

TRANSFORMÉES DE FOURIER DE COURBES IRRÉGULIÈRES*

Gilles Deslauriers et Serge Dubuc

Résumé

Nous explorons une nouvelle construction de courbes irrégulières selon un processus d'interpolation itérative. Sous des hypothèses très légères, ce processus est toujours faiblement convergent et est fortement lié à une fonction particulière appelée interpolante fondamentale, d'abord définie sur certains rationnels. La distribution de Schwartz associée à l'interpolante fondamentale est à croissance lente, ce qui nous permettra de traiter de la transformée de Fourier de celle-ci et de faire son analyse harmonique. Nous découvrirons les conditions précises pour que la distribution soit celle d'une fonction de carré sommable. Nous appliquerons ces résultats aux courbes de von Koch-Mandelbrot pour obtenir un critère simple pour qu'une telle courbe soit de carré sommable.

Abstract

A new construction of irregular curves through an iterative interpolation process is studied. Under very mild conditions, this process is always weakly convergent and is strongly related to a particular function, called fundamental interpolating function, first defined on some rational numbers. The associated distribu-

Mots clés: Transformée de Fourier, courbes, opérateurs sur des suites, séries particulières de Fourier, relations de récurrence.

Classification de l'A.M.S.: 42A38, 54F50, 47B37, 42A16, 65Q05.

tion of Schwartz is temperate; its Fourier transform makes possible an harmonic analysis. Precise conditions for which the distribution is square integrable are found. These results are applied to get new informations on von Koch-Mandelbrot curves: a simple criterion which ensures that these curves are square integrable is given.

0. Introduction

Nous explorons une nouvelle construction de courbes irrégulières par interpolation itérative. Cette construction permet en particulier de retrouver les courbes de von Koch-Mandelbrot. Dans un premier temps, nous définissons une fonction particulière appelée interpolante fondamentale. Cette fonction est d'abord définie sur certains rationnels et admet plusieurs propriétés importantes. Sous des hypothèses très légères, le processus d'interpolation itérative est toujours faiblement convergent. La distribution de Schwartz associée à l'interpolante fondamentale est tempérée, ce qui nous permettra de traiter de la transformée de Fourier de celle-ci. Par la suite, nous ferons l'analyse harmonique de cette distribution. Nous découvrirons les conditions précises pour que la distribution soit celle d'une fonction de carré sommable. Nous appliquerons ces résultats aux courbes de von Koch-Mandelbrot, nous aurons trouvé un critère simple pour qu'une courbe de von Koch-Mandelbrot soit de carré sommable et nous aurons un développement de Fourier pour chacune de celles-ci.

1. Interpolation d-adique, définition du processus

Nous décrivons une nouvelle méthode d'interpolation. Le point de départ est une fonction $y(n)$ définie sur les entiers relatifs, notre désir est de prolonger cette fonction à tout l'axe réel si possible. Fixons un entier d supérieur à un, désignons par D_n l'ensemble des nombres rationnels d -adiques m/d^n où m est un entier relatif arbitraire, $y(t)$ est déjà définie sur D_0 . Par récurrence, on prolonge y à $D_1, D_2, D_3, \dots$. Pour prolonger la fonction y de D_0 à D_1 , on se donne une suite de nombres p_k qui remplit une condition dite de compatibilité: $p_0 = 1$ et $p_k = 0$ si k est divisible par d .

On prolonge y au point j/d de la façon suivante: $y(j/d) = \sum_k p_{j-dk} y(k)$. On peut poursuivre le prolongement à $D_2, D_3, \dots$: si j est un entier, on pose

$$(1) \quad y(j/d^{n+1}) = \sum_k p_{j-dk} y(k/d^n).$$

La condition de compatibilité permet de prolonger la fonction y de façon consistante. L'hypothèse suivante que nous ferons sur les nombres p_k est que la série $\sum_k |p_k|$ converge. La formule (1) sera bien définie si la suite originale $y(n)$ est bornée. Si les coefficients p_k remplissent plus fortement la condition de différer de 0 que pour un nombre fini d'indices k , alors la formule (1) est bien définie quelle que soit la suite $y(n)$. On notera par $y(t)$ le prolongement par la formule (1) de la suite $y(n)$ à l'ensemble des fractions d -adiques.

Pour faire valoir l'intérêt de la construction précédente, nous donnons deux exemples de cette interpolation. Le premier exemple consiste à engendrer les courbes de von Koch-Mandelbrot telles que décrites en [5]. Soient $d+1$ points du plan complexe $z_0, z_1, \dots, z_d$, on suppose que $z_0 = 0$ et $z_d = 1$. Nous posons $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, les autres valeurs $y(n)$ sont choisies de façon arbitraire. Nous recommandons le choix suivant pour les coefficients p_k :

$$\begin{aligned} p_k &= 1 - z_k & \text{si } k \text{ est un entier compris entre } 0 \text{ et } d, \\ p_k &= z_{d+k} & \text{si } k \text{ est un entier compris entre } -d \text{ et } 0, \\ p_k &= 0 & \text{pour les autres valeurs de } k, \quad |k| > d. \end{aligned}$$

Si j est un entier donné, si m et r sont respectivement le quotient et le reste lors de la division de j par d , la relation (1) s'écrit dans ce cas-ci

$$y(j/d^{n+1}) = (1 - z_r) y(m/d^n) + z_r y((m+1)/d^n).$$

La fonction $y(t)$ fournie par cette relation et restreinte à l'intervalle $[0,1]$ est la courbe de von Koch-Mandelbrot observée sur l'ensemble des fractions d -adiques.

A titre d'illustration, le lecteur trouvera dans les figures 1 et 2 deux exemples d'interpolation d -adique. La première, interpolation 6-adique, utilise

les sept points: $0, 1/4, (1+i)/4, 1/2, (3+i)/4, 3/4$ et 1 tandis que la deuxième, interpolation 3-adique, fait intervenir les quatre points suivants du plan complexe: $0, (1+3i)/10, (9+3i)/10$ et 1 .

