevées. La seconde, celle des statistiques, prescrit l'intervention de divergences ou de dégénérescence des flux, "habillés", en rapport avec la dimension de l'ensemble sur lequel ils sont mesurés.

- nous avons montré l'importance de ces divergences de moments pour la réflectivité radar, dont les moments divergent à partir de l'ordre: $\alpha_Z = 1.06 \pm 0.02$.

Pour le (semi-) groupe d'anisotropie, nous avons rappelé ou établi quelques propriétés essentielles:

- l'emploi de notions "elliptiques" — pour les mesures de Hausdorff, les dimensions associées... — au lieu des habituelles notions "sphériques" permet de généraliser aisément aux cas anisotropes, les propriétés du cas isotrope.

- la possibilité de déterminer expérimentalement des dimensions elliptiques. Nous avons en particulier déterminé la dimension elliptique de l'espace pour la réflectivité radar comme étant $d_{el,Z} = 2.22 \pm 0.07$. Celle-ci indique que la stratification de la pluie est plus forte que celle correspondant à l'isotropie dans l'espace ($d_{el} = 3$), mais plus faible que celle d'un champ totalement stratifié ($d_{el} = 2$).

Dans les deux cas, nous avons insisté sur le fait que les propriétés essentielles sont liées à des propriétés mesurables (ou même faiblement mesurables pour l'intermittence) et non métriques.

De façon générale, on peut noter que le formalisme développé permet un lien direct entre la théorie, les simulations stochastiques et les mesures expérimentales. Cela devrait permettre de rapides développements pour les problèmes de prédictibilité, détectabilité [34], mesures [35] — y compris en tenant compte du caractère multifractal (et non seulement fractal) des réseaux d'observations [36] — et simulations des champs turbulents [11] (pour un résumé d'un atelier récent consacré au sujet "Scaling, fractals, and non-linear variability in geophysics", voir [37]). Enfin, l'apparition de divergence de moments nécessite de réexaminer de façon critique les actuelles méthodes de renormalisation pour tenir compte de telles singularités (thème "renormalisation hyperbolique" dans [3], quelques nouvelles propositions dans [38]).

9. Remerciements

Nous avons grandement bénéficié de commentaires de J.P. Kahane, E. Levitch, R. Peschanski. Nous remercions aussi G.L. Austin, P. Gabriel, P. Ladoy, D. Lavallée,

J.P. Muller, A. Saucier, A.A. Tsonis, T. Warn, J. Wilson pour d'intéressantes discussions. Nous remercions J. Wilson pour son aide dans la préparation de la Figure 4. Nous remercions aussi le "Aspen Center for Physics" pour son hospitalité.

Références

- [1] SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., dans Proceedings, 4th Symp. of Turbulent Shear Flows, 11.1, (1983), et LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., Proceedings of 4th Conference on Atmospheric and Oceanic Waves and Stability, American Meteorological Society, 102(1983).
- [2] LILLY, D.K., *Mesoscale Meteorology — Theories, Observations and Models*, D.K. Lilly, T. Gal'Chen, eds., Reidel, New York 13, 1983.
- [3] SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., *Turbulent Shear Flow* 4, 7, B. Launder, ed., Springer, 1985.
- [4] LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., Bulletin of the AMS 67(1986), 21.
- [5] MONIN, A.S., *Weather Forecasting as a Problem in Physics*, MIT Press, 1972.
- [6] SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., Proceedings, 5th Conference on Turbulent Shear Flow, 13.1, (1985), et SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., P.C.H. Journ. 6(1985), 623.
- [7] KOLMOGOROV, A.N., Dokl. Acad. Sci. USSR 30(1941), 299-303, CORRSIN, S., J. Aeoraut. Sci. 18(1951), 417-423, OBUKHOV, A.M., Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Georg. i. Geofiz. 13(1949), 58-69.
- [8] HERRING, J.R., SCHERTZER, D., LESIEUR, M., NEWMAN, G.R., CHOLLET, J.P., LARCHEVESQUE, M., J. Fluid Mech. 124(1982), 411-425.
- [9] LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M., *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1963.
- [10] BATCHELOR, G.I. and TOWNSEND, A.A., Proc. Roy. Meteor. Soc. A199(1949), 238.
- [11] SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., J. Geophys. Res. (1987), à paraître.

