

MESURES DE HAUSDORFF D'ENSEMBLES FRACTALS

Jacques Marion

Résumé

Nous étudions une construction générale d'ensembles fractals dans $\mathbb{R}^N$ dont la propriété caractéristique est d'être décomposables d'une infinité de manières en portions géométriquement semblables. La dimension de Hausdorff de ces ensembles "parfaits de similitude" est obtenue à partir des paramètres de leur construction. Ensuite, les principaux résultats (anciens et récents) sur le problème de l'évaluation de la mesure de Hausdorff de ces fractals sont exposés, notamment dans le cas particulier des ensembles à similitude interne.

Abstract

A general construction of fractals in $\mathbb{R}^N$ whose characteristic property is that of being decomposable in infinitely many ways into geometrically similar portions is studied in this paper. We determine the Hausdorff dimension of these fractal sets in terms of parameters related to their construction. The main results (old and new) on the problem of calculating their Hausdorff measure are then discussed, in particular for the special case of self-similar sets.

Mots clés: Fractal, ensemble parfait de translation (et/ou de similitude), dimension de Hausdorff, mesure de Hausdorff, similitude interne.

Classification de l'A.M.S.: 28A75.

1. Introduction

Cet exposé portera sur l'étude d'une certaine classe de sous-ensembles fractals de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$. Ces fractals seront caractérisés par une propriété géométrique qui permettra (sous certaines hypothèses) l'évaluation de leur dimension de Hausdorff et, dans plusieurs cas, de leur mesure de Hausdorff.

Comme point de départ, prenons la définition des ensembles *parfaits de translation* linéaires donnée par Kahane et Salem dans [7]: "ce sont les ensembles parfaits [sur la droite] qui sont décomposables, d'une infinité de manières, en portions égales par translation" (les portions associées à une décomposition donnée étant portées par des segments deux à deux disjoints). Les auteurs montrent que cette définition est équivalente à une construction par dissections d'intervalles. Pour une partition donnée de l'intervalle $[0,1]$

$$0 \leq \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_v < 1$$

ils appellent dissection de type $(v, \eta_1, \dots, \eta_v, \xi)$ effectuée sur un intervalle compact $[a, b]$ l'opération qui consiste à enlever de $[a, b]$ des intervalles ouverts ou semi-ouverts pour ne laisser que v intervalles fermés, deux à deux disjoints, de longueur commune $(b-a)\xi$ et d'origines $a + (b-a)\eta_j$ ($j = 1, \dots, v$).

La construction d'un parfait de translation se fait alors par étapes successives. Sur un intervalle compact initial, disons $[0,1]$, on effectue une première dissection de type $(v_1, \eta_{11}, \dots, \eta_{1v_1}, \xi_1)$ qui laisse v_1 intervalles fondamentaux d'ordre 1 de longueur ξ_1 , sur lesquels on effectue ensuite une dissection de type $(v_2, \eta_{21}, \dots, \eta_{2v_2}, \xi_2)$ produisant ainsi $v_1 v_2$ intervalles fondamentaux d'ordre 2, de longueur $\xi_1 \xi_2$, et ainsi de suite, pour obtenir à la limite (i.e. comme intersection d'une famille de compacts enboîtés) un ensemble parfait de translation.

Nous pouvons élargir cette construction d'abord dans le sens suivant: on généralise la notion de dissection de type $(v_i, \eta_{i1}, \dots, \eta_{iv_i}, \xi_i)$ qui produit des segments de longueur commune à celle de dissection de type $(v_i, \eta_{i1}, \dots, \eta_{iv_i}, \xi_{i1}, \dots, \xi_{iv_i})$ qui produit des segments de longueurs possiblement différentes. De cette

façon, les ensembles obtenus seraient caractérisés par la propriété intrinsèque d'être décomposables, d'une infinité de manières, en portions géométriquement semblables. Il est alors naturel d'appeler ces derniers "ensembles parfaits de similitude".

On remarque tout de suite que la construction d'un parfait de similitude (en particulier, d'un parfait de translation) peut se reformuler à l'aide d'une suite d'ensembles finis de similitudes de $\mathbb{R}^1$. C'est par ce biais que nous étendons à l'espace $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) la construction des parfaits de similitude. De plus, nous voulons cette construction suffisamment large pour que, lorsque appliquée au cas $N = 1$, elle puisse englober des exemples classiques de fractals du genre "l'ensemble des nombres de $[0,1]$ pour lesquels le chiffre p n'apparaît pas dans le développement q -adique". De tels ensembles sont en quelque sorte des "cas limites" de parfaits de translation (au sens strict de Kahane et Salem) car ils correspondent à une construction où certains intervalles fondamentaux d'un même ordre sont bout à bout et non pas disjoints.

2. Construction générale des ensembles parfaits de similitude dans $\mathbb{R}^N$

Soit $\{\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{iv_i}\}_{i \geq 1}$ une suite d'ensembles finis (où $v_i \geq 2$) de similitudes contractantes de $\mathbb{R}^N$ de rapports $\xi_{i1}, \dots, \xi_{iv_i}$ pour laquelle il existe un ouvert borné $O \subset \mathbb{R}^N$ avec la propriété suivante: pour tout $i \geq 1$, les v_i ouverts $\varphi_{i1}(O), \dots, \varphi_{iv_i}(O)$ sont deux à deux disjoints et contenus dans O .

N.B.: Le terme "similitude" est pris dans son sens le plus large, i.e. signifiant la composition d'une isométrie et d'une homothétie.

L'existence d'un tel ouvert O est une condition de "séparation" imposée à la suite $\{\varphi_{ij}\}$. Nous l'appellerons "condition de Moran" car elle fut utilisée par ce dernier, dans un contexte moins général toutefois, pour définir des fractals possédant une similitude interne ([15]).

