

SUR LE CALCUL DE LA DIMENSION FRACTALE

Jacques Bélair

Résumé

Nous considérons le calcul pratique de la dimension, motivé par l'étude des ensembles invariants des systèmes dynamiques. Divers concepts de dimension sont abordés, et leur implémentation pratique est discutée. Nous calculons, par une méthode élémentaire, la dimension capacitaire d'un ensemble auto-affine: ceci permet d'évaluer la dimension du graphe de fonctions définies arithmétiquement.

Abstract

The computation of the dimension of fractal sets is considered. Various notions of dimensions are described, and their implementation is discussed. An elementary argument is used to compute the dimension of a class of partially self-similar sets, which includes the graph of arithmetically defined functions.

1. Introduction

Parallèlement à l'intérêt que suscitaient les ouvrages de Mandelbrot sur la géométrie fractale ([20], [21]), il s'est développé une étude intensive des équations aux différences finies, étude fortement influencée par les descriptions de

Mots clés: Ensembles fractals, dimension, fonctions non dérivables.

Numéro de classification de l'AMS: 11A63, 26A16, 26A30, 58F13.

Feigenbaum [9] des bifurcations "universelles" préalables à l'établissement d'un comportement "chaotique" des solutions de ces équations. Nombre de travaux ont porté sur la caractérisation des "attracteurs étranges" décelés par simulation numérique.

Une propriété parmi les plus fondamentales de ces attracteurs est leur dimension. En effet, l'intérêt, du point de vue de la modélisation, des attracteurs étranges est leur propension à posséder une basse dimension, bien que l'espace de phase du système considéré puisse être de grande dimension, parfois même infinie ([10], [12]). La dimension donnant un aperçu du nombre de variables indépendantes nécessaires à la description de l'état d'un système, la détermination de la dimension d'un attracteur décrirait ainsi le nombre de variables génériquement essentielles pour préciser son état.

A ce point de vue géométrique s'en ajoute un plus proche de la dynamique: il ne suffit plus alors de caractériser le sous-ensemble de l'espace de phase que définit l'attracteur, il faut aussi quantifier le comportement du système sur ce sous-ensemble. C'est ainsi qu'est apparue la distinction à être apportée entre attracteurs étranges et attracteurs chaotiques [11]. Cette séparation de la métrique et de la dynamique se reflétait déjà dans les nombreuses définitions de "dimensions" [8].

En plus de cette étude des propriétés de systèmes définis mathématiquement, on a aussi cherché à caractériser la dynamique de systèmes par leur seule représentation sous forme d'une série chronologique. Cette procédure est une forme de problème inverse, car on recherche une propriété, ici, la dimension d'un attracteur, à l'aide d'une suite scalaire de nombres. Diverses techniques de reconstruction dans l'espace de phase ont ainsi été développées [28], justifiées [29] et ont fait l'objet d'analyses statistiques pour la mise sur pied d'algorithmes robustes ([12]). Un nouveau concept de dimension, l'exposant de corrélation, a même été défini, avec comme objectif premier le calcul numériquement efficace de la dimension d'attracteurs [10]. Cet indice a connu une popularité certaine, nombre d'études expérimen-

tales étant consacrées à son calcul, tant dans des systèmes biologiques que physiques ([23], [24], [26]).

Cette recrudescence de calculs ne s'est toutefois pas accompagnée de tous les fondements mathématiques, statistiques et algorithmiques qui permettent d'en tirer toutes les conclusions recherchées. Des problèmes de stationnarité, pour ne mentionner que celui-là, peuvent se glisser dans l'analyse de certaines séries, non sans avoir de fortes répercussions sur l'aspect géométrique des attracteurs reconstitués, de même que sur leurs dimensions calculées [23]. Il existe donc un certain nombre de problèmes d'ordre strictement mathématique à résoudre pour, entre autres, s'assurer de la convergence des algorithmes, utilisés jusqu'ici avec autant d'art que de science.

Nous nous proposons d'étudier une classe d'objets géométriques connus explicitement, analytiquement, et dont le calcul de la dimension ne semble pas avoir été effectué, ou, à tout le moins, pas de façon aussi élémentaire. Nous obtiendrons notamment la dimension (capacité) du graphe de la fonction de Kieswetter à l'aide d'une technique de même niveau que celui de l'article original dans lequel elle est définie [19]. Nous croyons que ceci constitue possiblement l'exemple le plus simple d'un ensemble, qui, sans être auto-similaire, possède une dimension évaluée exactement.

2. Les différentes dimensions

Nous rappelons dans cette section quelques généralisations de la notion de dimension qui coïncident sur ce que Mandelbrot appelle "Euclide" ([20], [21]). Nous nous plaçons, à dessein avec perte de généralité, dans l'espace euclidien de dimension D .

