

LA LOI D'UNE STATISTIQUE COMBINANT LES STATISTIQUES DE WILCOXON ET D'ANSARI-BRADLEY¹

Yves Lepage, Louis Houde et Robert Cloutier

Sommaire

Une approximation par une loi gamma de la loi exacte, sous l'hypothèse nulle, d'une statistique basée sur les rangs construite en combinant les statistiques de Wilcoxon et d'Ansari-Bradley est présentée. Cette statistique est très utile pour un problème de position et de dispersion à deux échantillons. Des comparaisons avec la loi asymptotique sont aussi établies.

1. Introduction

Soient $X_1, \dots, X_m$ et $Y_1, \dots, Y_n$ deux échantillons aléatoires provenant de populations avec fonction de répartition continue $F(x)$ et $G(y)$ respectivement. Afin de confronter $H_0: F(x) = G(x)$ contre $H: G(x) = F(ax+b)$ avec $a \neq 1$ ou $b \neq 0$ ($a > 0$), F et G sont inconnues, une procédure présentée par Lepage (1971 et 1977) consiste à rejeter H_0 pour des grandes valeurs de T où

$$T = \frac{[T_1 - E(T_1|H_0)]^2}{\text{Var}(T_1|H_0)} + \frac{[T_2 - E(T_2|H_0)]^2}{\text{Var}(T_2|H_0)}$$

avec T_1 et T_2 représentant respectivement la statistique de Wilcoxon et la statistique d'Ansari-Bradley.

¹ Ce travail a été partiellement subventionné par le CRSNG du Canada (Subvention A-8555) et le Ministère de l'Éducation du Québec (Subvention FCAC).

En posant $V_i = 1$ ou 0 selon que la i -ième statistique d'ordre des $N = m + n$ observations est un X ou un Y , on a

$$T_1 = \sum_{i=1}^N iV_i \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{1}{2}m(N+1) - \sum_{i=1}^N \left| i - \frac{1}{2}(N+1) \right| V_i.$$

De plus, on a

$$E(T_1|H_0) = \frac{1}{2}m(N+1), \quad \text{Var}(T_1|H_0) = \frac{1}{12}mn(N+1)$$

et

$$E(T_2|H_0) = \begin{cases} \frac{1}{4}m(N+2) & \text{si } N \text{ est pair,} \\ \frac{1}{4}m(N+1)^2/N & \text{si } N \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$\text{Var}(T_2|H_0) = \begin{cases} mn(N^2-4)/48(N-1) & \text{si } N \text{ est pair,} \\ mn(N+1)(N^2+3)/48N^2 & \text{si } N \text{ est impair.} \end{cases}$$

De Lepage (1971 et 1973), sous H_0 , la loi exacte de T est tabulée pour $m = 2(1)30$, $n = 2$; $m = 3(1)26$, $n = 3$; $m = 4(1)18$, $n = 4$; $m = 5(1)13$, $n = 5$; $m = 6(1)10$, $n = 6$; $m = 7, 8$, $n = 7$. Aussi, sous H_0 , la loi asymptotique de T est une loi χ_2^2 lorsque $\min(m, n) \rightarrow \infty$. Comme l'ajustement de cette loi asymptotique n'est valide que pour de grandes valeurs de m et n , une étude de la loi de T pour des valeurs modérées de m et n s'impose.

L'approximation de la loi de la statistique de Wilcoxon (T_1) a déjà fait l'objet d'une étude. En effet, Buckle, Kraft et van Eeden (1969b) ont obtenu des résultats en approximant V_i par une loi uniforme sur l'intervalle $(0,1)$; on obtient ainsi une approximation de la loi de la statistique de Wilcoxon à l'aide d'une somme de lois uniformes indépendantes. Différents points critiques sont calculés pour $N = 1(1)30$ dans Buckle, Kraft et van Eeden (1969a). Quant à la loi de la statistique d'Ansari-Bradley (T_2), elle n'a fait l'objet d'aucune étude et a fortiori, il en est de même pour la loi de T . La méthode proposé dans cet article est très simple et relativement efficace.