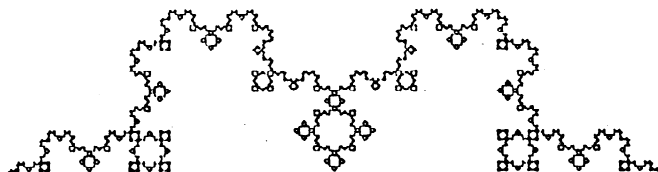


Figure 1

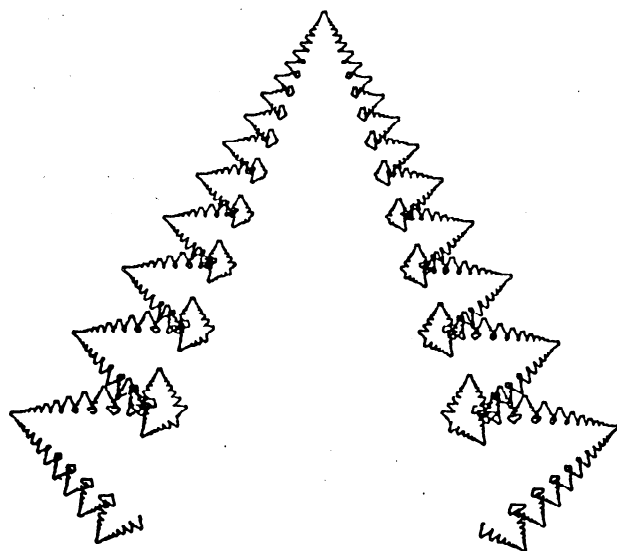


Figure 2

En mai 1985 au Séminaire Hausdorff à Paris [1], nous avons proposé ce qui sera notre deuxième exemple. Dans cet exemple d vaut deux, on se fixe quatre nombres p, q, r et s . Le processus d'interpolation proposé est fourni par la formule: si $t = j/2^{n+1}$ avec j impair, si $h = 1/2^{n+1}$,

$$y(t) = py(t-3h) + qy(t-h) + ry(t+h) + sy(t+3h).$$

Dans ce cas, les coefficients p_k qui ne sont pas nuls sont $p_3 = p$, $p_1 = q$, $p_0 = 1$, $p_{-1} = r$ et $p_{-3} = s$. Le second auteur avait étudié antérieurement en [3] le processus de l'interpolation dyadique pour le choix suivant des paramètres: $p = s = -1/16$ et $q = r = 9/16$.

2. Propriétés élémentaires de l'interpolation d -adique

Nous présentons quelques propriétés élémentaires du schéma (1) d'interpolation d -adique. Auparavant, nous présentons la définition de la profondeur d'une fraction d -adique: si $t = i/d^n$ où i est un entier qui n'est pas divisible par d , on dira que la profondeur de t est n .

LEMME 1. Si $y(t)$ est l'interpolation d -adique du schéma (1) de la suite $y(n)$ définie sur les entiers relatifs, si h est une puissance entière négative de d , alors l'interpolation d -adique du schéma (1) de la suite $y(nh)$ est $y(th)$.

DÉMONSTRATION. Soit r un entier positif, posons $h = d^{-2}$. Notons par $z(n)$ la suite $y(nh)$. Si $y(t)$ et $z(t)$ représentent les prolongements respectifs de $y(n)$ et $z(n)$ selon le schéma (1), il s'agit de vérifier que $z(t) = y(th)$. Une induction sur la profondeur de t permet d'y arriver: si la profondeur de t est l'entier $n+1$: $t = j/d^{n+1}$, alors

$$z(t) = z(j/d^{n+1}) = \sum_k p_{j-dk} z(k/d^n) \quad \text{selon la formule (1)}$$

$$z(t) = \sum_k p_{j-dk} y(k/d^{n+r}) \quad \text{par induction}$$

$$z(t) = y(j/d^{n+r+1}) = y(th) \quad \text{selon la formule (1). } \square$$

LEMME 2. Si $y(t)$ est l'interpolation de la suite $y(n)$ et si m est un entier, alors l'interpolation de la suite $y(n+m)$ est la fonction $y(t+m)$.

DÉMONSTRATION. Soit $z(n)$ la suite $y(n+m)$, $z(t)$ est l'interpolation selon le schéma (1) de la suite $z(n)$. On peut démontrer par induction sur la profondeur de t que $z(t) = y(t+m)$. En effet si n est un entier naturel, si $t = j/d^{n+1}$, alors

$$z(t) = z(j/d^{n+1}) = \sum_k p_{j-dk} z(k/d^n) \quad \text{selon la formule (1)}$$

$$z(t) = \sum_k p_{j-dk} y(k/d^{n+m}) \quad \text{par induction}$$

$$z(t) = \sum_k p_{j+md^{n+1}-kd} y(k/d^n) \quad \text{par changement d'indice}$$

$$z(t) = y(j/d^{n+1+m}) = y(t+m) \quad \text{selon la formule (1)}.$$

$z(t)$ est bien égal à $y(t+m)$. $\square$

Nous introduisons maintenant une fonction capitale: l'interpolante fondamentale. Partons de la suite $F(n)$ définie sur D_0 : $F(0) = 1$ et $F(n)$ est nulle pour les autres valeurs entières de n . L'interpolation d -adique $F(t)$ de cette suite sera appelée l'interpolante fondamentale. La formule (1) établit un lien très étroit entre les valeurs de F sur D_1 et les poids p_k :

$$(2) \quad p_k = F(k/d).$$

LEMME 3. Si $S = \sum_k |p_k|$, alors $\sum_k |F(k/d^m)| \leq S^m$, $m = 0, 1, 2, \dots$

