

APPROXIMATION DISCONTINUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES: LA MÉTHODE DES α François Dubeau¹

1. Introduction

Dans [7], Delfour, Hager et Trochu présentent des méthodes variationnelles de résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires en utilisant une approximation discontinue de la solution. Ils généralisent ainsi une méthode introduite par Lesaint et Raviart [10]. Ils développent des méthodes à un pas et étudient leurs propriétés de convergence lorsqu'elles sont appliquées à des systèmes linéaires.

L'objet de cet article est d'étendre les résultats de convergence aux systèmes non linéaires. Cela permet de répondre à quelques interrogations soulevées dans [7] et d'identifier certains problèmes. Ainsi au paragraphe 2 nous présentons les méthodes et, au paragraphe 3, nous discuterons de la mise-en-oeuvre. Finalement, au paragraphe 4, nous donnerons les résultats de convergence. Les annexes contiennent des exemples et des résultats auxiliaires.

Les techniques employées ici sont essentiellement celles développées par Delfour et Dubeau [6] et F. Dubeau [9]. D'autres applications de l'approche variationnelle utilisée ici sont mentionnées aux références [6] et [7].

Nous utiliserons les notations suivantes: $x \cdot y$ et $|x|$ sont le produit scalaire et la norme de $\mathbb{R}^n$. Les espaces de fonctions $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ considérés

¹ Ce travail a été réalisé partiellement à l'aide d'une subvention FCAR(EQ-252) du Ministère de l'éducation du Québec.

sont: l'espace $L^2(a,b;\mathbb{R}^n)$ des fonctions de carré intégrable muni du produit scalaire $(x,y) = \int_a^b x(t) \cdot y(t) dt$ et de la norme $\|x\|_0 = (x,x)^{\frac{1}{2}}$, l'espace $L^\infty(a,b;\mathbb{R}^n)$ des fonctions essentiellement bornées muni de la norme $\|x\|_\infty = \text{ess sup}\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ et l'espace $\Pi^k(a,b;\mathbb{R}^n)$ des fonctions ayant des dérivées absolument continues jusqu'à l'ordre $k-1$ et une dérivée d'ordre k de carré intégrable muni de la norme $\|x\|_k = \left\{ \sum_{\ell=0}^k \|x^{(\ell)}\|_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$. Des notations complémentaires seront introduites lorsque cela sera nécessaire.

2. Description de la méthode

Considérons l'équation différentielle

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t),t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x^0,$$

où $x: [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \times [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Nous supposons que l'application f vérifie les hypothèses suivantes:

i) l'application $t \rightarrow f(x,t)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

ii) (condition de Lischitz) il existe une fonction g de $L^2(0,T;\mathbb{R})$ telle que pour presque tout $t \in [0,T]$ et tous points x_1 et x_2 de $\mathbb{R}^n$ l'on ait

$$(2.2) \quad |f(x_1,t) - f(x_2,t)| \leq g(t)|x_1 - x_2|,$$

iii) l'application $t \rightarrow f(0,t)$ est dans $L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$.

Alors, selon C. Caratheodory [3], le système (2.1) possède une solution unique $x(\cdot, x^0)$ dans $H^1(0,T;\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante $c(T)$ telle que

$$(2.3) \quad \|x(\cdot; x^0) - x(\cdot; \bar{x}^0)\|_1 \leq c(T) |x^0 - \bar{x}^0|$$

pour tous x^0 et $\bar{x}^0$ dans $\mathbb{R}^n$.

Considérons une partition $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^N$ de l'intervalle $[0,T]$,

$0 = t_0 < \dots < t_N = T$, de pas $h = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \dots, N\}$. Nous ne considérons ici que des partitions régulières, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ indépendante de la partition telle que $ch \leq t_i - t_{i-1} \leq h$ ($i = 1, \dots, N$).

Pour chaque intervalle $I_i = (t_{i-1}, t_i)$ notons par $P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k défini par $P^k(I_i; \mathbb{R}^n) = (P^k(I_i; \mathbb{R}))^n$. Posons l'espace d'approximation

$$\Pi^{h,k} = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n) : u_i \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n) \quad i = 1, \dots, N\}$$

où u_i est la restriction de u à l'intervalle I_i .