Dans la section 2, la moyenne et la variance exactes de T sous H_0 sont déterminées et, comme une loi χ_2^2 est un cas particulier d'une loi gamma, une approximation gamma pour la loi de T sous H_0 est construite à l'aide de la méthode

des moments. Une comparaison entre l'approximation gamma et l'approximation χ^2_2 est établie dans la section 3 pour des valeurs modérées de m et n .

2. L'approximation gamma

Evidemment, on a $E(T|H_0) = 2$. Pour obtenir $\text{Var}(T|H_0)$, on doit évaluer $E((T_i - E(T_i|H_0))^4|H_0)$, $i = 1, 2$, et $E((T_1 - E(T_1|H_0))^2(T_2 - E(T_2|H_0))^2|H_0)$. Après plusieurs manipulations algébriques élémentaires, on obtient

$$\text{Var}(T|H_0) = \frac{N(N-1)(N(N+1)-6mn)S}{mn(N-2)(N-3)} + \frac{8(m-1)(n-1)N(N-1)}{mn(N-2)(N-3)} - 4 \quad (2.1)$$

où

$$S = \begin{cases} \frac{3(3N^2-7)}{5N(N^2-1)} + \frac{2(3N^4-40N^2+112)}{5N(N^2-4)^2} + \frac{6(2N^4-15N^2+28)}{5N(N^2-1)(N^2-4)} & \text{si } N \text{ est pair,} \\ \frac{3(3N^2-7)}{5N(N^2-1)} + \frac{3(3N^6+23N^4-135N^2+45)}{5N(N^2-1)(N^2+3)^2} + \frac{12(N^2+1)(N^2-5)}{5N(N^2-1)(N^2+3)} & \text{si } N \text{ est impair.} \end{cases}$$

L'expression (2.1) pour $\text{Var}(T|H_0)$ sera dénotée par $V(m,n)$.

Comme la moyenne et la variance d'une loi gamma avec paramètres a et b , notée $\Gamma(a,b)$, sont ab et ab^2 respectivement, on trouve selon la méthode des moments que les paramètres de la loi gamma approximant la loi de T sous H_0 sont données par

$$a = 4/V(m,n) \quad \text{et} \quad b = V(m,n)/2. \quad (2.2)$$

Dans le Tableau 1, on trouve les valeurs de a et b pour différentes valeurs de m et n , $n \leq m \leq 50$.

3. Comparaison de l'approximation

Dénotons par $\gamma(\alpha, m, n)$ le point tel que $P(X \geq \gamma(\alpha, m, n)) = \alpha$ où X représente une variable aléatoire suivant une loi gamma avec paramètres donnés par (2.2). Afin de trouver $\gamma(\alpha, m, n)$, une méthode d'intégration numérique de la librairie IMSL (Edition 7, 1979) a été utilisée au Centre de calcul de l'Université de

Montréal. La précision pour le calcul des paramètres a et b de la loi gamma et pour le calcul du point $\gamma(\alpha, m, n)$ est de l'ordre de 10^{-12} . Le recours à l'intégration numérique est nécessaire du fait de l'imprécision des points critiques retrouvés dans les tables de la loi gamma (voir Johnson, Nixon et Amos (1963)).

Pour une paire (m, n) et α entre 0 et 1, dénotons par $T(\alpha, m, n)$ le point critique exact, c'est-à-dire la plus petite valeur possible t de T telle que $P_{m,n}(T \geq t) \leq \alpha$ où $P_{m,n}$ représente la mesure de probabilité sous H_0 . Enfin, dénotons par $\chi_2^2(\alpha)$ le point tel que $P(\chi_2^2 \geq \chi_2^2(\alpha)) = \alpha$.

Comme sur la frontière de la Table 1 de Lepage (1973), $|T(0.20, m, n) - \chi_2^2(0.20)| \leq 0.20$, le cas $\alpha = 0.20$ est délaissé. Dans le Tableau 1, les valeurs du point critique $\gamma(\alpha, m, n)$ sont présentées pour $\alpha = 0.01, 0.05$ et 0.10 pour différentes valeurs de m et n , $n \leq m \leq 50$.