On construit à partir de $\emptyset$ l'ensemble parfait de similitude E associé à la suite $\{\varphi_{ij}\}$ en posant d'abord

$$E_n = \bigcup_{j_1=1}^{v_1} \dots \bigcup_{j_n=1}^{v_n} \varphi_{1j_1} \circ \dots \circ \varphi_{nj_n}(\bar{\emptyset}), \quad (n \geq 1)$$

où $\bar{\emptyset}$ est l'adhérence de $\emptyset$. Puisque $\varphi_{ij}(\emptyset) \subset \emptyset$

$$\varphi_{1j_1} \circ \dots \circ \varphi_{(n+1)j_{n+1}}(\bar{\emptyset}) \subset \varphi_{1j_1} \circ \dots \circ \varphi_{nj_n}(\bar{\emptyset}),$$

d'où

$$E_{n+1} \subset E_n, \quad (n \geq 1).$$

On pose alors

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

REMARQUES. 1^o) La mesure de Lebesgue (en dimension N) de E est donnée par

$$\text{mes } E = (\text{mes } \emptyset) \prod_{i=1}^{\infty} (\xi_{i1}^N + \dots + \xi_{iv_i}^N).$$

2^o) Lorsque $\{\varphi_{ij}\}$ vérifie la condition de Moran, le choix de l'ouvert $\emptyset$ pour lequel cette condition est satisfaite n'est pas unique. En fait, si $\prod_{i=1}^{\infty} (\xi_{i1}^N + \dots + \xi_{iv_i}^N) = 0$, E est indépendant du choix de cet ouvert car alors E coïncide avec l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble des points fixes des similitudes $\varphi_{1j_1} \circ \dots \circ \varphi_{nj_n}$ ($n \geq 1$).

3^o) Sous certaines hypothèses de séparation plus fortes où, entre autres, pour i fixé les compacts $\varphi_{ij}(\bar{\emptyset})$ seraient deux à deux disjoints, E serait en particulier un "ensemble de Cantor généralisé" au sens de Beardon [1].

On supposera dans toute la suite du texte que $\text{mes } E = 0$.

3. La dimension de Hausdorff de E

Notons $\dim E$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble parfait de similitude E , et $H^\beta(E)$ (où $\beta > 0$) la β -mesure de Hausdorff de E .

RAPPEL:
$$H^\beta(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} H_\rho^\beta(E)$$

où

$$H_\rho^\beta(E) = \inf \left\{ \sum_i |\Delta_i|^\beta : |\Delta_i| < \rho, E \subset \bigcup_i \Delta_i \right\}$$

($|\Delta_i|$ désigne le diamètre de l'ensemble Δ_i)

et

$$\dim E = \inf \{ \beta : H^\beta(E) = 0 \} = \sup \{ \beta : H^\beta(E) > 0 \}.$$

Pour tout $n \geq 1$, soit α_n le nombre positif défini par

$$\sum_{j_1=1}^{v_1} \dots \sum_{j_n=1}^{v_n} (\xi_{1j_1} \dots \xi_{nj_n})^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^{\alpha_n} + \dots + \xi_{iv_i}^{\alpha_n}) = 1.$$

THÉOREME 1. *Compte tenu des conventions précédentes,*

$$\dim E \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

De plus, si $\inf_{i,j} \xi_{ij} > 0$

$$\dim E = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0.$$

La démonstration nécessite un lemme. Mais d'abord les définitions suivantes:

DÉFINITION 1. Appelons *compacts fondamentaux d'ordre n* les $v_1 \dots v_n$ compacts $K_{j_1 \dots j_n}$ définis par $K_{j_1 \dots j_n} = \varphi_{1j_1} \circ \dots \circ \varphi_{nj_n}(\bar{O})$.

DÉFINITION 2. Appelons *partie simple d'ordre n* toute réunion de compacts fondamentaux d'ordre n.

LEMME 1. Soit L_n la famille des recouvrements finis de E par des parties simples d'ordre n. Pour tout $\beta > 0$, on a

$$H^\beta(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{P \in \Gamma} |P|^\beta : |P| < \rho, \Gamma \in L_n \text{ et } n \geq 1 \right\}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\beta > 0$ fixé. De la définition de $H^\beta(E)$ on obtient

$$H^\beta(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{G \in \Omega} |G|^\beta : \Omega \text{ est un recouvrement fini de } E \text{ par des ouverts } G \text{ vérifiant } |G| < \rho \right\}$$

(cf. Rogers [16], p. 51). Soit Ω un recouvrement fini de E par des ouverts. Le lemme sera démontré si l'on montre l'existence d'un recouvrement $\Gamma \in L_n$ (pour un certain n) tel que $\sum_{P \in \Gamma} |P|^\beta \leq \sum_{G \in \Omega} |G|^\beta$.

Pour n suffisamment grand, le compact E_n est recouvert par Ω car $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ et $E_1 \supset E_2 \supset \dots$. Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ associé à Ω tel que toute partie de E_n , de diamètre $\leq \varepsilon$ soit contenue dans au moins un des ouverts de Ω . D'autre part,

$$\text{mes } K_{j_1 \dots j_n} = |K_{j_1 \dots j_n}|^N \text{mes } \bar{O}$$

et $\text{mes } E_n \rightarrow \text{mes } E = 0$, où $E_n = \bigcup_{j_1, \dots, j_n} K_{j_1 \dots j_n}$. Par conséquent $|K_{j_1 \dots j_n}| \rightarrow 0$ uniformément. Donc en prenant n suffisamment grand, $|K_{j_1 \dots j_n}| < \varepsilon$. Alors on fait correspondre à chaque ouvert $G \in \Omega$ la plus grande partie simple P d'ordre n (celle qui comporte le plus de $K_{j_1 \dots j_n}$) qu'il contient, pour obtenir le recouvrement Γ désiré. Ceci termine la démonstration du lemme.