La dimension de Hausdorff est la dimension la plus étudiée mathématiquement, mais aussi la plus difficile à évaluer explicitement sur tout objet qui ne possède de fortes propriétés de régularité, par exemple de similitude interne. Généralement c'est donc la mieux connue, mais, individuellement, c'est sans doute la moins calculée.

Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}^D$; pour un recouvrement de A par des cubes de dimension D et de côté ε_i , on pose $l_d(\varepsilon) = \inf \sum_i \varepsilon_i^d$, où l'infénum est pris sur l'ensemble des recouvrements par cubes de côté $\leq \varepsilon$. On définit ensuite $l_d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_d(\varepsilon)$. On peut montrer qu'il existe une valeur d_H telle que $l_d = 0$ pour $d > d_H$ et $l_d = \infty$ lorsque $d < d_H$, la valeur en d_H pouvant aller de 0 à ∞ inclusivement. Cet indice, la dimension de Hausdorff, possède les "bonnes" propriétés d'une dimension: il vaut zéro sur les ensembles dénombrables, et est additif sur les sommes dénombrables d'ensembles. Le problème principal de son calcul explicite réside dans la trop grande diversité de recouvrements à considérer pour l'évaluation de l'infénum.

C'est pourquoi on a souvent recourt, dans la pratique, à des recouvrements par cubes de côté uniforme. On obtient alors, si $N(\varepsilon)$ est le nombre minimal de cubes de côtés ε nécessaires pour recouvrir A , $d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log N(\varepsilon) / -\log(\varepsilon)$ comme indice de recouvrement uniforme. Cet indice, qui n'est que par abus de langage une dimension, est appelé capacité, densité logarithmique [30], ou, dans la littérature appliquée, simplement dimension fractale [8]. Il possède des propriétés "regrettables" pour une dimension: la capacité d'un ensemble est la même que celle de sa fermeture, ce qui fait que les rationnels sur $[0,1]$ ont une capacité de un. De plus, un ensemble dénombrable, mais non dense, peut avoir pour capacité une valeur "intermédiaire": $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ a une capacité de $\frac{1}{2}$. Le comportement d'un ensemble au voisinage d'un seul point peut déterminer la dimension capacitaire de cet ensemble [6]. Malgré tout, cet indice ayant été intensément étudié, et vu son importance du point de vue pratique, c'est celui que nous retenons pour la suite. Il en existe plusieurs définitions équivalentes, particulièrement nombreuses lorsqu'on se restreint à l'espace de dimension un [30]. Nous ne relèverons que celles introduites par Bouligand [3], qui sont d'ailleurs directement reliées à la dimension de Hausdorff.

Considérons pour cela l'ensemble des points à distance au plus ε de A ; alors si $|A(\varepsilon)|$ dénote la mesure, en dimension D , de $A(\varepsilon)$, on définit la dimension de Bouligand de A , d_B , par

$$d_B(A) = \inf\{\alpha \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\alpha} |A(\varepsilon)| = 0\}$$

On a l'équivalence, lorsque la capacité est définie, entre la dimension de Bouligand et la dimension capacitaire.

Bouligand introduit par ailleurs une dimension locale, pour pouvoir obtenir une borne inférieure de la dimension globale à l'aide d'une connaissance locale de l'ensemble. Pour cela, considérons une boule $B(x, \delta)$ de rayon δ centrée en un point x de A ; évaluant la dimension de $B(x, \delta) \cap A$ comme précédemment, on obtient un indice $d_B(A; x)$. Pour l'ensemble mentionné ci-haut, $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, on a $d_B(A; 0) = \frac{1}{2}$ et $d_B(A; y) = 0$ pour $y \neq 0$.

Il y a équivalence de la dimension de Bouligand globale avec la capacité supérieure (obtenue en prenant $\limsup$ dans la définition de la capacité). Lorsque la dimension de Bouligand locale prend une valeur unique sur tout l'ensemble A , cette valeur est la dimension de Hausdorff de A : cette propriété a récemment été utilisée pour le calcul de la dimension de Hausdorff du graphe de certaines fonctions [7].

Les ensembles à similitude interne constituent une classe d'ensembles dont la dimension a souvent été évaluée, à cause notamment de l'existence d'une dimension dite de similitude, qui coïncide quelquefois avec, par exemple, la dimension capacitaire [16].

Cette propriété de similitude interne est toutefois relativement forte, et des ensembles proches de ceux à similitude interne n'ont pas de dimension de similitude, n'étant pas eux-mêmes auto-semblables. Par exemple, on dit d'un ensemble A qu'il est auto-affine s'il se décompose en un nombre fini de sous-ensembles disjoints A_i , $1 \leq i \leq n$, tels que chaque partie A_i s'obtient de A par une transformation linéaire suivi d'une translation. Plus généralement, lorsque les transformations linéaires générant les parties de la décomposition sont différentes, on dit que l'ensemble est auto-affine par morceaux.