Pour α et n fixes mais m n'appartenant pas au Tableau 1, la valeur de $\gamma(\alpha, m, n)$ peut être obtenue par interpolation linéaire puisque la perte de précision est généralement négligeable. Enfin, pour mieux juger de la précision de l'approximation de la loi T par une loi gamma, le niveau exact, son approximation par la loi khi-deux, sont approximation par la loi gamma sont calculés de même que les niveaux réels basés sur les points critiques d'une loi gamma ($\gamma(\alpha, m, n)$) et d'une loi khi-deux ($\chi_2^2(\alpha)$).

Le Tableau 2 donne le point critique exact ($T(\alpha, m, n)$), le niveau exact ($\alpha(m, n) = P_{m,n}(T \geq T(\alpha, m, n))$), le niveau approximatif calculé à l'aide de la loi khi-deux ($\alpha(\chi_2^2) = P(\chi_2^2 \geq T(\alpha, m, n))$), le niveau approximatif calculé à l'aide de la loi gamma ($\alpha(\Gamma) = P(\Gamma(a, b) \geq T(\alpha, m, n))$) et les niveaux réels des tests construits à l'aide de l'approximation gamma et de l'approximation khi-deux pour $\alpha = 0.01, 0.05$ et 0.1 . Les valeurs de m et n ont été choisies dans le but de distinguer trois cas: les valeurs sur la diagonale ($m = n$), les valeurs extrêmes ($n \ll m$) et les valeurs intermédiaires ($n < m$).

Lorsque le niveau exact se situe près de 0.01, l'approximation par une loi gamma donne de très bons résultats. On note ainsi que pour ce niveau, le test découlant de l'approximation gamma est conservateur et le niveau réel est beaucoup plus près du niveau exact qu'en utilisant la loi khi-deux. Il y a toutefois quelques exceptions à cette règle; lorsqu'une des tailles est petite, 3 ou 4, le niveau réel obtenu par la gamma est libéral mais il s'approche rapidement du niveau exact lorsque l'autre taille augmente.

Pour un niveau exact près de 0.05, le niveau réel calculé par la loi gamma est toujours libéral si $m = n$ mais dans ce cas, l'erreur de l'approximation par la loi gamma est légèrement moindre que l'erreur de l'approximation par la loi khi-deux. Cependant, lorsque les tailles diffèrent, l'erreur de l'approximation par la loi gamma se réduit et pour des différences extrêmes ($m \ll n$), le niveau approximatif donne un test conservateur.

Le niveau exact 0.10 est nettement mieux approximé par la loi khi-deux car elle donne un niveau conservateur et très près de la valeur exacte. Par contre, pour des tailles extrêmes le niveau approximatif donné par la loi gamma est très près du niveau exact et de plus, le test correspondant est conservateur.

En conséquence, l'approximation de la loi de T par une loi gamma peut avantageusement être utilisée au niveau 0.01 et 0.05 si $m \neq n$. Pour un niveau de 0.10 ou lorsque $m = n$, l'approximation basée sur la loi khi-deux est préférable sauf dans le cas où $n \ll m$.

Tableau 1

Approximation gamma de la loi d'une statistique combinant les statistiques de Wilcoxon et d'Ansari-Bradley: points critiques $\gamma(\alpha, m, n)$ et $\chi^2_2(\alpha)$ pour $\alpha = 0.01, 0.05$ et 0.10 .