- [12] KOLMOGOROV, A.N., *Mécanique de la turbulence*, 447, Editions du CNRS, 1962, J. Fluid Mech. 13(1962), 82.
- [13] OBUKHOV, A.M., J. Geophys. Res. 67(1962), 3011, J. Fluid Mech. 13(1962), 77.
- [14] FRISCH, U., PARISI, G., *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, Ghil. R. Benzi, G. Parisi, eds., North-Holland, Amsterdam, 84, 1985.
- [15] HALSEY, T.C., JENSEN, M.H., KADANOFF, L.P., PROCACCIA, I. and SHRAIMAN, B.I., Phys. Rev. A33(1986), 1141.
- [16] SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., Preprints volume, *IUTAM Symp. on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, 141, IUTAM, 1983, SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, 505, T. Tatsumi, ed., North-Holland, 1984.
- [17] MANDELBROT, B., J. Fluid Mech. 62(1974), 331.
- [18] FRISCH, U., SULEM, P.L. and NELKIN, M., J. Fluid Mech. 87(1978), 719.
- [19] RICHARDSON, L.F., *Weather Prediction by Numerical Process*, 1922, republié par Dover, 1965.
- [20] NOVIKOV, A., STEWART, R., Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Geofiz. 3(1964), 408, NOVIKOV, E.A., Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Atmosf. i. Okeana, 1(1965), 788, NOVIKOV, E.A., Dokl. Akad. Nauk. SSSR 168(1966), 1279, YAGLOM, A.M., Dokl. Akad. Nauk. SSSR 16(1966), 49, GURVITCH, E., YAGLOM, M., Phys. Fluids 16(1967), Supplement 559, NOVIKOV, E.A., Dokl. Akad. Nauk. SSSR 177(1969), 299, NOVIKOV, E.A., Prikl. Mat. Mekh. 35(1970), 266, MANDELBROT, B. J. Fluid Mech. 62(1974), 331.
- [21] BIALAS, A., PESCHANSKI, R., Nuclear Physics B B273(1986), 703-718.
- [22] FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory*, Vol. II, Wiley, New York, 1971.

- [23] KAHANE, J.P., *Le chaos multiplicatif*, Ann. sc. math. Québec 9(1985), 105-150.
- [24] MAYER, Y., C.R. Acad. Sc. Paris, 1985, 305.
- [25] WILSON, J., LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., Proc. 2nd Conf. on Sat. Meteorology, American Meteorology Society, Boston, 1986, 233-236.
- [26] METIVIER, A., *Semimartingales*, Dunod, Paris, 1983.
- [27] KAHANE, J.P., Chinese Ann. Math., 1987, à paraître.
- [28] MAULDIN, D., WILLIAMS, S.C., Trans. Amer. Math. Soc. 295(1986), 325-346.
- [29] SCHERTZER, D. and LOVEJOY, S., *Fractals in Physics*, 457, Pietronero, Tosatti, eds., North-Holland, 1986.
- [30] MANDELBROT, B., *Fractals in Physics*, 3, Pietronero, Tosatti, eds., North-Holland, 1986.
- [31] MONIN, A.S., YAGLOM, A.M., *Statistical Fluid Mechanics*, Vol. II, M.I.T. Press, Cambridge, Ma., 1975.
- [32] MARSHALL, J.S., PALMER, W.M., J. Meteor. 5(1949), 165-169.
- [33] LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., TSONIS, A.A., Science 235(1987), 1036-1038.
- [34] LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., LADOY, P., Nature 319(1986), 43, LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., LADOY, P., Nature 320(1986), 401, LADOY, P., SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., La météorologie 11(1986), 150.
- [35] LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., *Digital Image Processing in Remote Sensing*, Ch. 14, J.P. Muller, Francis et Taylor, eds., 1987.
- [36] MONTARIOL, F., GIRAUD, R., Thèse, Météorologie Nationale, Toulouse, France (1986), MARQUET, O., PIRIOU, J.M., Thèse, Météorologie Nationale, Toulouse, France (1987).
- [37] LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., à paraître, EOS, 1987.

- [38] LEVITCH, E. and TZVETKOV, E., Physics Reports 128(1985), 1,1, LEVITCH, E., dans
Proceedings of the 199th Euromech, 1985, à paraître dans J. Fluid Mech.,
LEVITCH, E., Preprint, City College, New York, 1986.

EERM/CRMD
Météorologie Nationale
2, Ave Rapp
Paris, 75007
France

Département de physique
Université McGill
3600, rue Université
Montréal, Québec
H3A 2T8

Manuscrit reçu le 26 novembre 1986.
Revisé le 6 avril 1987.