

ENVELOPPE CONVEXE D'UNE COURBE DE MANDELBROT

Serge Dubuc et Abdelkader Elqortobi

Résumé

L'enveloppe convexe d'une courbe de Mandelbrot est déterminée par sa fonction d'appui h . Nous donnons l'équation fonctionnelle dont h est l'unique solution bornée et nous exposons ensuite deux séries d'approximations de la fonction h , une série naturelle et une raffinée. Nous dégagons les principales propriétés de chacune des séries. Nous appliquons ces résultats à une classe particulière de courbes de Mandelbrot, celles dont les angles des similitudes sont commensurables avec π . Nous démontrons que l'enveloppe convexe de ces courbes est nécessairement un polygone convexe. Dans ce cas, le calcul de la fonction d'appui est un problème purement algébrique que l'on peut résoudre en un nombre fini d'étapes.

Abstract

The convex hull of a Mandelbrot curve is determined by its supporting function h . A functional equation for which h is the unique bounded solution is given and two approximating sequences for h are found. Basic properties of both sequences are described. These results are applied to a particular class of Mandelbrot curves, those whose similarity angles are rational with respect to π . We show that the convex hull of these curves is always a convex polygon. In this case, the

Mots-clé: Convexes du plan, courbes spéciales, équations fonctionnelles.

Classification: AM.S.S. 52A10, 14H45, 39B10.

computation of the supporting function is an algebraic problem which can be solved in a finite number of steps.

1. Introduction

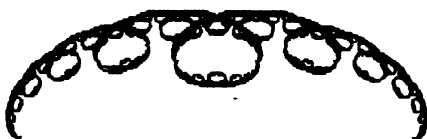
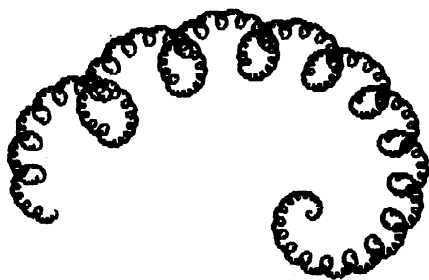
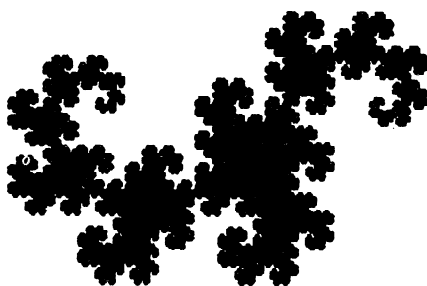
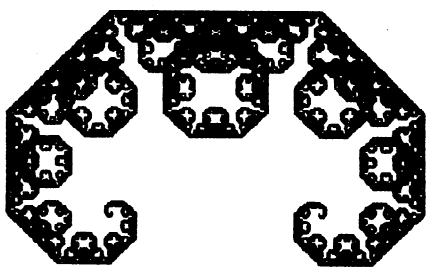
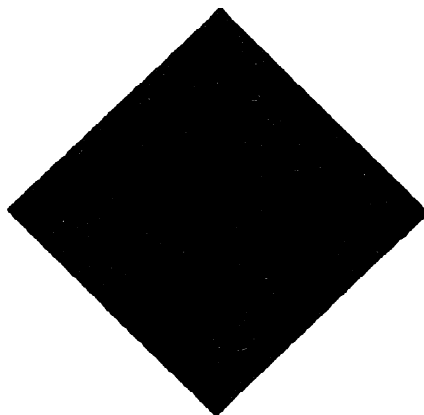
Nous entendons par courbe de Mandelbrot une courbe continue C formée de p arcs $C_0, C_1, \dots, C_{p-1}$ tels que chacun des arcs est semblable à la courbe totale. Pour être plus précis, nous supposons que la courbe C est donnée par une paramétrisation $t \mapsto z(t)$ où t varie dans l'intervalle-unité $[0, 1]$; $z(t)$ sera le point correspondant du plan complexe. La restriction de $z(t)$ à l'intervalle $[k/p, (k+1)/p]$ donnera l'arc C_k . Pour chacun des arcs C_k , un sens s_k direct ou indirect est retenu. La similitude exigée de l'arc C_k revient à dire que la relation suivante est satisfaite: pour tout t de $[k/p, (k+1)/p]$,

$$(1) \quad \begin{aligned} z(t) &= a_k + d_k z(pt - k) && \text{si } s_k \text{ est direct} \\ z(t) &= a_k + d_k z(k+1-pt) && \text{si } s_k \text{ est indirect.} \end{aligned}$$

Si z_k désigne successivement les points $z(k/p)$, $k = 0, 1, \dots, p$, les nombres a_k et d_k sont déterminés par les points z_k et les sens s_k selon les relations

$$\begin{aligned} a_k + d_k z_0 &= z_k \quad \text{et} \quad a_k + d_k z_p = z_{k+1} && \text{si } s_k \text{ est direct et} \\ a_k + d_k z_p &= z_k \quad \text{et} \quad a_k + d_k z_0 = z_{k+1} && \text{si } s_k \text{ est indirect.} \end{aligned}$$

C'est Mandelbrot [3] qui a exposé ce modèle de courbes dans toute cette généralité. Nous présentons ici le graphique de six courbes de Mandelbrot; les quatre premières sont classiques, les deux dernières ont déjà été décrites par le premier auteur [2]. Il s'agit respectivement des courbes de von Koch, de Peano, de la courbe en C de Gosper, du dragon de Harter-Heightway, d'une dentelle et de la courbe intitulée solidarité.



Échantillon de courbes de Mandelbrot

Par souci de complétude, nous donnons les lignes polygonales $\{z_k\}$ de chacune de ces courbes: la ligne polygonale de la courbe de von Koch est: $\{0, 1/3, 1/2 + i\sqrt{3}/6, 2/3, 1\}$, celle de Peano est formée de dix points: $\{0, 1/3, 1/3 + i/3, 2/3 + i/3, 2/3, 1/3, 1/3 - i/3, 2/3 - i/3, 2/3, 1\}$, celle de Gosper: $\{0, 1/2 + i/2, 1\}$, celle du dragon: $\{0, 1/2 - i/2, 1\}$, celle de la dentelle: $\{0, 0,193 + i0,360, 1\}$ et celle de la courbe dite de solidarité: $\{0, 3/5 + i/5, 2/5 + i/5, 1\}$. Toutes les courbes, à l'exception du dragon, ont leurs segments orientés dans le sens direct. Le premier segment du dragon est orienté dans le sens direct, le second dans le sens indirect.