Le produit scalaire et la norme de $L^2(I_i; \mathbb{R}^n)$ sont notés et définis par

$$(u, v)_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t) \cdot v(t) dt \quad \text{et} \quad \|u\|_{0,i} = (u, u)_i^{\frac{1}{2}}.$$

Nous considérons alors le problème suivant: pour $U_0 = x^0$, trouver $u \in \Pi^{h,k}$ et une suite de vecteurs $\{U_i\}_{i=1}^N$ tels que

$$(2.4) \quad U_i \cdot v(t_i^-) = U_{i-1} \cdot v(t_{i-1}^+) + (u, \dot{v})_i + (f(u), v)_i$$

pour tout $i = 1, \dots, N$ et $v \in \Pi^{h,k}$. Ici $f(u)$ dénote l'application $t \rightarrow f(u(t), t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. De plus, dans (2.4) nous avons

$$(2.5) \quad U_i = \alpha_i u(t_i^-) + (1 - \alpha_i) u(t_i^+) \quad \text{et} \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Pour que le système (2.4)-(2.5) soit bien déterminé, nous nous limitons aux deux cas suivants:

$$(A) \quad U_0 = u(t_0^+) \quad \text{et} \quad \alpha_i \neq 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$(B) \quad U_N = u(t_N^-) \quad \text{et} \quad \alpha_i \neq 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Ceci est essentiellement la situation considérée par Delfour, Hager et Trochu [7], et généralise la méthode introduite par Lesaint et Raviart [10] (obtenue en B avec $\alpha_i = 1$).

Introduisons deux nouvelles variables qui nous seront utiles dans la suite,

$$y_i = U_i - u(t_i^-) \quad \text{le saut à gauche du noeud } t_i,$$

$$z_i = u(t_i^+) - U_i \quad \text{le saut à droite du noeud } t_i,$$

pour chaque indice possible. Après intégration par partie du terme $(u, \dot{v})_i$, les équations (2.4)-(2.5) deviennent

$$(2.6) \quad (\dot{u} - f(u), v)_i + z_{i-1} \cdot v(t_{i-1}^+) + y_i \cdot v(t_i^-) = 0$$

pour $i = 1, \dots, N$, et

$$(2.7) \quad \alpha_i y_i = (1 - \alpha_i) z_i \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Ainsi, les cas précédents deviennent

$$(A) \quad z_0 = 0, \quad \alpha_i \neq 1 \quad \text{et} \quad z_i = y_i \alpha_i / (1 - \alpha_i) \quad (i = 1, \dots, N-1),$$

$$(B) \quad y_N = 0, \quad \alpha_i \neq 0 \quad \text{et} \quad y_i = z_i (1 - \alpha_i) / \alpha_i \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

THÉOREME 2.1. Supposons les hypothèses (i), (ii) et (iii). Lorsque h est suffisamment petit nous avons les résultats suivants selon le cas.

(A) Les équations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) possèdent une solution unique.

(B) En se donnant U_N et en négligeant la condition $U_0 = x^0$, les équations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) possèdent une solution unique.

DEMONSTRATION. (A) Supposons le problème résolu sur les $i-1$ premiers intervalles et posons

$$\bar{U}_{i-1} = U_{i-1} + z_{i-1} = U_{i-1} + \frac{\alpha_{i-1}}{1 - \alpha_{i-1}} (U_{i-1} - u_{i-1}(t_{i-1}^-)).$$

Selon (2.4) et (2.5) le problème est de trouver $u_i \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$ et $U_i \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$(2.8) \quad u_i(t_{i-1}^+) = \bar{U}_{i-1}$$

et

$$(2.9) \quad U_i \cdot v(t_i^-) - (u_i, \dot{v})_i = U_{i-1} \cdot v(t_{i-1}^+) + (f(u_i), v)_i$$

pour tout $v \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$. Pour continuer la démonstration nous aurons recours au lemme suivant.