DÉMONSTRATION du Théorème 1. On peut supposer sans perte de généralité que $|O| = 1$. En effet, l'image de O et de chacun des E_n par une similitude donnée définit les étapes de la construction de l'image de E par cette même similitude, et cette image de E est trivialement de même dimension que E .

Posons $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ et $\xi_i = \max_{1 \leq j \leq v_i} \xi_{ij}$ ($i \geq 1$). On a $\xi_1 \dots \xi_n \rightarrow 0$ car $\text{mes } E = 0$.

Soit $\beta > \alpha$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour une infinité de valeurs de n , $\beta > \alpha_n + \varepsilon$, d'où

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\beta + \dots + \xi_{iv_i}^\beta) &< (\xi_1 \dots \xi_n)^\varepsilon \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^{\alpha_n} + \dots + \xi_{iv_i}^{\alpha_n}) \\ &= (\xi_1 \dots \xi_n)^\varepsilon \end{aligned}$$

pour des valeurs de n arbitrairement grandes. Alors

$$H^\beta(E) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j_1=1}^{v_1} \dots \sum_{j_n=1}^{v_n} |K_{j_1 \dots j_n}|^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\beta + \dots + \xi_{iv_i}^\beta) = 0$$

d'où

$$\dim E \leq \alpha.$$

Supposons maintenant que $\inf_{i,j} \xi_{ij} > 0$, et montrons qu'alors $\dim E \geq \alpha$.

Soit $0 < \beta < \alpha$. Il existe n_0 tel que $\beta < \alpha_n$ pour tout $n \geq n_0$. Notons F_n la famille des parties simples d'ordre n . (En particulier, $E_n \in F_n$.) Pour $P \in F_n$ posons

$$\Phi_n(P) = \{(j_1, \dots, j_n) : K_{j_1 \dots j_n} \subset P\}$$

et

$$h_n(P) = \frac{\sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \Phi_n(P)} (\xi_{1j_1} \dots \xi_{nj_n})^\beta}{\sum_{j_1=1}^{v_1} \dots \sum_{j_n=1}^{v_n} (\xi_{1j_1} \dots \xi_{nj_n})^\beta}.$$

Soit

$$\delta = \inf\{|P|^\beta / h_n(P) : P \in F_n \text{ et } n \geq 1\}.$$

Pour tout $\Gamma \in L_n$ et tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{P \in \Gamma} |P|^\beta \geq \delta \sum_{P \in \Gamma} h_n(P) \geq \delta h_n(E_n) = \delta.$$

Donc, en vertu du Lemme 1

$$H^\beta(E) \geq \delta.$$

Montrons que $\delta > 0$. Arrangeons en ordre décroissant tous les rapports $\xi_{1j_1} \dots \xi_{nj_n}$ (n n'étant pas fixé) pour former la suite

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \dots$$

Soit $P_0 \in F_m$ (pour un certain m fixé), et posons $d = |P_0|$. Nous pouvons

supposer d suffisamment petit pour que tout compact fondamental de diamètre $\leq d$ soit d'ordre $\geq n_0$.

Soit r un indice vérifiant

$$\gamma_r > d \geq \gamma_{r+1}.$$

Posons

$$\xi = \inf_{i,j} \xi_{ij}.$$

Soit B une boule fermée de rayon $2d$ centrée en un point quelconque de P_0 , et $\mathcal{U}$ la famille des compacts fondamentaux $K_{j_1 \dots j_n}$ contenus dans B et pour lesquels les indices $j_1, \dots, j_n$ vérifient

$$\xi_{1j_1} \dots \xi_{(n-1)j_{n-1}} \geq \gamma_{r+1} \geq \xi_{1j_1} \dots \xi_{nj_n} \geq \gamma_{r+1} \xi,$$

de sorte que si $K_{j_1 \dots j_n} \in \mathcal{U}$ alors $K_{j_1 \dots j_{n-1}} \in \mathcal{U}$.

Montrons que $\mathcal{U}$ recouvre P_0 . Soit $(j_1, \dots, j_m) \in \Phi_m(P_0)$. On a $K_{j_1 \dots j_m} \subset P_0$, d'où

$$\xi_{1j_1} \dots \xi_{mj_m} = |K_{j_1 \dots j_m}| \leq |P_0| = d < \gamma_r,$$

et puisque $\xi_{1j_1} \dots \xi_{mj_m}$ est un élément de la suite $\{\gamma_j\}$,

$$\gamma_r > \gamma_{r+1} \geq \xi_{1j_1} \dots \xi_{mj_m}.$$

Si $\gamma_{r+1} \xi \geq \xi_{1j_1} \dots \xi_{mj_m}$, alors il existe $p \leq m$ tel que

$$\xi_{1j_1} \dots \xi_{(p-1)j_{p-1}} \geq \gamma_{r+1} \xi \geq \xi_{1j_1} \dots \xi_{pj_p},$$

d'où

$$\gamma_{r+1} \geq \gamma_{r+1} \xi \xi_{pj_p}^{-1} \geq \xi_{1j_1} \dots \xi_{(p-1)j_{p-1}}$$

car $\xi \xi_{pj_p}^{-1} \leq 1$. Donc

$$\gamma_{r+1} \geq \xi_{1j_1} \dots \xi_{(p-1)j_{p-1}} \geq \gamma_{r+1} \xi,$$

et pour un certain $n \leq p-1$

$$\xi_{1j_1} \dots \xi_{(n-1)j_{n-1}} \geq \gamma_{r+1} \geq \xi_{1j_1} \dots \xi_{nj_n} \geq \gamma_{r+1} \xi.$$

De plus

$$K_{j_1 \dots j_n} \cap P_0 \neq \emptyset$$

car $K_{j_1 \dots j_n} \supset K_{j_1 \dots j_m}$ et $K_{j_1 \dots j_m} \subset P_0$. Aussi,

$$|K_{j_1 \dots j_n}| = \xi_{1j_1} \dots \xi_{nj_n} \leq \gamma_{r+1} \leq d.$$

Par conséquent, $K_{j_1 \dots j_n} \subset B$ puisque B est de rayon $2d$ et son centre est un point de P_0 , d'où $K_{j_1 \dots j_n} \in \mathcal{U}$.