Il existe de fait un cadre encore plus général permettant la définition d'ensembles moins réguliers [4]. Mais nous nous restreignons ici à une classe introduite par Dubuc [5], suivant des idées de von Koch et Kahane [17]. Remarquons que plusieurs ensembles fractals classiques peuvent s'obtenir comme ensembles invariants de systèmes dynamiques, par exemple d'applications unidimensionnelles. Ainsi, l'ensemble triadique de Cantor est l'ensemble invariant de la transformation $f(x) = 3|x-1|$.

3. Courbes de von Koch

Nous construisons de façon récurrente des courbes dans le plan. Cette approche n'est pas unique: Singh [27] distingue en effet trois classes de fonctions continues et non différentiables, à savoir celles définies arithmétiquement, géométriquement ou analytiquement. Se retrouvent dans cette dernière classe les fonctions classiques de Weierstrass et de van der Waerden. Quant aux deux autres classes, elles ont une intersection non vide, et nous donnons des exemples de courbes pouvant se définir aussi bien géométriquement qu'arithmétiquement. Le plus souvent, il s'avère commode, pour effectuer les calculs, d'employer la représentation arithmétique d'une fonction pour déterminer ses propriétés.

Considérons donc une ligne polygonale L_0 , formée de $m+1$ points $P_0(0), \dots, P_m(0)$, et d transformations linéaires $T_1, \dots, T_d$, telles que leur somme soit l'identité. On génère la ligne polygonale L_1 , formée de $md+1$ points $P_0(1), \dots, P_{md}(1)$ définis à l'aide des sommes $S_0 = 0$, $S_j = \sum_{k=1}^j T_k$, $1 \leq j \leq d$, par

$$P_{id+j}(1) = P_i(0) + S_j(P_{i+1}(0) - P_i(0)), \quad 0 \leq i < m, \quad 0 \leq j \leq d.$$

Cette nouvelle ligne polygonale possède entre autres sommets tous ceux de L_0 , et chaque côté de L_0 a été remplacé par d côtés.

En répétant la procédure qui fait passer de L_0 à L_1 , on génère, à l'aide de L_1 , une ligne polygonale L_2 qui possède md^2 côtés, puis, inductivement, une suite L_j , obtenant, sous l'hypothèse que chacune des transformations T_j soit une contraction, une courbe limite que nous notons L_∞ .

La paramétrisation de cette courbe se décrit le plus facilement en utilisant, pour les nombres de l'intervalle $[0,1]$, leur représentation d -adique. Si pour $t \in [0,1]$, on écrit $t = \sum_j i_j d^{-j}$, alors la portion de la courbe entre les sommets $P_r(0)$ et $P_{r+1}(0)$, $0 \leq r \leq m-1$ est décrite par

$$(1) \quad (x(t), y(t)) = P_r(0) + \sum_{j=1}^{\infty} S_{i_j} \left(\circ \sum_{k=1}^j T_{i_k+1}(V) \right)$$

où $\circ$ dénote le produit de composition et $V = P_{r+1}(0) - P_r(0)$.

La construction classique de von Koch se trouve ainsi généralisée, puisque le célèbre flocon de neige s'obtient par le cas particulier suivant: $d = 4$, les quatre transformations linéaires possédant les représentations matricielles

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

et la ligne polygonale originale est formée des trois côtés d'un triangle équilatéral orienté négativement.

Lorsque les transformations T_j sont des similitudes, la courbe obtenue comme limite est dite circulaire. La dimension de telles courbes, lorsqu'elles sont simples, s'obtient comme la dimension de similitude [22]: il suffit de résoudre en β l'équation transcendante, à racine unique, $\sum_i r_i^\beta = 1$, où $r_i = [\det(T_i)]^{1/2}$.

Quand les matrices des opérateurs T_i sont diagonales, on dit que la courbe obtenue est hyperbolique. Nous nous limitons pour la suite aux seules courbes de cette classe, utilisant dans tous les cas comme ligne polygonale de départ L_0 , la diagonale principale du carré unité, c'est-à-dire le segment joignant l'origine au point $(1,1)$.

Dans ce contexte, la représentation de l'équation (1) se simplifie grandement, puisque $V = (1,1)$ et les coordonnées des points de la courbe sont indépendantes l'une de l'autre. Ainsi, chacune des transformations s'écrit $T = \text{diag}[a_i, b_i]$, avec $\sum_i a_i = \sum_i b_i = 1$; si on note (x_i, y_i) , $0 \leq i \leq d$, les coordonnées des sommets de L_1 , incluant $(x_0, y_0) = (0,0)$ et $(x_d, y_d) = (1,1)$, on déduit des relations

$S_0 = 0$, $S_j((1,1)) = (x_j, y_j)$, $1 \leq j \leq d$, les égalités $a_i = x_i - x_{i-1}$, $b_i = y_i - y_{i-1}$, $1 \leq i \leq d$. La condition de contraction s'exprime alors par $|x_i - x_{i-1}|, |y_i - y_{i-1}| < 1$.