LEMME 2.2 (Delfour et Dubeau [6], Lemme 3.5). Si b est une fonctionnelle linéaire continue définie sur $P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$ et $\bar{U}$ est un point arbitraire de $\mathbb{R}^n$, alors le problème variationnel "trouver $u \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$ et $U \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$u(t_{i-1}^+) = \bar{U}$$

et

$$u \cdot v(t_i^-) - (u, \dot{v})_i = b(V)$$

pour tout $v \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$ possède une solution unique. $\square$

A l'aide de ce lemme nous pouvons construire une suite $\{(u_i^\ell, U_i^\ell)\}_{\ell=0}^\infty$ dans laquelle (u_i^0, U_i^0) est choisi arbitrairement et pour $\ell \geq 1$ (u_i^ℓ, U_i^ℓ) est uniquement déterminé, selon le Lemme 2.2, par $u_i^{\ell+1}(t_{i-1}^+) = \bar{U}_{i-1}$ et l'équation variationnelle

$$u_i^{\ell+1} \cdot v(t_i^-) - (u_i^{\ell+1}, \dot{v})_i = U_{i-1} \cdot v(t_{i-1}^+) + (f(u_i^\ell), v)_i$$

pour tout $v \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$.

Il est possible de montrer (voir Delfour et Dubeau [6], Théorème 3.6) que la suite $\{u_i^\ell\}_{\ell=0}^\infty$ converge vers un polynôme $u_i \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$, que la suite $\{U_i^\ell\}_{\ell=0}^\infty$ converge vers le vecteur $U_i \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$U_i \cdot V = U_{i-1} \cdot V + (f(u_i), V)_i$$

pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, et finalement que le couple (u_i, U_i) est l'unique solution des équations (2.8) et (2.9).

(B) En négligeant la condition $U_0 = x^0$, ce cas se ramène au premier en procédant à rebours c'est-à-dire de l'intervalle I_N à I_1 . $\square$

REMARQUE 2.3. Afin de résoudre complètement le cas (B) il faudrait déterminer U_N de telle sorte que $U_0 = x^0$. Nous pourrions également procéder comme dans la situation (A), fixer $U_0 = x^0$ et chercher z_0 de façon à obtenir $y_N = 0$. Nous reviendrons sur ce problème à la fin du paragraphe 3.

3. La mise-en-oeuvre

Pour simplifier, supposons que $n = 1$ dans cette section. Pour résoudre numériquement (2.4) et (2.6) nous intégrons les produits scalaires à l'aide d'une quadrature à $k+1$ points, d'abscisses $\{\tau_0, \dots, \tau_k\} \subset [0,1]$ et de poids $\{a_0, \dots, a_k\}$, de la forme

$$(3.1) \quad \int_0^1 p(t) dt = \sum_{j=0}^k a_j p(\tau_j)$$

et exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2k-1$.

Définissons les polynômes suivants, selon le cas,

$$(A) \quad \theta_m(\tau) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k \frac{\tau - \tau_j}{\tau_m - \tau_j} \quad \text{et} \quad v_m(\tau) = \int_{\tau}^1 \theta_m(\lambda) d\lambda \quad (1 \leq m \leq k)$$

$$(B) \quad \theta_m(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{k-1} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_m - \tau_j} \quad \text{et} \quad v_m(\tau) = \int_0^{\tau} \theta_m(\lambda) d\lambda \quad (0 \leq m \leq k-1)$$

et

$$\phi_m(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^k \frac{\tau - \tau_j}{\tau_m - \tau_j} \quad (0 \leq m \leq k).$$

Notons π le polynôme de Legendre de degré k défini par rapport à l'intervalle $[0,1]$. Il sera normalisé, selon le cas, de la façon suivante:

$$(A) \quad \pi(0) = 1 \quad (\text{alors } \pi(1) = (-1)^k),$$

$$(B) \quad \pi(1) = 1 \quad (\text{alors } \pi(0) = (-1)^k).$$

Si p est un polynôme défini sur l'intervalle $[0,1]$, définissons le polynôme p_i sur l'intervalle I_i d'après

$$p_i(t) = p\left(\frac{t - t_{i-1}}{h_i}\right).$$

Nous obtenons de cette façon θ_{im} , v_{im} , ϕ_{im} et π_i . Finalement posons

$$(3.2) \quad u_i(t) = \sum_{m=0}^k u_{im} \phi_{im}(t)$$

où $u_{im} = u_i(t_{im})$ et $t_{im} = t_{i-1} + \tau_m h_i$.