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur m . Si m vaut un, la somme sur n de $|F(n/d)|$ est $\sum |p_k| = S$. Supposons par hypothèse d'induction que $\sum_n |F(n/d^m)| \leq S^m$.

$$\sum_j |F(j/d^{m+1})| = \sum_j \left| \sum_k p_{j-dk} F(k/d^m) \right| \quad \text{par la relation (1)}$$

$$\sum_j |F(j/d^{m+1})| \leq \sum_j \sum_k |p_{j-dk}| |F(k/d^m)| \quad \text{par l'inégalité triangulaire}$$

$$\sum_j |F(j/d^{m+1})| \leq \sum_j |p_j| \sum_k |F(k/d^m)| \leq S^{m+1}. \quad \square$$

THÉORÈME 1. Si $y(n)$ est une fonction bornée définie sur les entiers, le prolongement d -adique $y(t)$ de cette suite satisfait l'identité:

$$y(t) = \sum_n y(n) F(t-n).$$

DÉMONSTRATION. Grâce au lemme précédent, la fonction $\sum_n y(n) F(t-n) = z(t)$ est bien définie. De plus, $z(n) = y(n)$. Le Lemme 2 nous assure que la fonction $F(t-n)$ est une interpolation d -adique. La linéarité du processus (1) nous assure que $z(t)$

est l'interpolation d -adique de la suite $z(n) = y(n)$. D'où pour toute fraction d -adique, $z(t) = y(t)$. $\square$

THÉOREME 2. F satisfait l'équation fonctionnelle suivante

$$(3) \quad F(t/d^m) = \sum_n F(n/d^m) F(t-n).$$

DÉMONSTRATION. Si m est un entier positif, selon le Lemme 1, $F(t/d^m)$ est l'interpolation d -adique de la suite $F(n/d^m)$. Le théorème précédent justifie l'identité $F(t/d^m) = \sum_n F(n/d^m) F(t-n)$. $\square$

REMARQUE. Le cas $m = 1$ mérite l'observation suivante. La formule (2) affirme que $F(n/d) = p_n$. D'où l'équation fonctionnelle (3) devient

$$(4) \quad F(t/d) = \sum_k p_k F(t-k).$$

L'équation fonctionnelle (3) permet le calcul rapide de la fonction fondamentale. Si la fonction fondamentale F a déjà été évaluée sur D_m , les fractions de la forme n/d^m , il devient économique de procéder à l'évaluation de F sur D_{2m} en posant dans l'équation (3), $t = j/d^m$:

$$(5) \quad F(j/d^{2m}) = \sum_n F(n/d^m) F(j/d^m - n).$$

L'évaluation de F sur D_m est amorcée par la formule de récurrence

$$F(j/d^{k+1}) = \sum_n F(n/d^k) F(j/d^k - n) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, m-1.$$

A la fonction fondamentale, associons une suite de séries trigonométriques, $P_n(y) = \sum_m F(m/d^n) e^{imy}$. Posons $P(y) = P_1(y)$. On établit la relation de récurrence $P_{n+1}(y) = P_n(dy) P(y)$. D'où

$$(6) \quad P_n(y) = \prod_{k=0, n-1} P(d^k y).$$

Cette dernière identité nous servira dans la prochaine section. Nous dirons de $P(y)$ qu'elle est la fonction caractéristique du schéma (1) d'interpolation.

3. Distribution de Schwartz et interpolation d-adique

Nous verrons dans cette section que sous de faibles conditions, une distribution au sens de Schwartz est associée à la fonction fondamentale F et devient en un certain sens le prolongement de F à tout l'axe réel. Introduisons une suite de distributions. Si φ est une fonction indéfiniment dérivable à support compact, on pose

$$T_n(\varphi) = \sum_m F(m/d^n) \varphi(m/d^n) / d^n.$$

T_n est une distribution au sens de Schwartz, de fait, il s'agit d'une somme absolument convergente de masses de Dirac disposées sur D_n . Citons d'abord un résultat général qui élucidera le caractère de convergence de la suite T_n .

THÉOREME 3. Soit T_n une suite de distributions tempérées dont les transformées de Fourier $G_n(y)$ satisfont les deux conditions suivantes: la suite $G_n(y)$ converge ponctuellement vers $G(y)$ et il existe un polynôme B tel que pour tout n et pour tout y , $|G_n(y)| \leq B(y)$, alors la suite T_n de distributions converge faiblement vers une distribution tempérée T dont la transformée de Fourier est la fonction $G(y)$.

DÉMONSTRATION. Si φ est une fonction indéfiniment dérivable à support compact et si $\psi(y)$ est la transformée de Fourier de $\varphi(x)$, alors, comme on peut le voir dans Guelfand et Chilov [4],

$$T_n(\varphi) = 1/(2\pi) \int_{-\infty, \infty} \psi(y) G_n(y) dy.$$

Chacune des fonctions $\psi(y) G_n(y)$ est majorée en module par la fonction intégrable $|\psi(y)| B(y)$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la suite $T_n(\varphi)$ converge vers $\int \psi(y) G(y) dy$ lorsque n tend vers l'infini. Selon Schwartz [6], théorème XIII, la fonctionnelle limite $T(\varphi)$, la limite de $T_n(\varphi)$ lorsque n tend vers l'infini, est une distribution. La formule que $T(\varphi) = 1/(2\pi) \int \psi(y) G(y) dy$ fait également voir que $G(y)$ est la transformée de Fourier de la distribution tempérée T . $\square$

THÉOREME 4. Si la série $\sum_{k \neq 0} |p_k| \ln |k| < \infty$ et si $\sum_k p_k = d$, alors la suite des distributions T_n converge faiblement vers une distribution T . La transformée de Fourier $G(y)$ de T remplit la condition $G(0) = 1$ et satisfait l'équation fonctionnelle $G(dy) = G(y) (\sum_m F(m/d) e^{-imy}) / d$.