Décrivons brièvement les grandes lignes de cet exposé. Etant donnée une courbe $z(t)$ de Mandelbrot, nous nous proposons d'étudier son enveloppe convexe. Cette enveloppe convexe est caractérisée par la fonction d'appui de la courbe. Si θ est un angle entre 0 et 2π , on pose

$$h(\theta) = \sup\{\operatorname{Re} z(t)e^{-i\theta} : t \in [0,1]\}.$$

Un point $re^{i\varphi}$ du plan complexe appartient à l'enveloppe convexe si et seulement si pour tout θ , $\operatorname{Re} re^{i(\varphi-\theta)} = r \cos(\varphi-\theta) \leq h(\theta)$.

1) Notre recherche consiste à expliciter la fonction h . Nous donnerons une équation fonctionnelle dont h est l'unique solution bornée.

2) Nous nous attarderons ensuite sur deux séries d'approximations de la fonction h . La première série est simple à calculer, la seconde sera plus compliquée, mais permettra de produire de meilleures approximations. Nous dégagerons les principales propriétés de chacune des séries.

3) Nous appliquerons ensuite ces résultats à une classe particulière de courbes de Mandelbrot. Ces courbes seront celles dont les angles de la forme polaire des nombres d_k sont commensurables avec le nombre π . Nous démontrerons que l'enveloppe convexe de ces courbes est nécessairement un polygone convexe. Nous établirons aussi que dans ce cas, le calcul de la fonction d'appui est un problème purement algébrique que l'on peut résoudre en un nombre fini d'étapes.

2. L'équation fonctionnelle associée à une courbe de Mandelbrot

Bajraktarević [1] a proposé l'équation fonctionnelle suivante

$$(2) \quad x(t) = f(t, x(\beta(t))).$$

Ici t varie dans l'intervalle $[0,1]$, $x(t)$ varie dans un espace métrique complet X , $f(t,x)$ est une fonction donnée de deux variables, $\beta(t)$ est une transformation donnée de $[0,1]$, $x(t)$ est la fonction inconnue à expliciter. Sous l'hypothèse que les fonctions $x \rightarrow f(t,x)$ sont des contractions uniformes de l'espace métrique X , l'équation fonctionnelle admet une et une seule solution bornée $x(t)$. Cette solution peut être obtenue comme limite uniforme de la suite de fonctions $x_n(t)$ issue du choix arbitraire d'une fonction bornée $x_0(t)$: $x_{n+1}(t) = f(t, x_n(\beta(t)))$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Dans le cas des courbes de Mandelbrot de paramètres $\{z_k, s_k\}_{k=0, p-1}$, voici comment on peut choisir la fonction β : si $k/p \leq t < (k+1)/p$,

$$\begin{aligned} \beta(t) &= pt - k & \text{si } s_k \text{ est direct et} \\ \beta(t) &= k + 1 - pt & \text{si } s_k \text{ est indirect.} \end{aligned}$$

La fonction $f(t,x)$ sera ainsi spécifiée: si k est un entier compris entre 0 et $p-1$, si t appartient à l'intervalle $[k/p, (k+1)/p[$, alors $f(t,z) = a_k + d_k z$. La condition de contraction pour la fonction f est satisfaite lorsque chacun des nombres d_k est inférieur à un en module; cette hypothèse sur les modules des d_k est toujours requise pour les courbes de Mandelbrot.

3. Fonction d'appui d'une courbe de Mandelbrot

Soit $z(t)$ une courbe de Mandelbrot, nous nous proposons d'étudier la fonction d'appui de celle-ci. Nous posons donc

$$h(\theta) = \sup\{\operatorname{Re} z(t)e^{-i\theta} : t \in [0,1]\}.$$

A partir des quantités a_k et d_k , nous définissons des fonctions $\alpha_k(\theta)$ et des quantités δ_k et τ_k . $\alpha_k(\theta)$ est le polynôme trigonométrique de degré un: $\operatorname{Re} a_k e^{-i\theta}$ et $\delta_k e^{i\tau_k}$ est la forme polaire du nombre complexe d_k .

LEMME 1. La fonction d'appui d'une courbe de Mandelbrot satisfait la relation fonctionnelle

$$(3) \quad h(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k h(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de faire appel à la relation (1).

$$h(\theta) = \sup\{\operatorname{Re} z(t) e^{-i\theta} : t \in [0, 1]\}$$

$$h(\theta) = \sup\{\operatorname{Re}(a_k + d_k z(t)) e^{-i\theta} : t \in [0, 1], k = 0, 1, \dots, p-1\}$$

$$h(\theta) = \max\{\sup\{\operatorname{Re}(a_k + d_k z(t)) e^{-i\theta} : t \in [0, 1]\} : k = 0, 1, \dots, p-1\}$$

$$h(\theta) = \max\{\sup\{\alpha_k(\theta) + \delta_k \operatorname{Re}(z(t) e^{-i(\theta - \tau_k)}) : t \in [0, 1]\} : k = 0, 1, \dots, p-1\}$$

$$h(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k \sup\{\operatorname{Re}(z(t) e^{-i(\theta - \tau_k)}) : t \in [0, 1]\} : k = 0, 1, \dots, p-1\}$$

$$h(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k h(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}. \quad \square$$

L'étape suivante consiste à vérifier que l'équation fonctionnelle (3) caractérise l'enveloppe convexe de la courbe de Mandelbrot. Avant d'y arriver, il faut établir qu'une enveloppe supérieure d'un nombre fini de contractions est aussi une contraction.

Le prochain résultat est peut-être déjà connu dans la littérature, mais faute de référence, nous en donnons la démonstration.

LEMME 2. Soient X un ensemble donné et $T_1, T_2, \dots, T_n$ n contractions sur l'espace $B(X)$ des fonctions réelles bornées définies sur X , espace que l'on munit de la métrique de la convergence uniforme. Alors la transformation $Tf(x) = \max\{T_k(f)(x) : k = 1, 2, \dots, n\}$ est une contraction de $B(X)$.