On a donc montré que pour tout $(j_1, \dots, j_m) \in \Phi_m(P_0)$, il existe $Q \in \mathcal{U}$ tel que $K_{j_1 \dots j_m} \subset Q$. Puisque $P_0 = \bigcup \{K_{j_1 \dots j_m} : (j_1, \dots, j_m) \in \Phi_m(P_0)\}$ $\mathcal{U}$ est un recouvrement de P_0 .

Soit $Q = K_{s_1 \dots s_n} \in \mathcal{U}$, où $n < m$. Alors si $P_0 \cap Q \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} h_m(P_0 \cap Q) &= \frac{\sum_{(j_1, \dots, j_m) \in \Phi_m(P_0 \cap Q)} (\xi_{1j_1} \dots \xi_{mj_m})^\beta}{\sum_{j_1=1}^{v_1} \dots \sum_{j_m=1}^{v_m} (\xi_{1j_1} \dots \xi_{mj_m})^\beta} \\ &\leq \frac{(\xi_{1s_1} \dots \xi_{ns_n})^\beta \sum_{j_{n+1}=1}^{v_{n+1}} \dots \sum_{j_m=1}^{v_m} (\xi_{(n+1)j_{n+1}} \dots \xi_{mj_m})^\beta}{\prod_{i=1}^m (\xi_{i1}^\beta + \dots + \xi_{iv_i}^\beta)} \\ &= \frac{|Q|^\beta}{\prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\beta + \dots + \xi_{iv_i}^\beta)} \\ &< \frac{|Q|^\beta}{\prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^{\alpha_n} + \dots + \xi_{iv_i}^{\alpha_n})} \quad (\text{car } \beta < \alpha_n) \\ &= |Q|^\beta. \end{aligned}$$

Notons $\{Q_i\}_{i=1}^k$ la famille $\mathcal{U}$. Ces compacts fondamentaux, deux à deux non emboîtés, recouvrent P_0 . Donc on a

$$\begin{aligned} h_m(P_0) &= \sum_{i=1}^k h_m(P_0 \cap Q_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^k |Q_i|^\beta \\ &\leq k \gamma_{r+1}^\beta \leq k d^\beta = k |P_0|^\beta. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \text{mes } B &\geq \text{mes} \bigcup_{i=1}^k Q_i = \sum_{i=1}^k \text{mes } Q_i \\ &= \sum_{i=1}^k |Q_i|^N \text{mes } 0 \\ &\geq k(\gamma_{r+1}\xi)^N \text{mes } 0 \end{aligned}$$

compte tenu de la définition de $\mathcal{U}$, d'où

$$\begin{aligned} k &\leq (\gamma_{r+1}\xi)^{-N} \frac{\text{mes } B}{\text{mes } 0} = \kappa_N (2d)^N (\gamma_{r+1}\xi)^{-N} / \text{mes } 0 \\ &= 2^N \kappa_N d^N (\gamma_{r+1}\xi)^{-N} / \text{mes } 0 \\ &\leq 2^N \kappa_N \xi^{-2N} / \text{mes } 0, \end{aligned}$$

(où κ_N est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^N$) car

$$d\gamma_{r+1}^{-1} < \gamma_r \gamma_{r+1}^{-1} \leq \xi^{-1}.$$

On a donc finalement

$$|P_0|^\beta / h_m(P_0) \geq k^{-1} \geq \xi^{2N} 2^{-N} \kappa_N^{-1} \text{mes } 0 > 0,$$

d'où

$$\delta > 0 \text{ et } H^\beta(E) > 0.$$

Par conséquent

$$\alpha \leq \dim E.$$

De plus, on vérifie aisément que

$$\alpha_n \geq -\log 2 / \log \xi > 0 \quad (n \geq 1),$$

et le théorème est démontré.

L'énoncé du théorème suivant fait appel à une nouvelle définition.

DÉFINITION 3. Un système fondamental associé à E est un recouvrement de E par des compacts fondamentaux (pas nécessairement tous du même ordre) dont les intérieurs respectifs sont deux à deux disjoints.

REMARQUE. Deux compacts fondamentaux d'un même système fondamental sont non emboîtés. Ils ne peuvent avoir en commun que des points frontières.