DÉMONSTRATION. La démonstration consiste essentiellement à étudier la suite des transformées de Fourier des distributions T_n . La transformée de Fourier de la distribution T_n est la fonction

$$G_n(y) = \sum_m F(m/d^n) \exp(-imy/d^n) / d^n.$$

Nous allons établir que les deux propriétés suivantes ont lieu: la suite $G_n(y)$ converge et les fonctions $|G_n(y)|$ sont majorées par un même polynôme.

Selon la formule (6), $G_n(y) = P_n(-y/d^n)/d^n = \prod_{k=1,n} [P(-y/d^k)/d]$. La convergence de $G_n(y)$ suivra celle de la série $\sum_{k=1,\infty} |P(y/d^k) - d|$. Par hypothèse $P(0) = d$; la convergence de la dernière série sera obtenue s'il y a convergence uniforme de $\sum_{k=1,\infty} \sum_j |p_j| |\exp(ijy/d^k) - 1|$. Servons-nous de l'inégalité $|e^{i\theta} - 1| \leq \max(|\theta|, 2)$. Si l'on suppose que $|y| \leq \pi$ et que $d^m \leq |j| \leq d^{m+1}$, on obtient la majoration $\sum_{k=1,\infty} |\exp(ijy/d^k) - 1| \leq 2m + d/(d-1) \leq 2m + 2$. D'où l'inégalité $\sum_{k=1,\infty} \sum_j |p_j| |\exp(ijy/d^k) - 1| \leq 2 \sum_j |p_j| [(\ln |j|)/(\ln d) + 1]$. Sous l'hypothèse $\sum_j |p_j| \ln |j| < \infty$, le critère M de Weierstrass est satisfait et $G_n(y)$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

Remarquons que $G_{n+m}(d^m y) = P_m(-y) G_n(y) / d^m$. Ceci montre que $G_n(y)$ converge uniformément sur $[-d^m \pi, d^m \pi]$. Si $G(y) = \sum_{k=1,\infty} [P(-y/d^k)/d]$, pour tout y , $G_n(y)$ converge vers $G(y)$.

Montrons maintenant qu'une même fonction polynomiale majore le module de chacune des fonctions $G_n(y)$. On peut trouver une constante M telle que pour tout y de $[-\pi, \pi]$, et pour tout n , $|G_n(y)| \leq M$. Soit C la valeur maximale de $|P(y)/d|$, ce paramètre C permet une majoration de $G_n(y)$ pour toute valeur réelle de y . En effet si k est un entier naturel, si $|y|$ est compris entre les deux

valeurs πd^k et πd^{k+1} , alors $|G_n(y)| \leq MC^k$. Cette inégalité permet de trouver un nombre E tel que $|G_n(y)| \leq M(1+|y|)^E$. Cette dernière fonction est majorée par un polynôme.

Or les propriétés satisfaites par la suite $G_n(y)$ et le théorème précédent permettent d'affirmer que la suite des distributions T_n converge vers une distribution T dont la transformée de Fourier est $G(y)$, la limite de la suite $G_n(y)$. Il est d'abord clair que $G(0)$ vaut 1. Puisque G est la limite de la suite G_n et que $G_{n+1}(dy) = G_n(y)P(-y)/d$, on obtient la relation fonctionnelle: $G(dy) = G(y)P(-y)/d$. $\square$

4. Série de Fourier des courbes de von Koch-Mandelbrot

Nous avons indiqué comme premier exemple d'interpolation d -adique les courbes de von Koch-Mandelbrot. Si $z(t)$ est la courbe de von Koch-Mandelbrot et si $F(t)$ est l'interpolante fondamentale du processus d'interpolation d -adique correspondant, alors on a la relation que $z(t) = F(t-1)$ pour $t \in [0,1]$. La fonction F est nulle hors de $[-1,1]$, la fonction $\sum_n F(t+2n-1)$ sera un prolongement périodique de période 2 de la courbe de von Koch-Mandelbrot. Si le développement de Fourier de cette fonction est $\sum_k c_k e^{i\pi kt}$, alors

$$(7) \quad c_k = (-1)^k G(k\pi)/2 = (-1)^k \left\{ \prod_{n=1, \infty} [P(-k\pi/d^n)/d] \right\} / 2.$$

Les figures 3, 4, 5 et 6 illustrent les séries de Fourier (tronquées) de quatre courbes: la courbe de Peano, la courbe en C de Gosper et les courbes des figures 1 et 2. Les ordres des séries de Fourier sont respectivement: 729, 400, 300 et 500. Le pas dans l'évaluation des polynômes trigonométriques a été de $1/2000$ pour chacune des courbes.