DÉMONSTRATION. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions réelles bornées définies sur X . Désignons par δ la norme de $f-g$: $\delta = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$. Désignons par $f_1, f_2, \dots, f_n$ et par $g_1, g_2, \dots, g_n$ les images respectives de f et de g par

les transformations T_k . L'hypothèse de contraction uniforme nous permet de trouver une constante c telle que $\|f_k - g_k\| < c\delta$ pour chacune des valeurs de k . Désignons par $f^*(x) = \max\{f_k(x)\}_{k=1,\dots,n}$ et par $g^*(x) = \max\{g_k(x)\}_{k=1,\dots,n}$. Vérifions que $\|f^* - g^*\| < c\delta$. Si x est un point de X , si r et s sont des entiers pour lesquels $f^*(x) = f_r(x)$ et $g^*(x) = g_s(x)$, alors $f^*(x) - g^*(x) = f_r(x) - g_s(x) \leq f_r(x) - g_r(x)$, car $g_r(x) \leq g_s(x)$. D'où l'inégalité $f^*(x) - g^*(x) \leq c\delta$. D'autre part, $f^*(x) - g^*(x) = f_r(x) - g_s(x) \geq f_s(x) - g_s(x)$, car $f_r(x) \geq f_s(x)$, si bien que $f^*(x) - g^*(x) \geq -c\delta$. On a donc montré que $|f^*(x) - g^*(x)| \leq c\delta$. $\square$

THÉOREME 3. *La fonction d'appui d'une courbe de Mandelbrot est l'unique fonction bornée $h(\theta)$ qui satisfait la relation*

$$(3) \quad h(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k h(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}.$$

DÉMONSTRATION. Si X est le tore unidimensionnel, $[0, 2\pi]$, où les valeurs 0 et 2π sont identifiées, la courbe de Mandelbrot est l'occasion de p transformations sur l'espace $B(X)$ des fonctions bornées sur X : si $f(\theta)$ est une fonction bornée, on peut poser $T_k f(\theta) = \alpha_k(\theta) + \delta_k f(\theta - \tau_k)$. Par hypothèse, chacun des nombres δ_k est inférieur à un; T_k est donc une contraction. Par le Lemme 2, la transformation $Tf(\theta) = \max\{T_k f(\theta)\} = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k f(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}$ est une contraction. Toute solution à la relation (3) est un point fixe de la contraction T . Le caractère contractif de T ne laisse la possibilité que d'un point fixe.

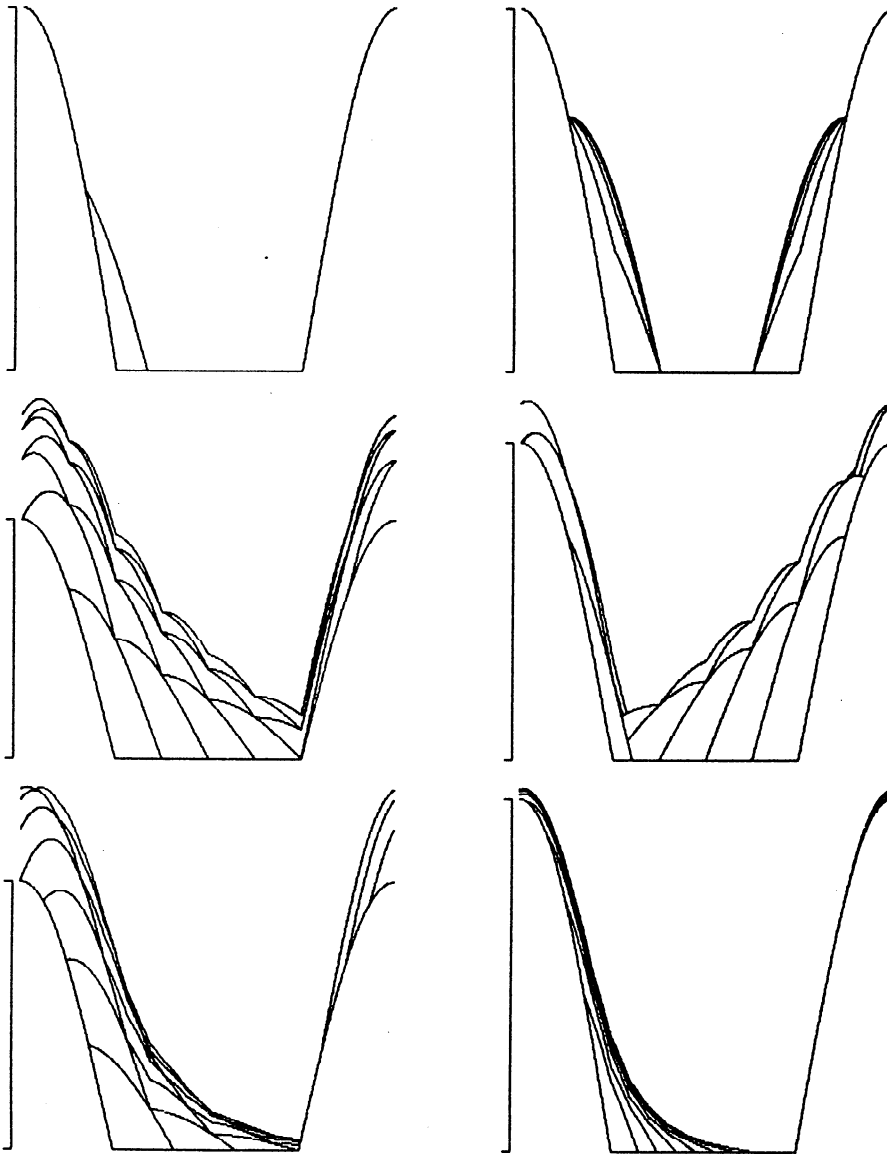
Il est possible d'approcher la fonction d'appui $h(\theta)$ de la courbe de Mandelbrot de la façon suivante: on choisit une fonction $h_0(\theta)$ et on provoque la récurrence

$$h_{n+1}(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k h_n(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}.$$

Le principe des contractions de Banach nous assure que la suite $h_n(\theta)$ approche $h(\theta)$ de mieux en mieux: $|h_n(\theta) - h(\theta)| \leq \delta^n \|h_0(\theta) - h_1(\theta)\| / (1 - \delta)$ où le nombre δ est le maximum des δ_k . Si le choix de $h_0(\theta)$ se porte sur la fonction d'appui de l'intervalle-unité de l'axe réel, $h_0(\theta) = \max(\cos \theta, 0)$ et la fonction

$h_n(\theta)$ est la fonction d'appui de la ligne polygonale $z_n(t)$ d'ordre n qui approche la courbe de Mandelbrot selon le schéma de résolution de l'équation de Bajraktarević.