m	n	$\gamma(.01, m, n)$	$\gamma(.05, m, n)$	$\gamma(.10, m, n)$	m	n	$\gamma(.01, m, n)$	$\gamma(.05, m, n)$	$\gamma(.10, m, n)$
30	2	7.8446	5.3476	4.2474	11	11	8.5440	5.8824	4.4366
35	2	7.8714	5.3606	4.2548	20	11	8.7196	5.7642	4.4818
40	2	7.8869	5.3691	4.2591	30	11	8.8025	5.8034	4.5033
45	2	7.9018	5.3754	4.2633	40	11	8.8478	5.8245	4.5148
50	2	7.9108	5.3754	4.2658	50	11	8.8761	5.8376	4.5220
26	3	8.2017	5.5199	4.3456	12	12	8.6022	5.7097	4.4517
35	3	8.2589	5.5472	4.3610	20	12	8.7417	5.7750	4.4878
40	3	8.2807	5.5576	4.3668	30	12	8.8227	5.8128	4.5084
45	3	8.2956	5.5647	4.3708	40	12	8.8668	5.8333	4.5196
50	3	8.3039	5.5710	4.3744	50	12	8.8945	5.8461	4.5266
18	4	8.2841	5.5592	4.3677	13	13	8.6510	5.7327	4.4644
25	4	8.3821	5.6058	4.3939	20	13	8.7611	5.7841	4.4927
35	4	8.4522	5.6390	4.4124	30	13	8.8399	5.8208	4.5128
45	4	8.4904	5.6571	4.4225	40	13	8.8831	5.8408	4.5237
50	4	8.5032	5.6631	4.4259	50	13	8.9103	5.8535	4.5306
13	5	8.2757	5.5552	4.3655	14	14	8.6926	5.7521	4.4751
25	5	8.4972	5.6603	4.4243	20	14	8.7789	5.7924	4.4972
35	5	8.5672	5.6933	4.4429	30	14	8.8552	5.8279	4.5167
45	5	8.6060	5.7115	4.4527	40	14	8.8973	5.8474	4.5273
50	5	8.6198	5.7180	4.4563	50	14	8.9240	5.8598	4.5341
10	6	8.2433	5.5937	4.3568	15	15	8.7285	5.7689	4.4843
20	6	8.5172	5.6697	4.4295	25	15	8.8378	5.8198	4.5122
30	6	8.6162	5.7163	4.4553	35	15	8.8918	5.8449	4.5259
40	6	8.6666	5.7400	4.4684	50	15	8.9360	5.8653	4.5371
50	6	8.6971	5.7542	4.4763	16	16	8.7538	5.7834	4.4923
8	7	8.2018	5.5199	4.3456	25	16	8.8503	5.8256	4.5154
15	7	8.4853	5.6551	4.4214	35	16	8.9032	5.8501	4.5288
25	7	8.6341	5.7247	4.4600	50	16	8.9466	5.8703	4.5398
40	7	8.7227	5.7662	4.4829	17	17	8.7871	5.7962	4.4993
50	7	8.7529	5.7803	4.4906	25	17	8.8620	5.8311	4.5184
8	8	8.2762	5.5554	4.3656	35	17	8.9135	5.8549	4.5314
15	8	8.5363	5.6787	4.4345	50	17	8.9561	5.8746	4.5421
25	8	8.6785	5.7455	4.4715	18	18	8.8114	5.8075	4.5055
40	8	8.7649	5.7859	4.4937	25	18	8.8723	5.8358	4.5210
50	8	8.7947	5.7998	4.5013	35	18	8.9227	5.8592	4.5337
9	9	8.3865	5.6079	4.3951	50	18	8.9646	5.8786	4.5443
20	9	8.6610	5.7373	4.4670	19	19	8.8330	5.8176	4.5110
30	9	8.7508	5.7793	4.4901	25	19	8.8820	5.8403	4.5235
40	9	8.7983	5.8015	4.5022	35	19	8.9313	5.8632	4.5359
50	9	8.8277	5.8151	4.5097	50	19	8.9723	5.8821	4.5462
10	10	8.4736	5.6491	4.4181	20	20	8.8524	5.8266	4.5160
20	10	8.6926	5.7521	4.4751	30	20	8.9182	5.8571	4.5326
30	10	8.7791	5.7925	4.4973	40	20	8.9553	5.8742	4.5419
40	10	8.8253	5.8140	4.5091	50	20	8.9794	5.8854	4.5480
50	10	8.8541	5.8274	4.5164					