Remarquons que dans le cas où $x_i = i/d$, $1 \leq i \leq d$, on a $x(t) = t$ et la courbe est le graphe d'une fonction sur $[0,1]$, dont la valeur en un point se trouve ainsi définie par l'expansion d -adique de ce nombre. C'est le type de fonctions considérées comme définies arithmétiquement [27].

Un exemple simple est obtenu en prenant $d = 4$, $a_i = \frac{1}{4}$, $1 \leq i \leq 4$, et $b_i = \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}$, $1 \leq i \leq 4$, illustré sur la Figure 1: c'est la fonction de répartition d'un ensemble de Cantor tétradique.

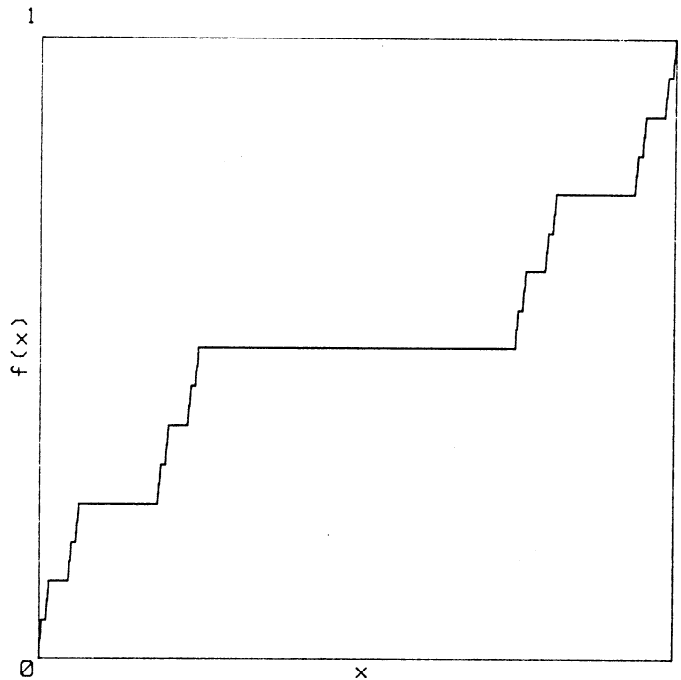


Figure 1

Fonction dérivable presque partout ("escalier du diable")
obtenue comme courbe hyperbolique.

Le cas triadique est étudié en détail à partir d'une définition arithmétique par Hille et Tamarkin [15]; ils prouvent, entre autres propriétés, que cette fonction est différentiable presque partout et que sa dérivée, lorsqu'elle existe, prend la

valeur zéro. Ceci répond donc à la conjecture de Dubuc [5] sur la r reté de la tangente d'une courbe hyperbolique.

Un autre exemple est donné par la courbe de Kieswetter [19]: dans ce cas, $d = 4$, $a_i = \frac{1}{4}$ et $b_i = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, $1 \leq i \leq 4$. L'équation (1) correspond alors à la définition de Kieswetter, que nous reprenons dans sa formulation originale: si

$$x = \sum_j a_j 4^{-j} \quad \text{avec} \quad a_j = 0, 1, 2 \text{ ou } 3, \text{ alors } f(x) = \sum_j (-1)^{N_j} 2^{-j} \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} X_j &= a_j - 2, & a_j &> 0 \\ &= 0, & a_j &= 0 \end{aligned}$$

et N_j est le nombre de X_k prenant la valeur 0, $k < j$. Cette fonction n'est nulle part différentiable.

L'absence de différentiabilité, par opposition à l'exemple précédent, s'explique par les valeurs non nulles de chacun des b_i :

THÉORÈME 1. Une fonction $f(x)$ définie comme courbe hyperbolique de paramètres $a_i = i/d, b_i$, $1 \leq i \leq d$, et pour laquelle aucun des paramètres b_i n'est nul, ne possède pas de dérivée.

PREUVE. Il s'agit de généraliser un argument de Kieswetter. Posons $0 < \gamma_1 \leq b_1 \leq \gamma_2 < 1$. Alors pour $m \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s < t = s + d^{-m} \leq 1$, posons $s = \sum_j i_j d^{-j}$, $0 \leq i_j < d$, et $t = \sum_j l_j d^{-j}$, $0 \leq l_j < d$. Alors

$$f(t) - f(s) = \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i_j} \left[\prod_{k=1}^j b_{i_k+1} \right] = \left[\prod_{k=1}^m b_{i_k+1} \right] y_{d-1} / (1 - b_{d-1}),$$

et donc $|f(t) - f(s)| \geq \gamma_1 n^{n-1} y_{d-1} / (1 - b_{d-1})$ en vertu de l'inégalité entre les moyennes géométrique et harmonique.