La prochaine série de graphiques fournit les huit premières approximations de la fonction d'appui des six courbes de Mandelbrot déjà citées.



Approximations monotones de la fonction d'appui de courbes de Mandelbrot

4. Propriétés de la première série d'approximations de h

Mettons en évidence la transformation

$$Tf(\theta) = \max\{T_k f(\theta)\} = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k f(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}.$$

La fonction d'appui d'une courbe de Mandelbrot est l'unique point fixe de la transformation T . La positivité des nombres δ_k joue un grand rôle dans les propriétés de monotonie de T . Nous donnons aussi une interprétation géométrique à la transformation T . Nous énumérons sans démonstration ces propriétés. Dans chacun des cas, les démonstrations sont simples.

LEMME 4. Soit $h(\theta)$ la fonction d'appui d'une courbe de Mandelbrot, soit $f(\theta)$ une fonction bornée à laquelle on associe la fonction g :

$$g(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k f(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}.$$

Si $f(\theta)$ est entièrement majorée (respectivement minorée) par $h(\theta)$, alors $g(\theta)$ est entièrement majorée (respectivement minorée) par $h(\theta)$.

LEMME 5. Soit $f(\theta)$ une fonction bornée à laquelle on associe la fonction $g = Tf$, si $f(\theta)$ est entièrement majorée (respectivement minorée) par $g(\theta)$, alors la suite $T^n f$ est une suite non décroissante (respectivement non croissante) de fonctions.

LEMME 6. Soient $z \mapsto S_k(z) = a_k + d_k z$, $k = 0, 1, \dots, p-1$, les p similitudes génératrices de la courbe de Mandelbrot. Si $f(\theta)$ est la fonction d'appui d'une partie bornée B du plan et si on lui associe la fonction $g = Tf$, alors $g(\theta)$ est la fonction d'appui de la réunion des images de B par chacune des similitudes S_k .

5. Premier algorithme pour déterminer l'enveloppe convexe

Pour tracer l'enveloppe convexe d'une courbe de Mandelbrot à partir de la fonction d'appui h , il y a avantage à trouver pour chaque angle θ un point $w(\theta)$

de la courbe tel que $\operatorname{Re} w(\theta)e^{-i\theta} = h(\theta)$. Le tracé d'une ligne "polygonale" à partir de w produira l'enveloppe convexe cherchée. Soit $w_0(\theta)$ une fonction définie sur le tore unidimensionnel à valeurs dans le plan, on supposera de cette fonction qu'elle est bornée. A cette fonction, on associera une fonction réelle $f(\theta)$:

$f_0(\theta) = \operatorname{Re}[w_0(\theta)e^{-i\theta}]$. Nous posons

$$f_1(\theta) = \max\{\operatorname{Re} a_k + d_k w_0(\theta - \tau_k) e^{-i\theta} : k = 0, 1, \dots, p-1\},$$

$$f_1(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k \operatorname{Re} w_0(\theta - \tau_k) e^{-i(\theta - \tau_k)} : k = 0, 1, \dots, p-1\},$$

$$f_1(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k f_0(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}.$$

Si θ est une valeur donnée, si k est un des entiers pour lequel la partie réelle de $a_k + d_k w_0(\theta - \tau_k) e^{-i\theta}$ est égale à $f_1(\theta)$, on retient le point $w_1(\theta) = a_k + d_k w_0(\theta - \tau_k)$. Si un seul entier k remplit la condition voulue, $w_1(\theta)$ est bien définie. Si plusieurs entiers k remplissent la condition voulue, le choix de $w_1(\theta)$ est soumis à une dose d'arbitraire.

Par récurrence, on construit deux suites de fonctions, $w_n(\theta)$ et $f_n(\theta)$. $w_0(\theta)$ est une fonction bornée arbitraire et $f_0(\theta) = \operatorname{Re}[w_0(\theta)e^{-i\theta}]$.

$$f_{n+1}(\theta) = \max\{\operatorname{Re} a_k + d_k w_n(\theta - \tau_k) e^{-i\theta} : k = 0, 1, \dots, p-1\}$$

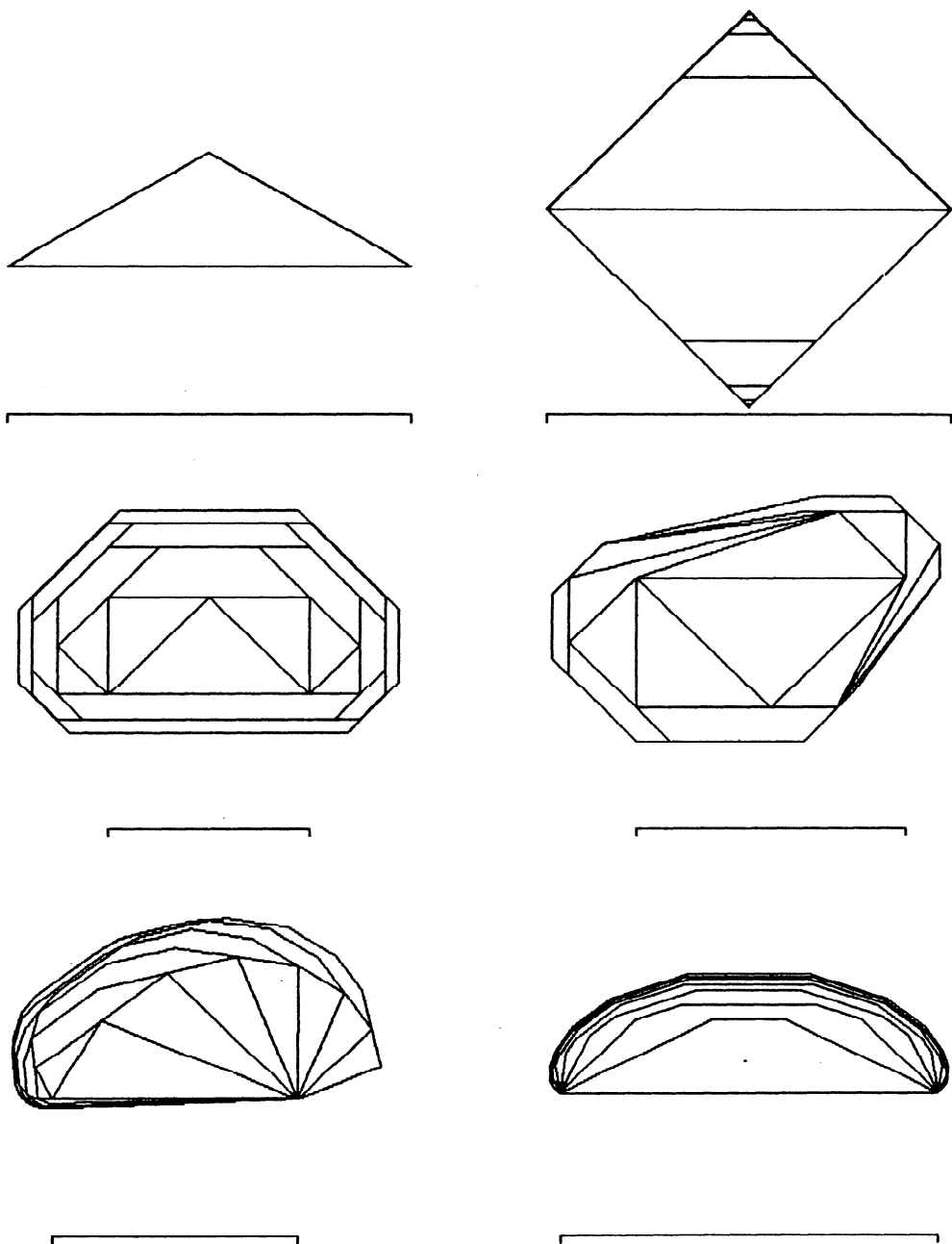
$w_{n+1}(\theta)$ est égal à $a_k + d_k w_n(\theta - \tau_k)$ si $\operatorname{Re}[a_k + d_k w_n(\theta - \tau_k)]e^{-i\theta}$ est égal à $f_{n+1}(\theta)$.