Tableau 1 (suite)

m	n	$\gamma(.01, m, n)$	$\gamma(.05, m, n)$	$\gamma(.10, m, n)$	m	n	$\gamma(.01, m, n)$	$\gamma(.05, m, n)$	$\gamma(.10, m, n)$
21	21	8.8699	5.8347	4.5204	35	35	9.0083	5.8987	4.5552
30	21	8.9256	5.8605	4.5345	45	35	9.0322	5.9097	4.5612
40	21	8.9621	5.8774	4.5436	50	35	9.0410	5.9138	4.5634
50	21	8.9858	5.8883	4.5496					
					36	36	9.0140	5.9014	4.5566
22	22	8.8858	5.8421	4.5244	45	36	9.0347	5.9109	4.5618
30	22	8.9327	5.8638	4.5363	50	36	9.0436	5.9150	4.5640
40	22	8.9695	5.8803	4.5452					
50	22	8.9917	5.8910	4.5511	37	37	9.0194	5.9039	4.5580
					45	37	9.0373	5.9121	4.5624
23	23	8.9003	5.8488	4.5281	50	37	9.0459	5.9161	4.5646
30	23	8.9390	5.8667	4.5378					
40	23	8.9742	5.8830	4.5467	38	38	9.0245	5.9062	4.5593
50	23	8.9972	5.8936	4.5524	45	38	9.0396	5.9132	4.5630
					50	38	9.0492	5.9171	4.5652
24	24	8.9135	5.8549	4.5314					
30	24	8.9451	5.8696	4.5394	39	39	9.0294	5.9084	4.5605
40	24	8.9797	5.8855	4.5481	45	39	9.0419	5.9142	4.5636
50	24	9.0023	5.8959	4.5537	50	39	9.0504	5.9181	4.5657
25	25	8.9256	5.8605	4.5345	40	40	9.0339	5.9106	4.5616
35	25	8.9697	5.8809	4.5456	50	40	9.0525	5.9191	4.5662
50	25	9.0069	5.8981	4.5549					
					41	41	9.0393	5.9126	4.5627
26	26	8.9368	5.8657	4.5373	50	41	9.0545	5.9200	4.5667
35	26	8.9746	5.8809	4.5468					
50	26	9.0114	5.9001	4.5559	42	42	9.0425	5.9145	4.5637
					50	42	9.0565	5.9209	4.5672
28	28	8.9568	5.8749	4.5423					
40	28	8.9980	5.8940	4.5526	43	43	9.0464	5.9163	4.5647
50	28	9.0193	5.9038	4.5580	50	43	9.0583	5.9218	4.5677
29	29	8.9657	5.8791	4.5445	44	44	9.0502	5.9180	4.5657
40	29	9.0019	5.8958	4.5536	50	44	9.0601	5.9226	4.5681
50	29	9.0230	5.9055	4.5589					
					45	45	9.0538	5.9197	4.5665
30	30	8.9740	5.8829	4.5466	50	45	9.0619	5.9234	4.5685
40	30	9.0057	5.8975	4.5545					
50	30	9.0264	5.9071	4.5597	46	46	9.0572	5.9213	4.5674
					50	46	9.0635	5.9242	4.5690
31	31	8.9818	5.8865	4.5486					
40	31	9.0091	5.8991	4.5554	47	47	9.0605	5.9228	4.5682
50	31	9.0296	5.9086	4.5605	50	47	9.0651	5.9249	4.5694
32	32	8.9890	5.8898	4.5504	48	48	9.0637	5.9242	4.5690
40	32	9.0125	5.9007	4.5562	50	48	9.0667	5.9256	4.5697
50	32	9.0327	5.9100	4.5613					
					49	49	9.0667	5.9256	4.5698
33	33	8.9959	5.8930	4.5521	50	50	9.0696	5.9270	4.5705
45	33	9.0266	5.9071	4.5598					
50	33	9.0356	5.9113	4.5620					
34	34	9.0023	5.8960	4.5537					
45	34	9.0294	5.9085	4.5605					
50	34	9.0410	5.9138	4.5634					