D'autre part, il est clair, par l'inégalité du triangle, que pour toute fonction continue f , $A \leq x \leq B$ et $A < B$, au moins une des deux inégalités suivantes est vérifiée: $|f(A) - f(x)| / |A - x| \geq |f(A) - f(B)| / |A - B|$ ou $|f(B) - f(x)| / |B - x| \geq |f(A) - f(B)| / |A - B|$.

Si donc $x \in [0,1]$, on peut trouver x_m tel que $0 \leq x_m \leq x \leq y_m = x_m + d^{-m} \leq 1$; on a alors pour $z_m = x_m$ ou $z_m = y_m$, $|f(x) - f(z_m)|/|x - z_m| \geq |f(x_m) - f(y_m)|/|x_m - y_m| \geq \gamma_1^{m-1} \gamma_{d-1} d^m$ et donc $f(x)$ ne peut être dérivable, car cette dernière expression ne converge pas vers 0 lorsque m tend vers l'infini. $\square$

Nous avons étudié une famille à un paramètre de fonctions f_μ définies comme courbes hyperboliques. Pour chacune d'entre elles, nous avons posé $d = 4$, $a_i = \frac{1}{4}$, $1 \leq i \leq 4$ et fait prendre aux b_i , en ordre croissant de l'indice i , les valeurs μ , $\frac{1}{2} - \mu$, $\frac{1}{2} - \mu$ et $1 - \mu$, le paramètre μ variant de 0 à 1. Cette fonction est symétrique par rapport à la diagonale principale; de plus, pour préserver la contraction des transformations T_i , μ ne peut prendre les valeurs 0 ou 1.

Pour quantifier la variabilité de ces fonctions, et par analogie avec le cas de courbes circulaires où un raisonnement semblable conduit à la dimension de similitude qui coïncide alors avec la dimension de Hausdorff, on introduit [5] les paramètres d'irrégularité p et q : ce sont les solutions des équations transcendentes $\sum_i |a_i|^p = 1$ et $\sum_i |b_i|^q = 1$. La figure 2 montre la valeur du paramètre d'irrégularité q comme fonction de μ .

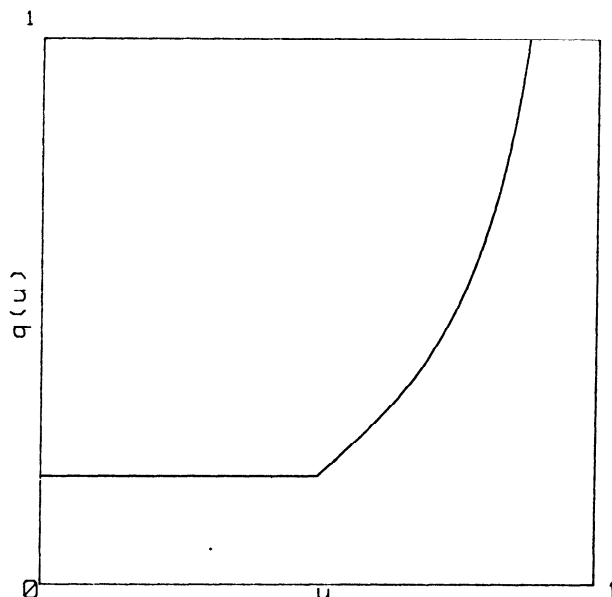


Figure 2

Paramètre d'irrégularité q pour la famille f_μ .

Notons que dans le cas où tous les b_i sont non négatifs, on obtient, à cause de la contrainte sur les sommes des T_i , $q = 1$. Puisque le cas $b_i \geq 0$, $1 \leq i \leq d$, correspond à une fonction monotone, dont le graphe possède une dimension égale à un, on est conduit à la conjecture que la dimension du graphe d'une courbe hyperbolique simple doit être reliée à la valeur des paramètres d'irrégularité. Dans un cas particulier, on a le résultat suivant:

THÉORÈME 2. Une fonction $f(x)$, courbe hyperbolique de paramètres $a_i = i/d$, $1 \leq i \leq d$, et b_i tels que tous les b_i aient même valeur absolue γ , possède un graphe dont la capacité est égale à $2-1/q$, où q est le paramètre d'irrégularité, $q = -\log(\gamma)/\log(d)$.