THÉOREME 7. La suite de fonctions $\operatorname{Re}[w_n(\theta)e^{-i\theta}]$ converge vers la fonction d'appui de la courbe de Mandelbrot.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que $f_n(\theta) = \operatorname{Re}[w_n(\theta)e^{-i\theta}]$ et que $f_{n+1}(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k f_n(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}$. Nous avons déjà indiqué que la suite $f_n(\theta)$ converge vers la fonction d'appui de la courbe de Mandelbrot. $\square$

Pour produire la suite des enveloppes convexes des lignes polygonales habituelles successives qui approchent la courbe de Mandelbrot, il suffit de choisir $w_0(\theta)$ de la façon suivante: $w_0(\theta)$ vaut 0 si θ est compris entre $\pi/2$ et

$3\pi/2$, pour les autres valeurs de θ , $w_0(\theta)$ vaut 1. La prochaine série de graphiques expose les traces des huit premières approximations $w_n(\theta)$ pour chacune des courbes de Mandelbrot déjà décrites.



Approximations d'enveloppes convexes de courbes de Mandelbrot (1)

Commentons quelque peu les enveloppes convexes obtenues ainsi que les fonctions d'appui correspondantes. On peut remarquer que l'enveloppe convexe de la courbe de von Koch est déjà obtenue par $w_1(\theta)$, c'est un triangle isocèle. La courbe de von Koch et la courbe de Peano sont les seules courbes de l'échantillon à être entièrement situées dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$, c'est pourquoi leur fonction d'appui s'annule pour des angles compris entre $\pi/2$ et $3\pi/2$. Malgré son apparence graphique, la fonction d'appui de la courbe de solidarité ne s'annule en aucun endroit. Il est également faux que la courbe de solidarité soit entièrement située dans le demi-plan $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$.

6. Seconde série d'approximations de la fonction d'appui

Nous exposons une manière plus compliquée d'approcher la fonction $h(\theta)$. Cette complication donne le bénéfice de produire des approximations plus précises.

Revenons à la relation (3). Celle-ci permet d'associer à chaque angle un indice $k(\theta)$ compris entre 0 et $p-1$ tel que

$$(4) \quad h(\theta) = \alpha_{k(\theta)}(\theta) + \delta_{k(\theta)} h(\theta - \tau_{k(\theta)}).$$

Cette relation établit une relation linéaire entre les nombres $h(\theta)$. Si pour tout angle θ , l'indice $k(\theta)$ était connu, on pourrait déterminer la fonction $h(\theta)$ de façon simple.

Partons d'une fonction $c(\theta)$ qui à chaque angle θ , choisit un indice parmi $0, 1, \dots, p-1$. Nous suggérons de considérer trois relations fonctionnelles fondées sur le choix $c(\theta)$:

$$(5) \quad G(\theta) = \alpha_{c(\theta)}(\theta) + \delta_{c(\theta)} G(\theta - \tau_{c(\theta)})$$

$$(6) \quad W(\theta) = a_{c(\theta)} + d_{c(\theta)} W(\theta - \tau_{c(\theta)})$$

$$(7) \quad \beta(t(\theta)) = t(\theta - \tau_{c(\theta)}) \quad \text{et} \quad c(\theta) \leq pt(\theta) \leq c(\theta) + 1.$$

Les fonctions inconnues G , W et t sont définies sur le tore unidimen-

sionnel et prennent respectivement leurs valeurs dans les réels, les complexes et l'intervalle-unité.

THÉOREME 8. *Les relations (5), (6) et (7) admettent chacune une et une seule solution bornée. De plus, si $G(\theta)$, $W(\theta)$ et $t(\theta)$ sont les solutions respectives de ces relations et si $z(t)$ est la courbe de Mandelbrot, alors $w(\theta) = z(t(\theta))$ et $G(\theta) = \operatorname{Re}[W(\theta)e^{-i\theta}]$.*

DÉMONSTRATION. Attardons-nous d'abord à la résolution de la relation (7). Introduisons l'opérateur suivant T sur l'espace des fonctions définies sur le tore à valeurs dans $[0,1]$. $g(\theta) = Tf(\theta)$

$$g(\theta) = [c(\theta) + f(\theta - \tau_{c(\theta)})]/p \quad \text{si } s_{c(\theta)} \text{ est direct et}$$

$$g(\theta) = [c(\theta) + 1 - f(\theta - \tau_{c(\theta)})]/p \quad \text{si } s_{c(\theta)} \text{ est indirect.}$$

La relation (7) est équivalente à dire que $t(\theta)$ est un point fixe de la transformation T . Puisque $\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \|f_1 - f_2\|/p$, T est une contraction, le point fixe de T est unique et la relation (7) n'admet qu'une solution.