THÉORÈME 2. Si $\inf \xi_{ij} > 0$, la famille S des systèmes fondamentaux associés à E détermine complètement la dimension de Hausdorff de E . En fait, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\beta > 0$

$$C\Lambda^\beta(E) \leq H^\beta(E) \leq \Lambda^\beta(E)$$

où

$$\Lambda^\beta(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_i |\Delta_i|^\beta : |\Delta_i| < \rho \text{ et } \{\Delta_i\} \in S \right\}$$

DÉMONSTRATION. Considérons un recouvrement $\Gamma \in L_n$ (pour un certain n). Soit $P_0 \in \Gamma$ et $U = \{Q_i\}_{i=1}^k$ la famille de compacts fondamentaux qu'on associe à P_0 dans la démonstration du Théorème 1. On a démontré que U recouvre P_0 et que

$$\sum_{i=1}^k |Q_i|^\beta \leq k|P_0|^\beta$$

où k est majoré par une constante $\lambda > 0$. On forme alors un nouveau recouvrement Γ^* de E en remplaçant chaque $P \in \Gamma$ par la famille U correspondante. Ensuite, si deux compacts fondamentaux de Γ^* sont emboîtés, on ne conserve que le plus grand. Ceci nous conduit à un système fondamental Γ' tel que

$$\lambda^{-1} \sum_{\Delta \in \Gamma'} |\Delta|^\beta \leq \sum_{P \in \Gamma} |P|^\beta.$$

Par conséquent, compte tenu du Lemme 1

$$\lambda^{-1} \Lambda^\beta(E) \leq H^\beta(E).$$

D'autre part, l'inégalité $H^\beta(E) \leq \Lambda^\beta(E)$ est immédiate, d'où le résultat.

TERMINOLOGIE. Pour $\alpha = \dim E$, $H^\alpha(E)$ sera appelé simplement "mesure de Hausdorff de E ".

COROLLAIRE 1. Si $\inf \xi_{ij} > 0$, en posant toujours $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$, on a

$$(i) \quad H^\alpha(E) = 0 \iff \inf_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha) = 0.$$

$$(ii) \quad \text{Si } \prod_{i=1}^{\infty} (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha) = \infty \text{ et } \inf_{n < m} \prod_{i=n}^m \min\{1, \xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha\} > 0$$

alors

$$H^\alpha(E) = \infty.$$

$$(iii) \quad \text{Si } 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha) < \infty \text{ alors } 0 < H^\alpha(E) < \infty.$$

DÉMONSTRATION. (i) Reportons-nous de nouveau à la démonstration du Théorème 1.

Soit $P \in F_m$ (pour un certain m) et $\mathcal{U} = \{Q_i\}_{i=1}^k$ la famille de compacts fondamentaux associée. Si $Q = K_{s_1 \dots s_n} \in \mathcal{U}$ (avec $n < m$), la définition de $h_m(P)$ (avec $\beta = \alpha$) nous conduit à l'inégalité

$$h_m(P \cap Q) \leq \frac{|Q|^\beta}{\prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha)}.$$

Donc, si $\inf_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha) = C_0 > 0$, on obtient

$$h_m(P) = \sum_{i=1}^k h_m(P \cap Q_i) \leq C_0^{-1} \sum_{i=1}^k |Q_i|^\alpha \leq C_0^{-1} k |P|^\alpha,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \inf\{|P|^\alpha/h_m(P): P \in F_m \text{ et } m \geq 1\} &\geq C_0 \min_k k^{-1} \\ &\geq C_0 \xi^{2N} 2^{-N} \kappa_N^{-1} \text{ mes } 0 \\ &> 0, \end{aligned}$$

d'où $H^\alpha(E) > 0$.

D'autre part, si $\inf_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha) = 0$ on a $H^\alpha(E) = 0$ car

$$\begin{aligned} H^\alpha(E) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{v_1} \dots \prod_{j=1}^{v_n} (\xi_{1j_1} \dots \xi_{nj_n})^\alpha \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha). \end{aligned}$$

Ceci démontre (i).

(ii) Soit Γ un système fondamental associé à E , et n (respectivement m) l'ordre minimal (respectivement maximal) d'un compact fondamental appartenant à Γ . En particulier, si $K_{j_1 \dots j_m} \in \Gamma$, alors $K_{j_1 \dots j_{m-1}j} \in \Gamma$ pour $j = 1, \dots, v_m$ parce que, d'une part Γ recouvre E , et d'autre part les membres de Γ sont deux à deux non emboîtés. Aussi, dans la somme $\sum_{\Delta \in \Gamma} |\Delta|^\alpha$ on retrouve la somme partielle

$$\sum_{j=1}^{v_m} |K_{j_1 \dots j_m}|^\alpha = (\xi_{m1}^\alpha + \dots + \xi_{mv_m}^\alpha) |K_{j_1 \dots j_{m-1}}|^\alpha.$$

On remplace alors les v_m compacts fondamentaux $K_{j_1 \dots j_{m-1}j}$ ($j = 1, \dots, v_m$) par le compact fondamental $K_{j_1 \dots j_{m-1}}$.

Ces opérations complétées, on obtient un nouveau système fondamental Γ^* qui vérifie

$$\sum_{\Delta \in \Gamma} |\Delta|^\alpha \geq \min\{1, \xi_{m1}^\alpha + \dots + \xi_{mv_m}^\alpha\} \sum_{\Delta \in \Gamma^*} |\Delta|^\alpha.$$

Ensuite on reprend le raisonnement en partant de Γ^* , et après un certain nombre de fois on obtient

$$\sum_{\Delta \in \Gamma} |\Delta|^\alpha \geq \left(\inf_{n \leq m} \prod_{i=n}^m \min\{1, \xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha\} \right) \sum_{j_1=1}^{v_1} \dots \sum_{j_n=1}^{v_n} |K_{j_1 \dots j_n}|^\alpha$$

$$= C \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha)$$

pour une certaine constante $C > 0$. Par conséquent, en vertu du Théorème 2, si

$$\prod_{i=1}^{\infty} (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha) = \infty \quad \text{on a} \quad H^\alpha(E) = \infty, \text{ ce qui démontre (ii).}$$

(iii) Immédiat, compte tenu de (i) et de la relation

$$H^\alpha(E) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j_1=1}^{v_1} \dots \sum_{j_n=1}^{v_n} |K_{j_1 \dots j_n}|^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (\xi_{i1}^\alpha + \dots + \xi_{iv_i}^\alpha).$$

Examinons quelques cas particuliers (dont certains sont traités isolément dans la littérature).

a) Les parfaits de translation dans $\mathbb{R}^N$: Lorsque pour tout $i \geq 1$ les v_i similitudes $\phi_{i1}, \dots, \phi_{iv_i}$ sont toutes de rapport ξ_i , nous avons la généralisation à l'espace $\mathbb{R}^N$ de la construction des parfaits de translation de Kahane et Salem [7].