PREUVE. Il suffit d'utiliser la représentation arithmétique de la fonction. Pour s et t dans un intervalle J de longueur au plus d^{-m} , pour un entier m , on a, en vertu d'un calcul analogue à celui de la démonstration du Théorème 1,

$$|f(s) - f(t)| \leq 2\gamma^m Y / (1 - \gamma), \text{ où } Y = \max |y_i|.$$

Prenant $t = s + d^{-m}$, et donc

$$|f(s) - f(t)| = \gamma^m y_{d-1} / (1 - b_{d-1}),$$

on obtient la double inégalité

$$k_1 |s - t|^{1/q} \leq |f(s) - f(t)| \leq k_2 |s - t|^{1/q}$$

pour deux constantes, k_1 et k_2 , indépendantes de s et t , et $q = -\log(\gamma)/\log(d)$.

Si on cherche à recouvrir le graphe de la fonction $f(x)$, pour x entre 0 et 1, par des cubes de côtés $\epsilon = d^{-m}$, il en faut donc entre $k_1 \epsilon^{1/q-1}$ et $k_2 \epsilon^{1/q-1}$ pour chaque sous-intervalle de longueur d^{-m} , et donc un nombre de cubes total de l'ordre de $\epsilon^{1/q-2}$. Ainsi, dans la notation employée plus haut,

$$\log(N(\epsilon)) / -\log(\epsilon) \text{ tend vers } 2-1/q \text{ lorsque } \epsilon \text{ tend vers } 0. \square$$

La preuve du Théorème 2 repose sur les estimés de l'heuristique de Hölder-Lipschitz [20], qui sont d'une grande utilité dans l'évaluation de la dimension ([1], [2], [18]).

Le cas de valeurs inégales des modules des composantes b_i des transformations T_i donne une variabilité beaucoup plus grande dans les paramètres d'irrégularité.

gularité, même en conservant la valeur $\frac{1}{4}$ pour tous les a_i . En effet, le cas extrême est celui d'une valeur de b_i très proche de 1: le paramètre d'irrégularité peut alors prendre des valeurs arbitrairement grandes. Ceci est illustré sur la Figure 3, où apparaissent les graphes de certains membres de la famille g_v , définie en prenant pour b_i les valeurs $3/4$, $-1/4$, $v - 1/2$ et $1 - v$. Il est remarquable que lorsqu'un des b_i est nul, il suit de la représentation (1) que la fonction est constante sur des intervalles dont la réunion est de pleine mesure.

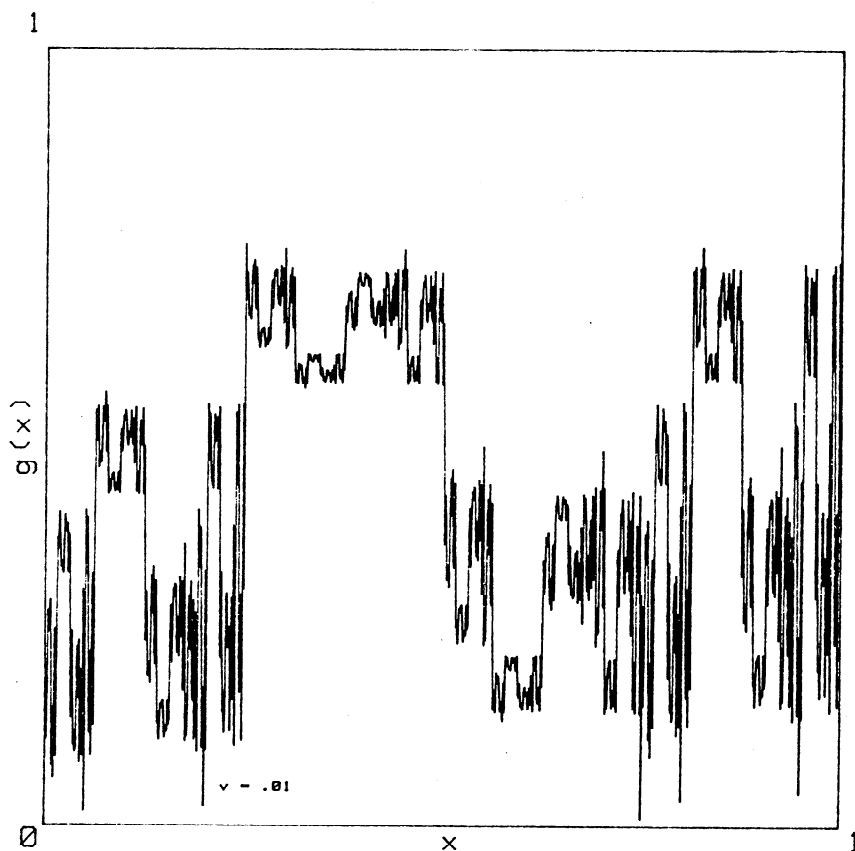


Figure 3a

Graphe de membres de la famille g_v , pour $v = 0.01$.