THÉORÈME 3.1. Si (3.1) intègre exactement les polynômes de degré $2k-1$ et moins, les équations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) conduisent aux schémas numériques suivants

$$(A) \quad U_0 = x^0, \quad z_0 = 0 \text{ et}$$

$$(3.3a) \quad \begin{cases} u_{i\ell} = U_{i-1} + h_i \sum_{m=0}^k a_{\ell m} f(u_{im}, t_{im}) + \pi(\tau_\ell) z_{i-1} & (\ell = 0, \dots, k) \\ U_i = U_{i-1} + h_i \sum_{m=0}^k a_m f(u_{im}, t_{im}), \end{cases}$$

avec

$$(3.3b) \quad \begin{cases} z_i = \alpha_i y_i / (1 - \alpha_i) & (\alpha_i \neq 1) \\ y_i = (-1)^k [h_i \sum_{m=0}^k a_m f(u_{im}, t_{im}) \pi(\tau_m) - z_{i-1}] \end{cases}$$

où

$$(3.3c) \quad \begin{cases} a_{\ell m} = a_m [\pi(\tau_\ell) \sigma_m + a_\ell^{-1} v_\ell(\tau_m)], & v_0 \equiv 0 \\ \sigma_m = - \sum_{j=1}^k \phi_j(0) v_j(\tau_m) a_j^{-1}, \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, N$.

$$(B) \quad U_0 = x^0, \quad y_N = 0 \text{ et}$$

$$(3.4a) \quad \begin{cases} u_{i\ell} = U_i - h_i \sum_{m=0}^k a_{\ell m} f(u_{im}, t_{im}) - \pi(\tau_\ell) y_i & (\ell = 0, \dots, k) \\ U_{i-1} = U_i - h_i \sum_{m=0}^k a_m f(u_{im}, t_{im}) \end{cases}$$

avec

$$(3.4b) \quad \begin{cases} y_i = (1-\alpha_i)z_i/\alpha_i & (\alpha_i \neq 0) \\ z_{i-1} = (-1)^{k[h_i]} \sum_{m=0}^k a_m f(u_{im}, t_{im}) \pi(\tau_m) - y_i \end{cases}$$

où

$$(3.4c) \quad \begin{cases} a_{\ell m} = a_m [\pi(\tau_\ell) \sigma_m + a_\ell^{-1} v_\ell(\tau_m)], & v_k \equiv 0 \\ \sigma_m = - \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j(1) v_j(\tau_m) a_j^{-1} \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, N$.

DÉMONSTRATION. Voir Delfour, Hager et Trochu [7], Proposition 3.1. $\square$

REMARQUE 3.2. Si les quadratures utilisées en (A) et (B) sont reliées par les relations suivantes

$$\begin{aligned} a_j^B &= a_{k-j}^A, \\ \tau_j^B &= 1 - \tau_{k-j}^A, \end{aligned} \quad j = 0, \dots, k,$$

nous obtenons $a_{\ell, m}^B = a_{k-\ell, k-m}^A$. Ainsi nous passons facilement des schémas (A) aux schémas (B) et nous pouvons compléter les tables présentées en [7] (voir l'Annexe 1).