Donc on remplace ξ_{ij} par ξ_i et α_n devient la solution de l'équation

$$v_1 \dots v_n (\xi_1 \dots \xi_n)^{\alpha_n} = 1.$$

En vertu du Théorème 1, si $\inf_i \xi_i > 0$ on retrouve la formule

$$\dim E = \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} -\log(v_1 \dots v_n) / \log(\xi_1 \dots \xi_n).$$

De plus, en vertu du Corollaire 1,

$$H^\alpha(E) = 0 \iff \inf_{n \geq 1} (v_1 \dots v_n) (\xi_1 \dots \xi_n)^\alpha > 0.$$

Ces résultats sont déjà connus pour le cas $E \subset \mathbb{R}^1$ (cf. [11], [12]).

b) Le cas où la suite d'ensembles $\{\xi_{i1}, \dots, \xi_{iv_i}\}_{i \geq 1}$ est constante: Si pour tout $i \geq 1$ on a $\{\xi_{i1}, \dots, \xi_{iv_i}\} = \{\xi_1, \dots, \xi_v\}$ (où $v \geq 2$), alors $\dim E = \alpha$ où $\xi_1^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha = 1$, et $0 < H^\alpha(E) < \infty$.

c) Les parfaits à similitude interne vérifiant la condition de Moran: Lorsque la suite d'ensembles de similitudes $\{\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{iv_i}\}_{i \geq 1}$ est constante, disons égale à $\{\varphi_1, \dots, \varphi_v\}$, alors E est un parfait à similitude interne (i.e. décomposable en parties semblables "au tout"). Plus précisément, $E = \bigcup_{i=1}^v \varphi_i(E)$. Dans [15], Moran démontre que $0 < H^\alpha(E) < \infty$ (et donc que $\dim E = \alpha$), où $\xi_1^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha = 1$.

d) Les parfaits homogènes dans $\mathbb{R}^N$: Lorsque E est déterminé par un ensemble $\{\varphi_1, \dots, \varphi_v\}$ de v similitudes (vérifiant la condition de Moran) de rapport commun ξ , E est appelé parfait homogène de type (v, ξ) (i.e. décomposable en v parties semblables au tout dans le rapport ξ). Alors $\dim E = \alpha = -\log v / \log \xi$ et $0 < H^\alpha(E) < \infty$ (cf. [7] pour le cas linéaire).

e) Les ensembles q -adiques de Cantor sur $[0,1]$: On considère un entier $q \geq 3$. Soit $A \subset \{0,1,\dots,q-1\}$ et posons $v = \text{card } A$ (on supposera $v \geq 2$). L'ensemble E des nombres de l'intervalle $[0,1]$ qui n'ont dans leur développement q -adique que des "chiffres" appartenant à A est un parfait homogène de type (v, q^{-1}) , donc de dimension $\alpha = \log v / \log q$ et tel que $0 < H^\alpha(E) < \infty$ (cf. Galambos [4], Volkmann [18], Eggleston [2], etc.).

4. La mesure de Hausdorff d'un parfait à similitude interne

Soit E un parfait de similitude pour lequel $0 < H^\alpha(E) < \infty$. Le calcul explicite de $H^\alpha(E)$ dans le cas général est difficile à réaliser. Mais si l'on se restreint au cas particulier des parfaits à similitude interne (vérifiant la condition de Moran), le calcul de $H^\alpha(E)$ est alors plus abordable.

Au départ, on démontre aisément que pour tout parfait à similitude interne E de dimension α

$$H_\rho^\alpha(E) = H^\alpha(E) \quad (\text{tout } \rho > 0)$$

et que par conséquent

$$H^\alpha(E) \leq |E|^\alpha.$$

Ceci nous conduit au résultat principal suivant: (cf. [13])

THÉORÈME 3. Soit E un ensemble parfait à similitude interne de dimension α , déterminé par un ensemble $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ de similitudes de $\mathbb{R}^N$ vérifiant la condition de Moran. Alors, conservant les notations du Théorème 1, on a

$$H^\alpha(E) = \inf\{|P|^\alpha / h_n(P) : P \in F_n \text{ et } n \geq 1\}$$

où

$$h_n(P) = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \Phi_n(P)} (\xi_{j_1} \dots \xi_{j_n})^\alpha.$$

REMARQUE. L'ensemble E dépend uniquement des similitudes $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$ et non pas du choix de l'ouvert O de par lequel la condition de Moran est satisfaite (ce choix n'étant pas unique). Précisément, on observe que E est l'adhérence de l'ensemble des points fixes des contractions $\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_n}$ ($n \geq 1$). D'ailleurs, cet énoncé demeure vrai même sans la condition de Moran (cf. [17], [6] et [13]).

La valeur de $H^\alpha(E)$ est donc aussi indépendante du choix de O . On le constate effectivement en analysant la formule du Théorème 3. En effet, si l'on remplace O par $O_k = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^\nu \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}(O)$ dans la définition de la partie simple $P = \bigcup \{\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(\bar{O}) : (i_1, \dots, i_n) \in \Phi_n(P)\}$ on obtient une nouvelle partie simple $P_k \in F_{n+k}$ telle que $P_k \subset P$ et $h_{n+k}(P_k) = h_n(P)$ de sorte que

$$\inf_{\substack{n \geq 1 \\ P \in F_n}} \frac{|P|^\alpha}{h_n(P)} = \inf_{\substack{n \geq 1 \\ P \in F_n}} \frac{|P_k|^\alpha}{h_{n+k}(P_k)} = \inf_{\substack{n \geq 1 \\ P \in F_n}} \frac{|P \cap E|^\alpha}{h_n(P)}$$

car $\bigcap_{k=1}^\infty P_k = P \cap E$, et par conséquent $H^\alpha(E)$ ne dépend pas de O .