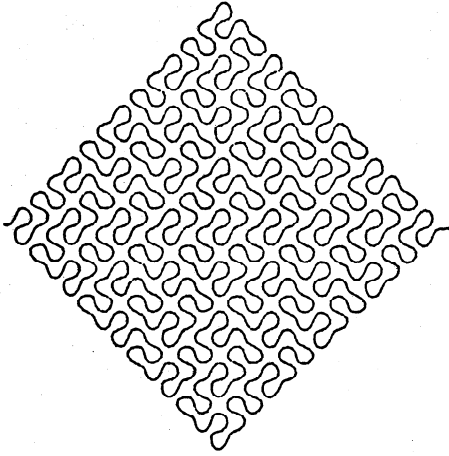


Figure 3

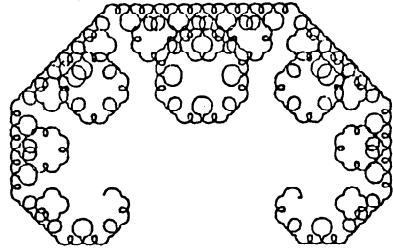


Figure 4

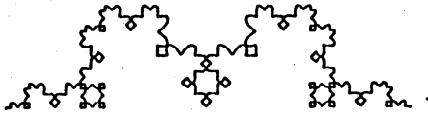


Figure 5

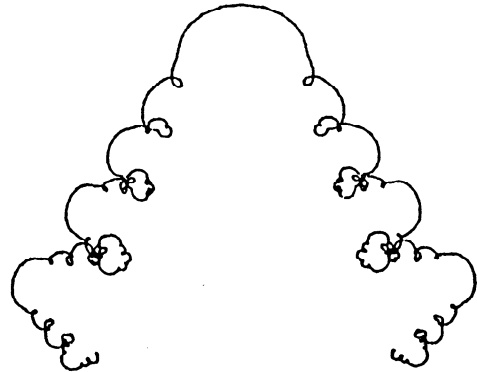


Figure 6

5. Interpolation d-adique de carré sommable

Pour le processus itératif (1), nous recherchons des conditions nécessaires et suffisantes pour que la distribution limite fondamentale soit de carré sommable. Une telle condition est que la norme quadratique de la transformée de Fourier, $G(y)$, de la distribution soit finie. Notre objectif est de rendre cette condition plus explicite.

On a déjà défini la suite de distributions au sens de Schwartz $T_n(\varphi) = \sum_m F(m/d^n) \varphi(m/d^n)/d^n$. Introduisons la suite F_n de fonctions: si k est un entier,

si $|x - k/d^n| < d^{-n}/2$, alors $F_n(x) = F(k/d^n)$. F_n est une fonction constante par morceaux, la distribution associée $U_n(\varphi) = \int F_n(x)\varphi(x) dx$ est la convolution de la distribution T_n avec la fonction $\varepsilon_n(x)$ qui vaut d^n sur l'intervalle $[-1/2d^n, 1/2d^n]$ et 0 ailleurs. La suite U_n de distributions tend aussi vers la distribution limite T . L'intégrale du carré du module de F_n est $\|F_n\|^2 = \sum_m |F(m/d^n)|^2/d^n$.

THÉOREME 5. Si $\sum_{k \neq 0} |p_k| \ln|k| < \infty$ et si $\sum_k p_k = d$, alors la suite $\|F_n\|^2$ converge au sens propre ou impropre vers $\int |G(y)|^2 dy/(2\pi)$.

DÉMONSTRATION. Maintienons la notation que $P_n(y)$ est la série $\sum_{k=-\infty, \infty} F(kd^{-n})e^{iky}$. $F(kd^{-n})$ est le k -ième coefficient de la série de Fourier $P_n(y)$. L'identité de Parseval prend ici la forme:

$$\sum_k |F(kd^{-n})|^2 = 1/(2\pi) \int_{-\pi, \pi} |P_n(y)|^2 dy = 1/(2\pi) \int_{-\pi d^n, \pi d^n} |G_n(y)|^2 dy$$

où $G_n(y) = P_n(-y/d^n)/d^n$. Nous avons déjà montré que $G_n(y)$ converge vers $G(y) = \prod_{k=1, \infty} [P(-y/d^k)/d]$. Si $\int |G(y)|^2 dy = \infty$, le lemme de Fatou et le fait que G_n converge ponctuellement vers G permettent de dire que la limite (lorsque n tend vers l'infini) de $\int_{-\pi d^n, \pi d^n} |G_n(y)|^2 dy$ est infinie; dans ce cas, la limite de la suite $\sum_k |F(kd^{-n})|^2/d^n$ sera infinie.

Désormais, nous supposons que $\int |G(y)|^2 dy < \infty$. Comparons G_n et G . $G(y)/G_n(y) = \prod_{k=n+1, \infty} P(-y/d^k)/d$. Remarquons que l'on peut trouver un entier N tel que la fonction $P(y)$ ne s'annule pas sur $[-\pi d^{-N}, \pi d^{-N}]$. Il est même possible de trouver un nombre ε tel que si $|y| \leq \pi d^{-N}$, alors $\prod_{k=0, \infty} |P(-y/d^k)/d| > \varepsilon$. Si $|y| \leq \pi d^{n-N}$, alors $|G(y)/G_n(y)| > \varepsilon$ ou encore que $|G_n(y)| < |G(y)|/\varepsilon$. Le théorème de convergence dominée permet de prétendre que la limite de la suite

$$\int_{-\pi d^{n-N}, \pi d^{n-N}} |G_n(y)|^2 dy \text{ est } \int |G(y)|^2 dy.$$

Pour terminer la vérification que la suite $\|F_n\|^2$ converge vers $1/(2\pi) \int |G(y)|^2 dy$, il nous reste à montrer que les deux suites d'intégrales $\int_{-\pi d^n, -\pi d^{n-N}} |G_n(y)|^2 dy$ et $\int_{\pi d^{n-N}, \pi d^n} |G_n(y)|^2 dy$ tendent vers zéro. Or

$G_n(y) = P_N(y)G_{n-N}(y/d^N)$. La fonction $P_N(y)$ est bornée, désignons par M une borne des nombres $|P_N(y)|$; si $|y| < d^n$, alors $|G_{n-N}(y/d^N)| \leq |G(y)|/\varepsilon$. La fonction $|G_n(y)|$ est donc majorée par $M|G(y)|/\varepsilon$ sur $[\pi d^{n-N}, \pi d^n]$. La limite des intégrales $\int_{\pi d^{n-N}, \pi d^n} |G_n(y)|^2 dy$ est donc nulle. $\square$

THÉORÈME 6. Si $\sum_{k \neq 0} |p_k| \ln |k| < \infty$, si $\sum_k p_k = d$ et si la distribution limite est une fonction de carré sommable $F(x)$, alors la suite F_n converge vers F en moyenne quadratique.