REMARQUE 3.3. Si $\alpha_i = 1$ ($i = 1, \dots, N-1$) en (B), alors $y_i = 0$ ($i = 1, \dots, N$) et il est possible de procéder comme en (A) en partant de $i = 1$ jusqu'à $i = N$. Il suffit de remarquer que les équations (3.4a) deviennent

$$\begin{aligned} u_{i\ell} &= U_{i-1} + h_i \sum_{m=0}^k [a_m - a_{\ell m}] f(u_{im}, t_{im}) \\ U_i &= U_{i-1} + h_i \sum_{m=0}^k a_m f(u_{im}, t_{im}) \end{aligned}$$

et possèdent une solution unique lorsque U_{i-1} est donné (ce schéma, initialement présenté par Lesaint et Raviart [10], fait également partie de la famille de schémas étudiés par Delfour et Dubeau [6]). Quelques exemples sont présentés à l'Annexe 2.

REMARQUE 3.4. Dans certaines situations il est facile de montrer l'existence d'une solution aux équations (3.4).

Par exemple dans le cas linéaire, le système (2.1) est de la forme

$$(3.5) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x^0.$$

Pour construire une solution numérique à (3.5), selon (3.4), il suffit de considérer les systèmes suivants

$$(3.6) \quad \dot{x}_H^\ell(t) = A(t)x_H^\ell(t), \quad t \in [0, T], \quad x_H^\ell(T) = e^\ell, \quad \ell = 1, \dots, n$$

$$(3.7) \quad \dot{x}_p(t) = A(t)x_p(t) + b(t), \quad t \in [0, T], \quad x_p(T) = 0$$

et de remarquer que $x = \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell x_H^\ell + x_p$ où $\beta = [x_H^1(0) \dots x_H^n(0)]^{-1}(x^0 - x_p(0))$. Lorsque nous appliquons le schéma (3.4) avec $U_{HN}^\ell = e^\ell$ ($\ell = 1, \dots, n$) et $U_{pN} = 0$ aux systèmes (3.6) et (3.7) nous obtenons u_H^ℓ ($\ell = 1, \dots, n$) et u_p . Il suffit alors de prendre $u = \sum_{\ell=1}^n \bar{\beta}_\ell u_H^\ell + u_p$ où $\bar{\beta} = [U_{H0}^1 \dots U_{H0}^n]^{-1}(x^0 - U_{p0})$ lorsque la matrice $[U_{H0}^1 \dots U_{H0}^n]$ se comporte comme la matrice non singulière $[x_H^1(0) \dots x_H^n(0)]$ (ce qui est le cas lorsqu'on a convergence des méthodes (A) lorsque h tend vers 0). Pour montrer que cette solution est unique il suffit de montrer que la solution u correspondant au système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = 0$$

est identiquement nulle. Dans ce cas prenons $\tilde{u} = \sum_{\ell=1}^n U_{N\ell} u_H^\ell$ (où $U_N = (U_{N1}, \dots, U_{Nn})$). Ainsi $\tilde{U}_N = U_N$ et par unicité de la solution (pour U_N donné) nous obtenons $\tilde{u} = u$ d'où $\tilde{U}_0 = U_0 = 0$. Alors $\sum_{\ell=1}^n U_{N\ell} U_{H0}^\ell = 0$ entraîne que $U_{N\ell} = 0$ ($\ell = 1, \dots, n$) et donc $u = 0$.

Dans le cas non linéaire, pour $n = 1$, considérons la solution x de

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x^0.$$

Comme l'application $U_N \rightarrow U_0(U_N): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, si nous prenons $U_N^1 < x(T)$ et $U_N^2 > x(T)$ avec h suffisamment petit nous aurons $U_0(U_N^1) < x^0$ et $U_0(U_N^2) > x^0$.

Ainsi par continuité il existe un U_N tel que $U_0(U_N) = x^0$. Dans ce cas l'unicité reste à établir.

Finalement dans le cas général, le problème est ouvert. Numériquement nous pouvons chercher U_N tel que $U_0(U_N) = 0$ en procédant de $i = N$ à $i = 1$, ou bien chercher z_0 tel que $y_N(z_0) = 0$, en procédant de $i = 1$ à $i = N$.

4. Résultats de convergence

Dans cette section, en supposant l'existence d'une solution au système (2.4)-(2.5) dans chacun des cas (A) et (B), nous démontrons la convergence des méthodes et établissons des estimations d'erreur. Les techniques de démonstration utilisées ici sont essentiellement celles développées par Delfour et Dubeau [6] et F. Dubeau [9].