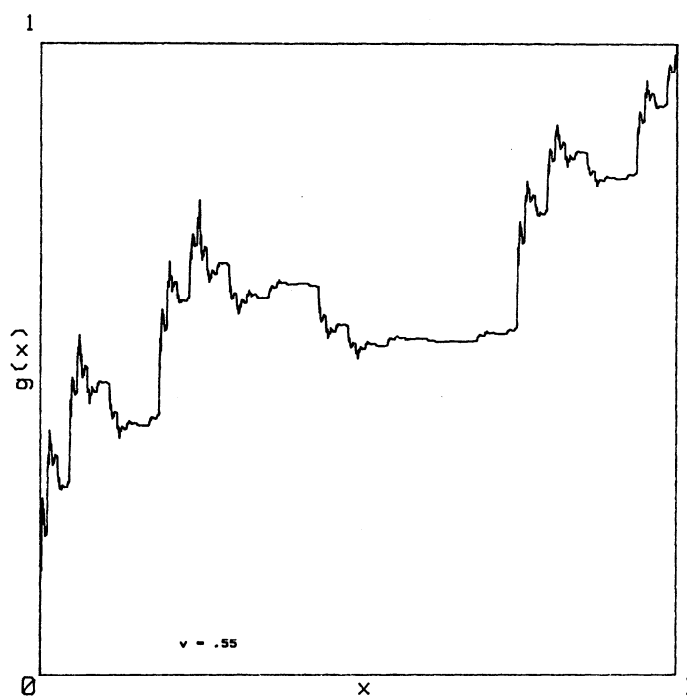


Figure 3b

Graphe de membres de la famille g_v , pour $v = 0.55$.

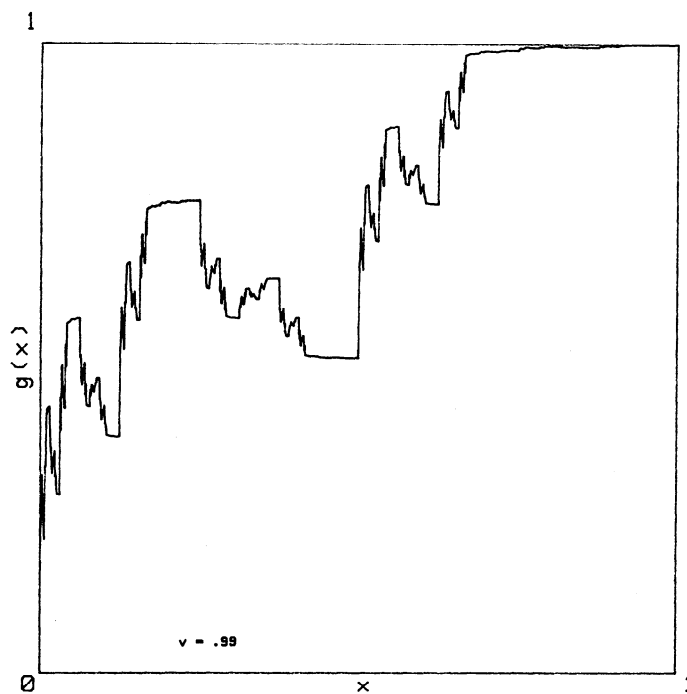


Figure 3c

Graphe de membres de la famille g_v , pour $v = 0.99$.

4. Conclusion

Nous avons présenté le calcul de la dimension capacitaire d'une classe d'ensembles ne possédant pas de propriétés de similitude interne. Nous avons montré que pour les courbes de la classe considérée, des propriétés Lipschitziennes permettent d'obtenir des bornes inférieures et supérieures de la dimension de leurs traces.

Notre étude s'est restreinte à la dimension capacitaire. Il existe un continuum de concepts différents pour la caractérisation dimensionnelle d'un aspect ou un autre des ensembles invariant des systèmes dynamiques [14]. La pertinence de certains de ces indices a toutefois été mise en cause [25], même si une unification conceptuelle de plusieurs d'entre eux semble en voie de réalisation [13].

L'évaluation pratique de ces divers indices continue de susciter un grand intérêt [23]. Plus d'études mathématiques devront toutefois être effectuées afin d'assurer la base théorique de cette méthodologie.

Remerciements

Nous remercions Monsieur Serge Dubuc de nous avoir fourni des éléments bibliographiques. Cette étude a été financièrement soutenue par le MES et le FCAR (Québec), et le CRSNG (Canada).

Bibliographie

- [1] ASSOUD, P., *Etude d'une dimension métrique liée à la possibilité de plongements dans $\mathbb{R}^n$* , C.R. Acad. Sc. Paris 288A(1979), 731-734.
- [2] BESICOVITCH, A.S. et URSELL, H.D., *Sets of fractional dimension (V): On dimensional numbers of some continuous curves*, J. London Math. Soc. 12(1937), 18-25.
- [3] BOULIGAND, G., *Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble fermé*, Bull. Sc. Math. II, 53(1929), 185-192.