 $\chi^2_2(0)$

9.210

5.991

4.605

Tableau 2

Points critiques exacts ($T(\alpha, m, n)$), niveaux exacts ($\alpha(m, n)$), niveaux approximatifs calculés à l'aide de la loi khi-deux ($\alpha(\chi^2_2)$), niveaux approximatifs calculés à l'aide de la loi gamma ($\alpha(\Gamma)$), niveaux réels du test approximatif selon une loi gamma ($P(T > \Gamma(\alpha))$) et niveaux réels du test approximatif selon une loi khi-deux ($P(T \geq \chi^2_2(\alpha))$) pour $\alpha = 0.01, 0.05$ et 0.10 .

m	n	$T(\alpha, m, n)$	$\alpha(m, n)$	$\alpha(\chi^2_2)$	$\alpha(\Gamma)$	$P(T > \Gamma(\alpha))$	$P(T \geq \chi^2_2(\alpha))$
20	3	9.247	0.0079	0.0056	0.0050	0.0079	0.0050
		5.610	0.0429	0.0605	0.0464	0.0355	0.0530
		4.180	0.0994	0.1237	0.1090	0.0813	0.0892
30	3	8.842	0.0088	0.0133	0.0078	0.0059	0.0117
		5.438	0.0497	0.0660	0.0530	0.0356	0.0477
		4.357	0.0993	0.1132	0.0998	0.0808	0.0993
40	3	8.952	0.0088	0.0114	0.0067	0.0056	0.0114
		5.525	0.0493	0.0631	0.0510	0.0387	0.0489
		4.357	0.0993	0.1132	0.0998	0.0799	0.0928
50	3	8.638	0.0090	0.0133	0.0082	0.0071	0.0100
		5.582	0.0468	0.0614	0.0497	0.0375	0.0468
		4.284	0.0995	0.1174	0.1053	0.0788	0.0901
10	4	7.780	0.0080	0.0172	0.0093	0.0040	0.0080
		5.445	0.0500	0.0657	0.0494	0.0320	0.0500
		4.205	0.0958	0.1222	0.1055	0.0799	0.0939
20	4	8.479	0.0100	0.0144	0.0091	0.0064	0.0105
		5.587	0.0493	0.0612	0.0497	0.0395	0.0504
		4.228	0.0998	0.1208	0.1090	0.0832	0.0932
30	4	8.365	0.0100	0.0153	0.0103	0.0066	0.0095
		5.551	0.0499	0.0623	0.0521	0.0398	0.0478
		4.312	0.0963	0.1158	0.1054	0.0865	0.0929
40	4	8.577	0.0093	0.0137	0.0096	0.0067	0.0107
		5.538	0.0499	0.0627	0.0532	0.0401	0.0479
		4.273	0.0998	0.1180	0.1084	0.0848	0.0924
50	4	8.517	0.0100	0.0141	0.0099	0.0069	0.0101
		5.634	0.0500	0.0598	0.0518	0.0399	0.0473
		4.281	0.0997	0.1176	0.1084	0.0846	0.0940
10	5	8.044	0.0090	0.0179	0.0106	0.0030	0.0070
		5.447	0.0486	0.0656	0.0513	0.0353	0.0473
		4.487	0.0985	0.1061	0.0911	0.0872	0.1072
15	5	8.269	0.0098	0.0160	0.0104	0.0053	0.0095
		5.486	0.0499	0.0644	0.0529	0.0359	0.0480
		4.383	0.0988	0.1118	0.0999	0.0840	0.0988
20	5	8.332	0.0098	0.0155	0.0106	0.0059	0.0093
		5.520	0.0500	0.0633	0.0533	0.0380	0.0463
		4.383	0.0997	0.1118	0.1014	0.0852	0.0979
25	5	8.464	0.0100	0.0145	0.0102	0.0067	0.0098
		5.538	0.0496	0.0628	0.0536	0.0389	0.0462
		4.359	0.0992	0.0031	0.1037	0.0845	0.0972