DÉMONSTRATION. Si la distribution limite T est de carré sommable: $T(\varphi) = \int F(x)\varphi(x) dx$ où $\int |F(x)|^2 dx < \infty$, alors $\int |G(y)|^2 dy < \infty$. La suite des intégrales $\int |F_n(x)|^2 dx$ est convergente d'après le dernier théorème. La suite F_n est donc bornée dans L^2 . Soit f un point d'accumulation de la suite F_n pour la topologie faible, montrons que $f = F$. Pour toute fonction indéfiniment dérivable à support compact $\varphi(x)$, nous avons que

$$\begin{aligned} \int F(x)\varphi(x) dx &= T(\varphi) = \lim T_n(\varphi) = \lim \int F_n(x)\varphi(x) dx \\ &= \lim \int F_n(x)\varphi(x) dx = \int f(x)\varphi(x) dx. \end{aligned}$$

La fonction $f-F$ est donc orthogonale à φ . Les fonctions C^∞ à support compact sont denses dans L^2 ; ceci force $f-F$ à être orthogonale à toute fonction de L^2 , ce qui oblige f à se confondre à F .

Nous avons donc montré que F ne peut être que le seul point d'accumulation pour la topologie faible de la suite F_n . La compacité de la boule unité de L^2 pour la topologie faible entraîne que la suite F_n converge faiblement vers F . La convergence faible de F_n vers F et la convergence de $\|F_n\|$ vers $\|F\|$ suffisent à garantir que F_n converge fortement vers F . $\square$

6. Analyse spectrale

Dans cette section, nous verrons comment décider si le schéma d'interpolation (1) est de carré sommable par la décomposition spectrale d'une matrice associée.

Nous introduisons une suite de séries trigonométriques: si $Q(y) = |P(y)|^2$, $Q_n(y) = Q(y)Q(dy) \dots Q(d^{n-1}y)$. Par convention, $Q_0(y)$ est le polynôme constant à 1, $Q_1(y) = Q(y)$, $Q_2(y) = Q(y)Q(dy)$ et ainsi de suite. Nous introduisons aussi les coefficients de Fourier correspondants: $Q(y) = \sum_k q_k e^{iky}$ et $Q_n(y) = \sum_k q_{k,n} e^{iky}$.

Si $P(y) = \sum_k p_k e^{iky}$, les coefficients q_k sont donnés par la formule: $q_k = \sum_j p_{j+k} \bar{p}_j$. La relation de récurrence $Q_{n+1}(y) = Q_n(dy)Q(y)$ induit la formule

$$(8) \quad q_{k,n+1} = \sum_j q_{k-jd} q_{j,n}.$$

Le nombre $\|F_n\|^2$ est exactement le nombre $q_{0,n}/d^n$. L'étude de la convergence de $\|F_n\|$ revient à déterminer le comportement asymptotique de la suite $q_{0,n}$. Visualisons la suite $q_{k,n}$ comme un vecteur-colonne V_n . La relation de récurrence (8) peut s'écrire sous une forme matricielle. Pour ce faire, nous indiquons par $A = (a_{j,k})$ la matrice dont les coefficients sont ainsi formés: $a_{j,k} = q_{j-kd}$.

Lorsque la matrice A s'applique au vecteur V_n , elle produit le vecteur V_{n+1} ; ce résultat est consécutif à la relation de récurrence $Q_{n+1}(y) = Q_n(dy)Q(y)$. Si V_0 est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de la composante centrale égale à un, alors $V_n = A^n V_0$. Définissons le vecteur-rangée $R = \{r_k\}$: $r_0 = 1$ et $r_k = 0$ pour les autres valeurs de k . On obtient que $d^n \|F_n\|^2 = R A^n V_0$.

LEMME 4. Si l'interpolante fondamentale du processus d'interpolation (1) est de carré sommable, alors le vecteur-colonne dont toutes les composantes sont les mêmes est un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre d .

DÉMONSTRATION.

$$q_{k,n} = 1/(2\pi) \int_{-\pi,\pi} Q_n(y) e^{-iky} dy$$

$$q_{k,n}/d^n = 1/(2\pi) \int_{-\pi d^n, \pi d^n} |G_n(y)|^2 \exp(-iky/d^n) dy.$$

Par le théorème de convergence dominée, la limite de $q_{k,n}/d^n$ sera $1/(2\pi) \int |G(y)|^2 dy$ lorsque n tend vers l'infini. Remarquons que la somme des modules d'une ligne de la matrice est finie. $\sum_k |a_{j,k}| \leq \sum_k |q_k| \leq (\sum_k |p_k|)^2$.

Puisque les vecteurs V_n/d^n ont des composantes uniformément bornées qui convergent vers un vecteur dont toutes les composantes sont identiques et que $V_{n+1} = AV_n$, alors un vecteur dont toutes les composantes sont égales est un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre d . $\square$

THÉOREME 7. Supposons que $\sum_k p_k = d$. Le vecteur-colonne dont toutes les composantes sont égales à l'unité est un vecteur propre de A pour la valeur propre d si et seulement si pour tout entier j , $\sum_k p_{j+kd} = 1$.

DÉMONSTRATION. Supposons que pour tout j , $\sum_k p_{j+kd} = 1$. Il s'ensuit que $\sum_k a_{j,k} = \sum_k q_{j-kd} = \sum_k \sum_l p_{1+j-kd} \bar{p}_l = \sum_l p_l = d$. Le vecteur-colonne dont toutes les composantes valent un est un vecteur propre pour la valeur propre d .