5. Résultats et conjectures sur l'évaluation de $H^\alpha(E)$

5.1. Les parfaits isotypiques: Ce sont les parfaits à similitude interne décomposables en portions (strictement disjointes). Un tel parfait E est déterminé par des similitudes contractantes $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$ de rapports $\xi_1, \dots, \xi_\nu$ telles que $\varphi_i(E) \cap \varphi_j(E) = \emptyset$ si $i \neq j$. On dira plus précisément que E est un parfait

isotypique de type $(\nu, \xi_1, \dots, \xi_\nu)$. La condition de Moran est automatiquement satisfaite de sorte que $\dim E = \alpha$ où $\xi_1^\alpha + \dots + \xi_\nu^\alpha = 1$. Posons $\tau = \min_{i \neq j} \text{dist}(\varphi_i(E), \varphi_j(E))$. On peut supposer que $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_\nu$ (quitte à renuméroter les indices).

De plus, redéfinissons les compacts fondamentaux d'ordre n comme étant les portions de E qui s'écrivent $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E)$ où $i_\ell \in \{1, \dots, \nu_\ell\}$ pour $\ell = 1, \dots, n$, et rajustons la définition des parties simples en conséquence. Nous avons obtenu les résultats suivants: (cf. [13], [10])

THÉOREME 4. Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est un parfait isotypique de type $(\nu, \xi_1, \dots, \xi_\nu)$ et de dimension $\alpha < 1$, alors

$$H^\alpha(E) = \min_{P \in \mathcal{F}_{n_0}} \frac{|P|^\alpha}{h_{n_0}(P)}$$

où

$$n_0 = \min\{n: |E| \leq \tau \xi_1 \xi_\nu^{n(\alpha-1)}\}.$$

N.B.: Le calcul de $H^\alpha(E)$, dans ce cas particulier, se fait donc sans "passage à la limite".

THÉOREME 5. Soit E un parfait isotypique sur la droite. On a

$$H^\alpha(E) = |E|^\alpha \iff \min_{P \in \mathcal{F}_1} \frac{|P|^\alpha}{h_1(P)} = |E|^\alpha.$$

N.B.: Ceci donne les conditions de maximalité de $H^\alpha(E)$ lorsque $E \subset \mathbb{R}^1$.

EXEMPLE. Soit E le parfait isotypique linéaire de type $(2, \xi_1, \xi_2)$ de diamètre 1 construit sur $[0, 1]$.



On a $H^\alpha(E) = 1$ où $\xi_1^\alpha + \xi_2^\alpha = 1$. En posant $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, on retrouve un résultat de Hausdorff [5] sur les ensembles parfaits homogènes de type $(2, \xi)$. En particulier, si $\xi = 1/3$, E est l'ensemble triadique de Cantor et sa dimension est

$$\alpha = \log 2 / \log 3.$$

5.2. Les parfaits homogènes de type (ν, ξ) : Ce sont les parfaits à similitude interne définis par des ensembles de ν similitudes de rapport ξ vérifiant la condition de Moran.

a) cas linéaire (entièrement résolu): Soit $E \subset \mathbb{R}^1$ un parfait homogène de type (ν, ξ) , de diamètre 1, porté par $[0, 1]$. On sait que E est de dimension $\alpha = -\log \nu / \log \xi$. Pour tout $k \geq 1$, posons $n_k = \min\{n: \nu^n \geq k\}$ et notons d_k le diamètre minimal d'une réunion de k intervalles fondamentaux d'ordre $n_k + 1$. On a ([14], [9])

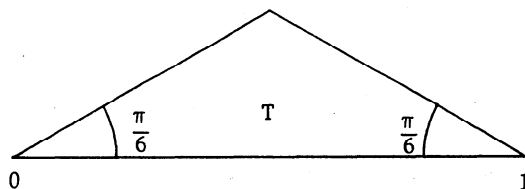
$$\text{THÉORÈME 6. } H^\alpha(E) = \min_{1 \leq k \leq \nu^{n_k+1}} k^{-1} \nu^{n_k+1} d_k^\alpha.$$

REMARQUE. On peut donc calculer $H^\alpha(E)$ directement à partir de la position des intervalles fondamentaux restant après au plus $\nu + 2$ étapes de dissection de l'intervalle initial $[0, 1]$.

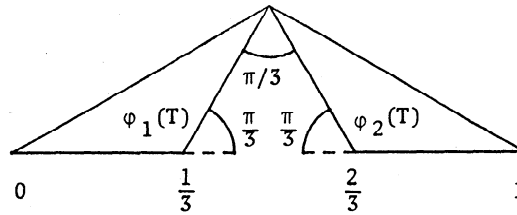
b) dans le plan (où le problème n'est pas complètement résolu): Nous considérons deux exemples bien connus.

(i) La courbe de von Koch classique: ([8]).