Pour discuter de la relation (6), on définit plutôt l'opérateur T sur l'espace des fonctions complexes bornées: $Tf = g$

$$g(\theta) = a_{c(\theta)} + d_{c(\theta)} f(\theta - \tau_{c(\theta)}).$$

T est une contraction: $\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \delta \|f_1 - f_2\|$ où δ est le maximum des modules des nombres d_k . T admet un unique point fixe qui produit la solution de (6). Si $t(\theta)$ est la solution de la relation (7), l'équation fonctionnelle (2) satisfaite par la courbe $z(t)$ de Mandelbrot montre que $W(\theta) = z(t(\theta))$ est alors la solution de la relation (6).

Pour discuter de la récurrence (5), on définit plutôt l'opérateur T sur l'espace des fonctions réelles bornées: $Tf = g$

$$g(\theta) = \alpha_{c(\theta)}(\theta) + \delta_{c(\theta)} f(\theta - \tau_{c(\theta)}).$$

T est une contraction: $\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \delta \|f_1 - f_2\|$ où δ est le maximum des modules des nombres d_k . T admet un unique point fixe qui produit la solution de (5). Si $W(\theta)$ est la solution de la relation (6), $G(\theta) = \operatorname{Re}[W(\theta)e^{-i\theta}]$ donnera la solution de (5). En effet,

$$\begin{aligned} W(\theta)e^{-i\theta} &= [a_{c(\theta)} + d_{c(\theta)}W(\theta-\tau_{c(\theta)})]e^{-i\theta} \\ W(\theta)e^{-i\theta} &= a_{c(\theta)}e^{-i\theta} + d_{c(\theta)}e^{-i\tau_{c(\theta)}}W(\theta-\tau_{c(\theta)})e^{-i(\theta-\tau_{c(\theta)})} \\ W(\theta)e^{-i\theta} &= a_{c(\theta)}e^{-i\theta} + \delta_{c(\theta)}W(\theta-\tau_{c(\theta)})e^{-i(\theta-\tau_{c(\theta)})} \\ \operatorname{Re}[W(\theta)e^{-i\theta}] &= \alpha_{c(\theta)}(\theta) + \delta_{c(\theta)}\operatorname{Re} W(\theta-\tau_{c(\theta)})e^{-i(\theta-\tau_{c(\theta)})} \\ G(\theta) &= \alpha_{c(\theta)}(\theta) + \delta_{c(\theta)}G(\theta-\tau_{c(\theta)}) \end{aligned}$$

$\operatorname{Re}[W(\theta)e^{-i\theta}]$ est bien la solution de la relation (5). $\square$

COROLLAIRE 9. Si G est une solution de la relation (5) et si h est la fonction d'appui de la courbe de Mandelbrot, alors G est majorée par h .

En effet, si G est une solution de la relation (5), si $z(t)$ est la courbe de Mandelbrot et si θ est un angle donné, alors il existe un nombre $t(\theta)$ tel que $G(\theta) = \operatorname{Re}[z(t(\theta))e^{-i\theta}]$. Puisque $h(\theta) = \sup\{\operatorname{Re} z(t)e^{-i\theta} : t \in [0,1]\}$, on a que $G(\theta) = h(\theta)$.

Indiquons maintenant une autre série d'approximation successives de la fonction d'appui d'une courbe de Mandelbrot. Si $f(\theta)$ est une fonction bornée, associée à f la fonction $Tf = g$:

$$g(\theta) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k f(\theta-\tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\}.$$

Pour chaque angle θ , faisons un choix définitif d'un entier $k = k(\theta)$ tel que $\alpha_k(\theta) + \delta_k f(\theta-\tau_k)$ est égal à $g(\theta)$. D'autre part, par le théorème précédent, il existe une et une seule fonction bornée $G(\theta)$

$$(5) \quad G(\theta) = \alpha_{k(\theta)}(\theta) + \delta_{k(\theta)}G(\theta-\tau_{k(\theta)}).$$

Nous venons de définir un opérateur U qui associe à la fonction f la fonction G . Ceci permet de construire une suite G_n par récurrence: $G_0 = f$ et $G_{n+1} = U(G_n)$. Nous allons montrer que la suite $G_n(\theta)$ est non décroissante. Si de plus $f \leq Tf$, la suite G_n donne de meilleures approximations de la fonction d'appui de la courbe de Mandelbrot que la suite $T^n(f)$.

THÉOREME 10. *Si G est une solution bornée de la relation (5), alors la double inégalité fonctionnelle $G \leq T(G) \leq U(G)$ a lieu.*

DÉMONSTRATION. L'équation fonctionnelle (5) montre que $G \leq T(G)$. Introduisons l'opérateur P rattaché au calcul de UG : ayant choisi une fonction $k(\theta)$ telle que

$$\alpha_{k(\theta)}(\theta) + \delta_{k(\theta)} G(\theta - \tau_{k(\theta)}) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k G(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\},$$

on pose $Pf = g$ où $g(\theta) = \alpha_{k(\theta)} + \delta_{k(\theta)} f(\theta - \tau_{k(\theta)})$.

Par définition de P , $PG = TG$. On a donc que $G \leq PG$. Parce que P est un opérateur non décroissant, la suite $P^n(G)$ est non décroissante. La limite de cette suite est la fonction $U(G)$ qui majorera $T(G)$. $\square$

COROLLAIRE 11. *Si f est une fonction bornée, la suite $U^n f$ est une suite non décroissante de fonctions qui convergent vers la fonction d'appui de la courbe de Mandelbrot.*

LEMME 12. *Si f est une fonction telle que $f \leq Tf$, alors $Tf \leq Uf$.*

DÉMONSTRATION. Introduisons l'opérateur P rattaché au calcul de Uf : ayant choisi une fonction $k(\theta)$ telle que

$$\alpha_{k(\theta)}(\theta) + \delta_{k(\theta)} f(\theta - \tau_{k(\theta)}) = \max\{\alpha_k(\theta) + \delta_k f(\theta - \tau_k) : k = 0, 1, \dots, p-1\},$$

on pose $Pf = \psi$ où $\psi(\theta) = \alpha_{k(\theta)} + \delta_{k(\theta)} f(\theta - \tau_{k(\theta)})$.