Supposons maintenant que le vecteur-colonne dont toutes les composantes sont égales à l'unité est un vecteur propre de A pour la valeur propre d . Posons $a_j = \sum_k a_{j,k}$ et $S_j = \sum_k p_{j+kd}$. On obtient les deux identités: $a_0 = S_0 \bar{S}_0 + S_1 \bar{S}_1 + \dots + S_{d-1} \bar{S}_{d-1}$ et $a_1 = S_1 \bar{S}_0 + S_2 \bar{S}_1 + \dots + S_0 \bar{S}_{d-1}$. Par hypothèse, $a_0 = a_1 = d$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwartz à la quantité a_1 vue comme produit scalaire.

$$d^2 = |a_1|^2 \leq (|S_0|^2 + |S_1|^2 + \dots + |S_{d-1}|^2)(|S_1|^2 + |S_2|^2 + \dots + |S_0|^2) = d^2.$$

L'égalité obtenue force les deux vecteurs (S_j) et (S_{j+1}) à être linéairement dépendants. Tous les nombres S_j sont donc égaux. Comme la somme des S_j (pour les j entre 0 et $d-1$) est d , chacun des S_j vaut un. $\square$

REMARQUE. La condition $\sum_k p_{j+kd} = 1$ revient à dire que dans le schéma (1), l'interpolation d -adique $y(t)$ de la suite $y(n)$ constante à un est la fonction constante, égale à un.

Faisons l'hypothèse supplémentaire que la fonction caractéristique du processus $P(y)$ est un polynôme trigonométrique de degré N . Le degré de $Q(y)$ est alors $2N$. La matrice A admet beaucoup de zéros. $a_{j,k} = q_{j-kd}$. Si M est la partie entière de $2N/(d-1)$, si $|j| \leq M$ et si $|k| > M$, alors $a_{j,k} = 0$. Désignons

par B la matrice tronquée des $a_{j,k}$ où $|j| \leq M$ et $|k| \leq M$; la matrice B est une matrice carrée d'ordre $2M+1$. Les vecteurs tronqués W_n seront les $2M+1$ composantes centrales des vecteurs V_n . On a la récurrence $W_{n+1} = BW_n$. La décomposition de Jordan de B détermine le comportement asymptotique de la suite $q_{0,n}$. En particulier si d est une valeur propre simple de la matrice B et si toutes les autres valeurs propres de B ont un module inférieur à d , alors les éléments de la suite des matrices B^n sont uniformément bornés; dans ce cas, la suite $q_{0,n}$ sera bornée et le processus d'interpolation (1) sera de carré sommable. Nous énonçons ce résultat sous forme d'un théorème.

THÉOREME 8. Si la fonction caractéristique $P(y) = \sum_k p_k e^{iky}$ du processus d'interpolation (1) est un polynôme trigonométrique de degré N , si $\sum_k q_k e^{iky}$ est le polynôme $|P(y)|^2$ et si B est la matrice carrée $\{q_{j-kd}\}$ où $|j| \leq 2N/(d-1)$ et $|k| \leq 2N/(d-1)$, alors le processus d'interpolation est de carré sommable lorsque d est une valeur propre simple de la matrice B et lorsque toutes les autres valeurs propres ont un module inférieur à d .

7. Courbes de von Koch-Mandelbrot de carré sommable

Soit $\{z_k\}_{k=0,d}$ une ligne polygonale du plan complexe de d segments et dont les extrémités sont $z_0 = 0$ et $z_d = 1$, considérons l'interpolation d -adique telle que si $y(n)$ est une suite de nombres à interpoler, $y(n+k/d) = (1-z_k)y(n) + z_k y(n+1)$, $k = 1, 2, \dots, d-1$. La question envisagée dans cette section est de déterminer des conditions sur les nombres z_k pour que le schéma d'interpolation soit de carré sommable. Il est connu que si chacun des accroissements $z_{k+1} - z_k$ est inférieur à un en module, la courbe de von Koch-Mandelbrot engendrée par la ligne polygonale est continue. L'interpolante fondamentale correspondante se prolonge continûment à tout l'axe réel avec un support compact. Dans ce cas, il est bien évident que le processus d'interpolation est de carré sommable. Nous examinons des conditions plus générales pour la réalisation de cette propriété.

Le polynôme caractéristique de l'interpolation est

$$P(y) = 1 + \sum_{k=1, d-1} (1-z_k) e^{iky} + \sum_{k=1, d-1} z_{d-k} e^{-iky}.$$

C'est un polynôme de degré $d-1$ et le polynôme $Q(y) = |P(y)|^2$ sera de degré $2d-2$.

Si $Q(y) = \sum_{k=-2d+2, 2d-2} q_k e^{iky}$, la matrice B de la section précédente est une matrice carrée d'ordre 5 dont voici les éléments

$$\begin{array}{ccccc} q_{2d-2} & q_{d-2} & q_{-2} & q_{-d-2} & 0 \\ 0 & q_{d-1} & q_{-1} & q_{-d-1} & 0 \\ 0 & q_d & q_0 & q_{-d} & 0 \\ 0 & q_{d+1} & q_1 & q_{-d+1} & 0 \\ 0 & q_{d+2} & q_2 & q_{-d+2} & q_{-2d+2} \end{array}.$$

Entreprenons l'analyse spectrale de B . Deux valeurs propres sont faciles à identifier: q_{2d-2} et q_{-2d+2} . Les trois autres valeurs propres s'obtiennent par les valeurs propres de la matrice carrée C d'ordre trois

$$\begin{array}{ccc} q_{d-1} & q_{-1} & q_{-d-1} \\ q_d & q_0 & q_{-d} \\ q_{d+1} & q_1 & q_{-d+1} \end{array}.$$

Grâce au Théorème 7, on sait déjà que le vecteur-colonne de composantes 1, 1 et 1 est un vecteur propre de C pour la valeur propre d . Avant d'aller plus loin, introduisons les quantités auxiliaires suivantes:

$$a = \sum_{k=1, d-1} |z_k|^2, \quad b = \sum_{k=1, d-1} z_k \bar{z}_{k+1}, \quad c = \sum_{k=1, d-1} z_k.$$

Les quantités q_{d+1} , q_d et q_{d-1} s'expriment simplement en fonction de a , b et c : $q_{d+1} = \bar{c} - \bar{b}$, $q_d = \bar{c} - a$ et $q_{d-1} = 1 + \bar{c} - b$. Le prochain lemme établit la propriété surprenante que le nombre un est toujours une valeur propre de C .