Soit T le triangle isocèle



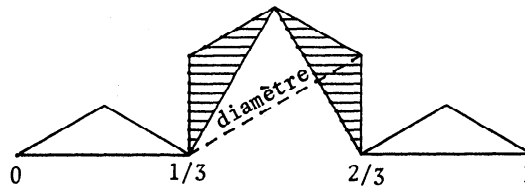
La courbe de von Koch construite au-dessus de $[0, 1]$ est un parfait homogène E de type $(2, 1/\sqrt{3})$ déterminé par deux similitudes ϕ_1 et ϕ_2 de rapport $1/\sqrt{3}$ telles que $\phi_1(T)$ et $\phi_2(T)$ occupent les positions indiquées ci-dessous:



On sait que $\dim E = \alpha = \log 2 / \log(1/\sqrt{3}) = \log 4 / \log 3$. Nous faisons la *conjecture* suivante:

$$H^\alpha(E) = 2^{\alpha-2} \quad (\simeq 0.5995).$$

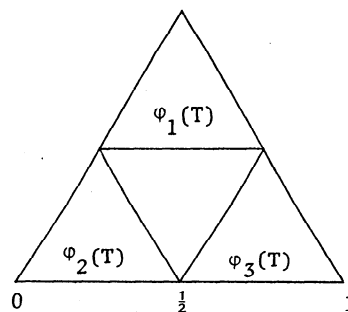
Motivation: Dans le diagramme ci-dessous, soit P_0 la partie simple d'ordre 2 correspondant à la région hachurée.



On a $|P_0| = 2\sqrt{3}/9$ et $h_2(P_0) = \frac{1}{2}$, d'où $|P_0|^\alpha / h_2(P_0) = 2^{\alpha-2}$. Après le calcul du rapport $|P|^\alpha / h_n(P)$ pour plusieurs parties simples $P \in F_n$, cette valeur de $2^{\alpha-2}$ semble minimale.

(ii) L'ensemble résiduel pour le "packing" ou "l'empilement" d'Eggleston: ([3]).

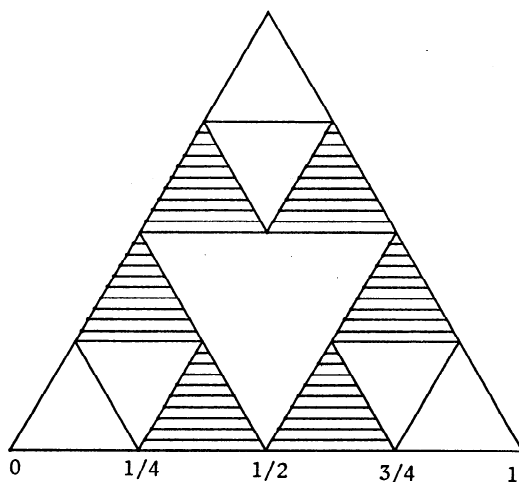
Soit T le triangle équilatéral de côté 1, et E le parfait homogène de type $(3, \frac{1}{2})$ associé aux similitudes φ_1, φ_2 et φ_3 définies par le diagramme suivant:



On a $\dim E = \log 3 / \log 2$, et nous faisons la conjecture suivante:

$$H^\alpha(E) = 3^\alpha / 6 \quad (\approx 0.951).$$

Motivation:



Pour la partie simple P_0 (région hachurée) on a $|P_0| = 3/4$ et $h_2(P_0) = 2/3$ d'où $|P_0|^\alpha / h_2(P_0) = 3^\alpha / 6$. Après divers calculs, cette valeur semble être le minimum des rapports $|P|^\alpha / h_n(P)$ où $P \in F_n$ et $n \geq 1$.

Bibliographie

- [1] BEARDON, A.F., *On the Hausdorff dimension of general Cantor sets*, Proc. Camb. Phil. Soc. 61(1965), 679-694.
- [2] EGGLESTON, H.G., *The fractional dimension of a set defined by decimal properties*, Q.J. Math. Oxford 20(1949), 31-36.
- [3] EGGLESTON, H.G., *On closest packing by equilateral triangles*, Proc. Camb. Phil. Soc. 49(1953), 26-30.
- [4] GALAMBOS, J., *Representations of Real Numbers by Infinite Series*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [5] HAUSDORFF, F., *Dimension und äusseres Mass*, Math. Ann. 79(1919), 157-179.

- [6] HUTCHINSON, J.E., *Fractals and self-similarity*, Indiana University Math. J., Vol. 30, No. 5(1981), 713-747.
- [7] KAHANE, J.P., SALEM, R., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris, Hermann, 1963.
- [8] MANDELBROT, B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [9] MARION, J., *Mesures de Hausdorff*, Thèse (Ph.D.), Université d'Ottawa, 1978.
- [10] MARION, J., *Calcul de la mesure de Hausdorff des sous-ensembles parfaits isotypiques de $\mathbb{R}^m$* , C.R. Acad. Sc., Paris, T. 289, Série A(1979), 65-68.
- [11] MARION, J., *Dimensions et mesures de Hausdorff des ensembles parfaits isotypiques*, Thèse (D.Sc.), Université de Genève, 1980.
- [12] MARION, J., *Sur la mesure de Hausdorff des ensembles parfaits de translation et de certains ensembles analogues*, C.R. Acad. Sc., Paris, T. 292, Série I (1981), 263-266.
- [13] MARION, J., *Mesure de Hausdorff d'un fractal à similitude interne*, Ann. sc. math. Québec, Vol. 10, No 1(1986), 51-84.
- [14] MARION, J., *Calcul de la mesure de Hausdorff des ensembles parfaits homogènes linéaires*, Rapport de recherche du Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, 1986.
- [15] MORAN, P.A.P., *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*, Proc. Camb. Phil. Soc. 42(1946), 15-23.
- [16] ROGERS, C.A., *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.
- [17] SAFFARI, B., *Communication personnelle*, 1977.
- [18] VOLKMANN, B., *Über die Hausdorffsche Dimension von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind (V)*, Math. Zeitschrift 65(1956), 389-413.

690, rue Filiatrault
Ste-Dorothée, Québec
Canada H7X 2J4

Manuscrit reçu le 22 juin 1986.