Par définition de P , $Pf = Tf$. Par hypothèse, $f \leq Tf$. Parce que P est un opérateur non décroissant, la suite $P^n f$ est non décroissante. La limite de cette suite est la fonction Uf . D'où l'inégalité $Tf \leq Uf$. $\square$

THÉOREME 13. Soit h la fonction d'appui de la courbe de Mandelbrot. Si f est une fonction telle que $f \leq Tf$, alors pour chaque entier naturel, on a toujours l'inégalité fonctionnelle $T^n f \leq U^n f \leq h$.

DÉMONSTRATION. Le Corollaire 9 justifie l'inégalité $U^n f \leq h$. Le lemme précédent établit l'inégalité $T^n f \leq U^n f$ pour $n = 1$. Pour les autres valeurs de n , raisonnons par induction. Si pour un entier donné n , $T^n f \leq U^n f$, alors $T^{n+1} f \leq TU^n f$, car T est un opérateur non décroissant. D'autre part, le Théorème 10 a montré que $U^n f \leq TU^n f \leq U^{n+1} f$ si bien que $T^{n+1} f \leq U^{n+1} f$. $\square$

La dernière série de graphiques illustre la supériorité du dernier algorithme lorsqu'il est utilisé pour le même groupe de courbes de Mandelbrot. Dans les cas traités, les enveloppes convexes des courbes sont obtenues en exactement deux ou trois étapes. Dans la prochaine section, nous expliquerons ce phénomène pour les quatre premières courbes.

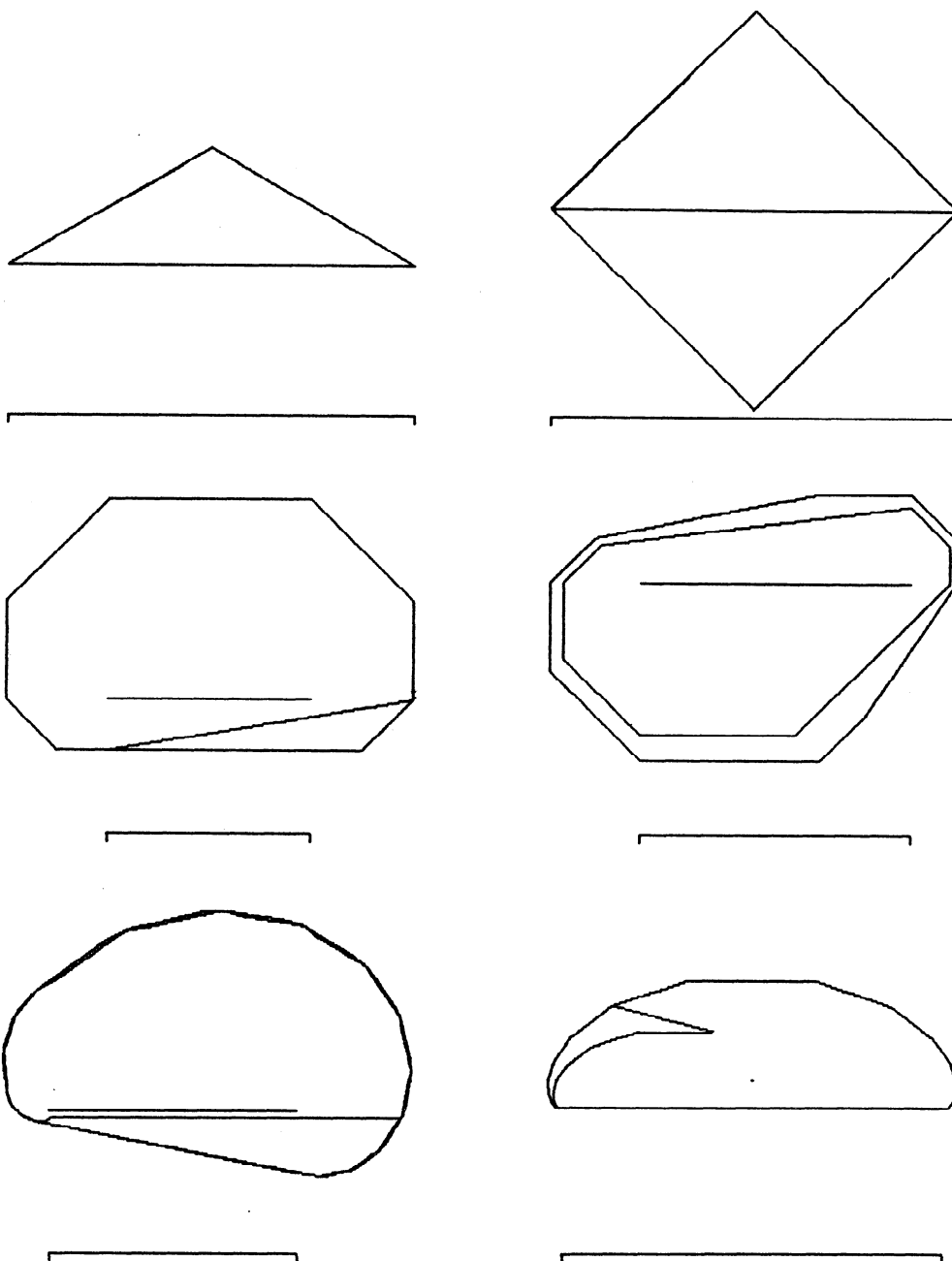
7. Enveloppe convexe d'une courbe rationnelle de Mandelbrot

Nous dirons qu'une courbe de Mandelbrot est rationnelle si les angles τ_k de la forme polaire des d_k sont commensurables avec π . Nous établirons que l'enveloppe convexe d'une courbe rationnelle de Mandelbrot est nécessairement un polygone convexe. De plus, nous verrons que la suite des approximations $U^n f$ atteint la fonction d'appui après un nombre fini d'étapes. Pour une courbe rationnelle, nous noterons par N le plus petit entier naturel tel que chacun des nombres $N\tau_k/(2\pi)$ est entier.

THÉOREME 14. L'enveloppe convexe d'une courbe rationnelle de Mandelbrot est un polygone convexe.