- [4] DEKKING, F.M., *Constructions de fractals et problèmes de dimension*, Preprint (1985).
- [5] DUBUC, S., *Une foire de courbes sans tangentes*, dans Actualités mathématiques: Actes du 6^e Congrès du G.M.E.L., Gauthiers Villars, Paris, 1982.
- [6] DUPAIN, Y., MENDES-FRANCE, M. et TRICOT, C., Jr., *Dimension de spirales*, Bull. soc. math. France, 111(1983), 193-201.
- [7] ELQORTOBI, A., *Propriétés extrémales de courbes de Mandelbrot*, Thèse de doctorat (mathématiques), Université de Montréal, 1986.
- [8] FARMER, J.D., OTT, E. et YORKE, J.A., *The dimension of chaotic attractors*, Physica, 7D(1983), 153-180.
- [9] FEIGENBAUM, M., *Universal behavior in nonlinear systems*, Los Alamos Science, 1(1981), 4-27.
- [10] GRASSBERGER, P. et PROCACCIA, I., *Characterization of strange attractors*, Phys. Rev. Letters, 50(1983), 346-349.
- [11] GREBOGI, C., OTT, E., PELIKAN, S. et YORKE, J.A., *Strange attractors that are not chaotic*, Physica, 13D(1984), 261-268.
- [12] GUCKENHEIMER, J., *Dimension estimates for attractors*, Contemp. Math., 28(1984), 357-367.
- [13] HALSEY, T.C., JENSEN, M.H., KADANOFF, L.P., PROCACCIA, I. et SHRAIMAN, B.I., *Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets*, Phys. Review, 33A(1986), 1141-1151.
- [14] HENTSCHEL, H.G.E. et PROCACCIA, I., *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*, Physica, 8D(1983), 435-444.
- [15] HILLE, E. et TAMARKIN, J.D., *Remarks on a known example of a monotone continuous function*, Am. Math. Monthly, 36(1929), 255-264.

- [16] HUTCHINSON, J.E., *Fractals and self-similarity*, Indiana U. Math. J., 30(1981), 713-747.
- [17] KAHANE, J.P., *Courbes étranges, ensembles minces*, Bull. A.P.M.E.P., 49(1970), 325-339.
- [18] KAPLAN, J.L., MALLET-PARRET, J. et YORKE, J.A., *The Lyapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 4(1984), 261-281.
- [19] KIESWETTER, K., *Ein einfaches beispiel für eine funktion, welche überall stetig und nicht differentziebar ist.*, Math. Phys. Semesterber, 13(1966), 216-221.
- [20] MANDELBROT, B., *Fractals: Form, Chance and Dimension*, W.H. Freeman, San Francisco, 1977.
- [21] MANDELBROT, B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [22] MARION, J., *Dimension de Hausdorff d'une courbe circulaire simple de von Koch*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, VI(1984), 21-24.
- [23] MAYER-KREISS, G., éd., *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*, Springer Séries in Synergetics # 32, Berlin, 1986.
- [24] NICOLIS, C. et NICOLIS, G., *Is there a climatic attractor?* Nature, 311(1984), 529-532.
- [25] OTT, E., WITHERS, W.D. et YORKE, J.A., *Is the dimension of chaotic attractors invariant under coordinate changes?* J. Stat. Phys., 36(1984), 687-697.
- [26] RAPP, P.E., ZIMMERMAN, I.D., ALBANO, A.M., DEGUZMAN, G.C. et GREENBAUM, N.N., *Dynamics of spontaneous neural activity in the simian motor cortex: the dimension of chaotic neurons*, Phys. Letters, 110A(1985), 335-338.

- [27] SINGH, A.N., *The theory and construction of nondifferentiable functions*, dans Squaring the Circle and Other Monographs, Ed. E.W. Hobson, Chelsea, New York, 1953.
- [28] TAKENS, F., *Detecting strange attractors in turbulence*, dans Dynamical Systems and Turbulence, Springer Lecture Notes in Mathematics, # 898, Berlin, 1981.
- [29] TAKENS, F., *On the numerical determination of the dimension of an attractor*, dans Dynamical Systems and Bifurcations, Springer Lecture Notes in Mathematics, # 1125, Berlin, 1985.
- [30] TRICOT, C., *Douze définitions de la densité logarithmique*, C.R. Acad. Sc. Paris, 293A(1981), 549-552.

Département de mathématiques et
de statistique
et
Centre de recherches mathématiques
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec
Canada H3C 3J7

Manuscrit reçu le 9 septembre 1986.