LEMME 5. Le vecteur-rangée dont les composantes sont $a - \bar{b}$, $\bar{b} - b$, $b - a$ est un vecteur propre de C pour la valeur propre 1.

DÉMONSTRATION. Le vecteur-rangée donné est orthogonal aux deux vecteurs $(1, 1, 1)$

et $(b, a, \bar{b})$. La première colonne et la troisième colonne de la matrice $C-I$ (où I est la matrice identité) sont des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs. Parce que la somme de chacune des lignes de C donne la valeur d , on peut vérifier que la deuxième colonne de $C-I$ est une combinaison linéaire des deux autres colonnes et du vecteur $(1, 1, 1)$. La seconde colonne de $C-I$ est également orthogonale au vecteur-rangée original. $C-I$ appliquée à ce vecteur rangée produit un vecteur nul. $\square$

LEMME 6. La quantité $\sum_{k=1,d} |z_k - z_{k-1}|^2$ est une valeur propre additionnelle de la matrice C .

DÉMONSTRATION. Calculons la trace T de la matrice C . $T = q_{d-1} + q_0 + q_{-d+1} = q_{d-1} + (d - q_d - q_{-d}) + q_{-d+1} = d + 2 + 2a - b - \bar{b}$. Puisque d et 1 sont des valeurs propres et que la trace de C est la somme de ses trois valeurs propres. La troisième valeur propre sera $1 + 2a - b - \bar{b}$. Or si l'on développe la quantité $\sum_{k=1,d} |z_k - z_{k-1}|^2$, on obtient précisément cette valeur propre. $\square$

LEMME 7. Les deux valeurs propres q_{2d-2} et q_{2-2d} de la matrice B ont un module majoré par $\sum_{k=1,d} |z_k - z_{k-1}|^2/2$.

DÉMONSTRATION. $|q_{2d-2}| = |q_{2-2d}| = |(1 - z_{d-1})z_1| \leq (|1 - z_{d-1}|^2 + |z_1|^2)/2$, ce qui est majoré par $\sum_{k=1,d} |z_k - z_{k-1}|^2/2$. $\square$

THÉORÈME 9. La courbe de von Koch-Mandelbrot est de carré sommable si $\sum_{k=1,d} |z_k - z_{k-1}|^2 < d$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\sum_{k=1,d} |z_k - z_{k-1}|^2 < d$. La valeur propre d est simple et les autres valeurs propres de la matrice B ont un module inférieur à d comme le font foi les derniers lemmes. Le Théorème 8 établit que le processus d'interpolation est de carré sommable. $\square$

Lorsque la courbe de Mandelbrot est de carré sommable, $\int |F(x)|^2 dx$ se calcule facilement à partir du vecteur-rangée propre associé à la valeur propre d ; si (r, s, t) est un tel vecteur, alors

$$(9) \quad \int |F(x)|^2 dx = s/(r+s+t).$$

En terminant, nous présentons une dernière figure, la figure 7 qui fournit avec un repère vertical unitaire le graphe d'une courbe de carré sommable qui en aucun de ses points n'est localement bornée. Il est entendu que la représentation graphique ne pourra pas faire voir toute cette irrégularité. C'est une courbe hyperbolique telle que décrite en [2] par la matrice diagonale d'ordre deux avec $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$ sur la diagonale. C'est aussi une courbe obtenue par interpolation dyadique en posant $z_0 = 0$, $z_1 = -\frac{1}{4}$ et $z_2 = 1$. La courbe $y(t)$ obtenue est telle que $\int y(t)^2 dt = 4/3$.

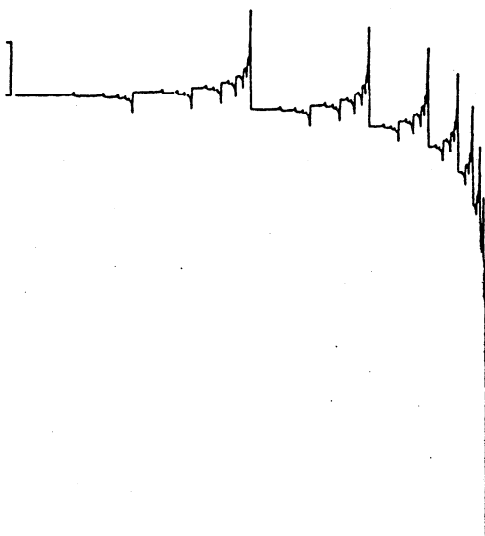


Figure 7

Bibliographie

- [1] DESLAURIERS, G., DUBUC, S., *Interpolation dyadique*, Séminaire Hausdorff du 21 mai 1985, Laboratoire de Thermodynamique des milieux ioniques et biologiques, Université Paris 7.
- [2] DUBUC, S., *Une foire de courbes sans tangentes*, Actualités mathématiques, Actes VI ième Congrès mathématiques d'expression latine, Gauthiers-Villars, Paris (1982), 99-123.

- [3] DUBUC, S., *Interpolation through an iterative scheme*, J. of Math. Anal. and Appl., vol. 114, no 1, 1986, 185-204.
- [4] GUELFAND, I.M., CHILOV, G.E., *Les distributions*, Tome 1, Dunod, Paris (1962).
- [5] MANDELBROT, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco (1982).
- [6] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*, Hermann, Paris (1966).

Département de mathématiques appliquées
Ecole Polytechnique
C.P. 6079, Succ. "A"
Montréal, Québec
Canada H3C 3A7

Département de mathématiques
et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec
Canada H3C 3J7

Manuscrit reçu le 24 juillet 1986.

* Cette recherche est subventionnée par le fonds FCAR, CRP-2093 (Ministère de l'Éducation du Québec).