DÉMONSTRATION. Soit $h(\theta)$ la fonction d'appui de la courbe rationnelle $z(t)$ de Mandelbrot. A chaque angle θ , il existe un indice $k(\theta)$ compris entre 0 et $p-1$ tel que

$$(4) \quad h(\theta) = \alpha_{k(\theta)}(\theta) + \delta_{k(\theta)} h(\theta - \tau_{k(\theta)}).$$



Approximations d'enveloppes convexes de courbes de Mandelbrot (2)

Le Théorème 8 a montré qu'il existe une unique fonction t définie sur le tore unidimensionnel et prenant ses valeurs dans l'intervalle-unité telle que

$$(7) \quad \beta(t(\theta)) = t(\theta - \tau_{k(\theta)}) \quad \text{et} \quad k(\theta) \leq pt(\theta) \leq k(\theta) + 1.$$

Partons d'un angle fixe θ , posons $\Delta = 2\pi/N$ et distinguons N scalaires $t_1, t_2, \dots, t_N$: $t_j = t(\theta + j\Delta)$. Une permutation σ des N premiers entiers permet d'écrire que $t(\theta + j\Delta - \tau_{k(\theta + j\Delta)}) = t_{\sigma(j)}$ pour $1 \leq j \leq N$. Posons aussi $k_j = k(\theta + j\Delta)$. Avec cette notation, la relation (7) entraîne la relation

$$(8) \quad \beta(t_j) = t_{\sigma(j)} \quad \text{et} \quad k_j \leq pt_j \leq k_j + 1.$$

La relation (8) admet une solution unique selon les variables $t_1, t_2, \dots, t_N$. L'abscisse t_N coïncide avec $t(\theta)$. Faisons varier θ maintenant. Si dans la relation (8), on modifie les indices $(k_j)_{j=1, \dots, N}$ et que l'on choisit σ de façon convenable, on obtiendra un nouveau système linéaire régulier. Le nombre de systèmes linéaires que l'on peut former est p^N . Si L est la liste des abscisses t_N obtenues à partir de chacun des systèmes, L est un ensemble fini et la fonction $t(\theta)$, solution de (7), prend nécessairement ses valeurs dans L . Si T représente les valeurs prises par $t(\theta)$ lorsque θ parcourt $[0, 2\pi]$, alors T a une cardinalité finie.

Le Théorème 8 montre que $h(\theta) = \text{Re}[z(t(\theta))e^{-i\theta}]$. Par définition de la fonction d'appui, on sait déjà que pour tout t de T , $\text{Re}[z(t)e^{-i\theta}] \leq h(\theta)$. D'où $h(\theta) = \max\{\text{Re}[z(t)e^{-i\theta}]: t \in T\}$. La fonction h est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points, c'est un polygone convexe. $\square$

THÉOREME 15. Si h est l'enveloppe convexe d'une courbe rationnelle de Mandelbrot et si f est une fonction bornée, alors il existe un entier n tel que $U^n f = h$.

DÉMONSTRATION. Posons $G_n = U^n f$. Partons d'une valeur donnée de n . G_n satisfait la relation (5) attachée à une fonction $c(\theta)$:

$$(5) \quad G_n(\theta) = \alpha_{c(\theta)}(\theta) + \delta_{c(\theta)} G_n(\theta - \tau_{c(\theta)}).$$

Prenons un angle fixe θ , posons $\Delta = 2\pi/N$ et distinguons N scalaires $g_1, g_2, \dots, g_N$: $g_j = G_n(\theta + j\Delta)$. Une permutation σ des N premiers entiers permet d'écrire que $G_n(\theta + j\Delta - \tau_{c(\theta + j\Delta)}) = g_{\sigma(j)}$ pour $1 \leq j \leq N$. Posons aussi $\alpha_j^* = \alpha_{c(\theta + j\Delta)}(\theta + j\Delta)$, $\delta_j^* = \delta_{c(\theta + j\Delta)}$. Avec cette notation, la relation (5) entraîne la relation

$$(9) \quad g_j = \alpha_j^* + \delta_j^* g_{\sigma(j)}.$$

Le système linéaire (9) admet une solution unique.

Faisons varier n maintenant. A chaque valeur de n , on associera un système linéaire du type (9). Si n s'étend de 1 à $p^N + 1$, un même système apparaîtra au moins deux fois. Ceci vient du fait que les paramètres du système (9) dépendent essentiellement des valeurs $\{c(\theta + j\Delta)\}_{j=1, \dots, N}$ et la cardinalité de ces N -uples est de p^N . Pour deux entiers distincts m et m^* , on obtiendrait que $G_m(\theta + j\Delta) = G_{m^*}(\theta + j\Delta)$ pour chaque valeur entière de j , alors que $m < m^* \leq p^N + 1$. Le Théorème 10 a établi que la suite G_n est non décroissante. D'où $G_{m+1}(\theta + j\Delta) = G_m(\theta + j\Delta)$. Le même Théorème 10 a aussi montré que $G_n \leq TG_n \leq G_{n+1}$. Ceci montre que $TG_m(\theta + j\Delta) = G_m(\theta + j\Delta)$. On sait aussi que $Th(\theta + j\Delta) = h(\theta + j\Delta)$, c'est la relation (3). Le caractère contractant de T force $G_m(\theta)$ à s'identifier à $h(\theta)$. Si $n = p^N$, alors $G_n(\theta) = h(\theta)$. Ceci est vrai pour tout θ . $\square$

8. Conclusion

Nous avons décrit deux méthodes efficaces pour récupérer l'enveloppe convexe d'une courbe de Mandelbrot. Nous avons isolé une classe de courbes de Mandelbrot pour lesquelles l'enveloppe convexe est un polygone convexe. Malgré tout, la question suivante reste ouverte. Existe-t-il une courbe de Mandelbrot dont l'enveloppe convexe n'est pas un polygone convexe? Pour terminer, nous indiquons que le contenu de ce travail est issu de la deuxième partie de la thèse de doctorat du second auteur.

Bibliographie

- [1] BAJRAKTAREVIĆ, M., *Sur une équation fonctionnelle*, Glasnik Mat.-Fiz. 1 Astr. 12(1957), 201-205.
- [2] DUBUC, S., *Une foire de courbes sans tangentes*, Actualités mathématiques, Actes du VI-ième Congrès du groupement des mathématiciens d'expression latine, pp. 99-123, Gauthiers-Villars, Paris, 1982.
- [3] MANDELBROT, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.

Département de mathématiques
et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec
Canada H3C 3J7

Manuscrit reçu le 22 août 1986.