m	n	$T(\alpha, m, n)$	$\alpha(m, n)$	$\alpha(\chi^2_2)$	$\alpha(\Gamma)$	$P(T > \Gamma(\alpha))$	$P(T \geq \chi^2_2(\alpha))$
6	8	7.628	0.0087	0.0221	0.0122	0.0000	0.0043
		5.769	0.0478	0.0559	0.0395	0.0368	0.0563
		4.835	0.0996	0.0985	0.0800	0.0996	0.1061
7	7	7.532	0.0099	0.0231	0.0144	0.0017	0.0058
		5.654	0.0484	0.0592	0.0478	0.0390	0.0583
		4.511	0.0985	0.1048	0.0896	0.0938	0.1137
16	7	8.242	0.0100	0.0162	0.0116	0.0054	0.0084
		5.711	0.0498	0.0575	0.0487	0.0403	0.0512
		4.582	0.0996	0.1012	0.0917	0.0980	0.1078
8	8	7.858	0.0095	0.0197	0.0128	0.0029	0.0065
		5.691	0.0493	0.0584	0.0465	0.0459	0.0999
		4.590	0.0999	0.1007	0.0878	0.0981	0.1130
9	9	8.108	0.0099	0.0179	0.0118	0.0035	0.0079
		5.759	0.0497	0.0582	0.0458	0.0422	0.0518
		4.582	0.0993	0.1018	0.0899	0.0968	0.1097
14	9	8.250	0.0100	0.0162	0.0119	0.0054	0.0084
		5.773	0.0500	0.0558	0.0477	0.0438	0.0528
		4.568	0.0996	0.1019	0.0932	0.0974	0.1059
19	9	8.427	0.0100	0.0148	0.0113	0.0061	0.0086
		5.801	0.0500	0.0550	0.0481	0.0439	0.0515
		4.551	0.0999	0.1028	0.0954	0.0962	0.1055
10	10	8.235	0.0099	0.0163	0.0118	0.0047	0.0075
		5.744	0.0498	0.0566	0.0474	0.0420	0.0515
		4.537	0.998	0.1035	0.0936	0.0954	0.1101
17	10	8.416	0.0100	0.0149	0.0114	0.0060	0.0088
		5.779	0.0500	0.0556	0.0487	0.0454	0.0519
		4.562	0.0998	0.1022	0.0948	0.0973	0.1055
11	11	8.315	0.0100	0.0156	0.0114	0.0052	0.0083
		5.757	0.0498	0.0582	0.0480	0.0435	0.0529
		4.573	0.0998	0.1016	0.0927	0.0961	0.1081
12	11	8.358	0.0100	0.0153	0.0113	0.0054	0.0086
		5.763	0.0499	0.0562	0.0480	0.0446	0.0516
		4.573	0.0999	0.1016	0.0931	0.0978	0.1048
12	12	8.394	0.0100	0.0150	0.0112	0.0056	0.0087
		5.816	0.0499	0.0546	0.0471	0.0443	0.0517
		4.544	0.1000	0.1031	0.0951	0.0977	0.1060

Bibliographie

- BUCKLE, N., KRAFT, C.H. and VAN EEDEN, C. (1969a), *Tables de la fonction de répartition et des pourcentiles pour la somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniformes*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Canada.
- BUCKLE, N., KRAFT, C.H. and VAN EEDEN, C. (1969b), *An approximation to Wilcoxon-Mann-Whitney distribution*, JASA 64, 591-599.
- JOHNSON, N.L., NIXON, E. and AMOS, D.E. (1963), *Table of percentage points of Pearson curves, for given $\sqrt{\beta_1}$ and β_2 , expressed in standard measure*, Biometrika 50, 459-498.
- LEPAGE, Y. (1971), *A combination of Wilcoxon's and Ansari-Bradley's statistics*, Biometrika 58, 213-217.
- LEPAGE, Y. (1973), *A table for a combined Wilcoxon Ansari-Bradley statistic*, Biometrika 60, 113-116.
- LEPAGE, Y. (1977), *A class of nonparametric tests for location and scale parameters*, Comm. Statist. A6(7), 649-659.

Département de mathématiques
et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec
Canada H3C 3J7