Pour simplifier l'exposé, nous supposons que la fonction g de la condition de Lipschitz (2.2) est essentiellement bornée, c'est-à-dire $|g(t)| \leq c$ p.p. dans $[0, T]$, et que les partitions utilisées sont régulières. La lettre c est un terme générique désignant des constantes indépendantes du pas h de la partition.

4.1. Résultats préliminaires

Dans ce qui suit, la norme de $v \in L^\infty(I_i; \mathbb{R}^n)$ est notée $\|v\|_{\infty, i}$ et la norme de $v \in H^k(I_i; \mathbb{R}^n)$ est

$$\|v\|_{k, i} = \left\{ \sum_{\ell=0}^k \|v^{(\ell)}\|_{0, i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

LEMME 4.1. Supposons les hypothèses (i), (ii) et (iii). Pour toutes fonctions p et q de $L^2(I_i; \mathbb{R}^n)$, nous avons

$$(4.1) \quad (f(p) - f(q), v)_i \leq c h_i^{\frac{1}{2}} \|p - q\|_{0, i} \|v\|_{\infty, i}$$

pour tout $v \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$.

DÉMONSTRATION. De l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'hypothèse (ii) nous avons

$$\begin{aligned} (f(p)-f(q), v)_i &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(t) |p(t) - q(t)| |v(t)| dt \\ &\leq \|g\|_{0,i} \|p-q\|_{0,i} \|v\|_{\infty,i} \end{aligned}$$

et le résultat suit du fait que g est essentiellement bornée. $\square$

Pour tout vecteur $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'expression $y\pi_i$ est l'élément de $P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$ défini par $y\pi_i = (y_1\pi_i, \dots, y_n\pi_i)$ où π_i est le polynôme de Legendre introduit à la section 3.

LEMME 4.2. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$(4.2) \quad (p, y\pi_i)_i = 0$$

pour tout $p \in P^{k-1}(I_i; \mathbb{R}^n)$, et

$$(4.3) \quad (x, y\pi_i)_i \leq c h_i^{\ell+\frac{1}{2}} \|x^{(\ell)}\|_{0,i} |y|$$

pour tout $x \in H^\ell(I_i; \mathbb{R}^n)$ avec $\ell \leq k$.

DÉMONSTRATION. Nous obtenons (4.2) de la propriété d'orthogonalité du polynôme de Legendre, et (4.3) à l'aide d'un développement de Taylor. $\square$

En utilisant un développement de Taylor en t_{i-1} ou t_i selon la situation, nous obtenons le lemme suivant.

LEMME 4.3. Si $x \in H^{k+1}(0, T; \mathbb{R}^n)$ et

$$\Pi^{h,k}(x) = \{u \in \Pi^{h,k}: u_i(t_i^-) = x(t_i) \text{ ou } u_i(t_{i-1}^+) = x(t_{i-1}) \text{ pour } i = 1, \dots, N\}$$

alors

$$\inf\{\|x-u\|_\ell: u \in \Pi^{h,k}(x)\} \leq c h^{k+1-\ell} \|x^{(k+1)}\|_0$$

où

$$\|\cdot\|_\ell = \left\{ \sum_{i=1}^N \|\cdot\|_{\ell,i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

Considérons l'espace $P^{k-1}(I_i; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ muni de la norme

$$\|\tilde{w}\|_i = \|w\|_{0,i} + h_i^{\frac{1}{2}}|w|$$

où $\tilde{w} = (w, W)$ et définissons l'opérateur de projection (dans la norme L^2)

$P: P^k(I_i; \mathbb{R}^n) \rightarrow P^{k-1}(I_i; \mathbb{R}^n)$ (si $k = 0$ prenons $P^{k-1}(I_i; \mathbb{R}^n) = \{0\}$).

LEMME 4.4 (Delfour et Dubeau [6], Lemme 3.4). L'application J définie par

$$u \rightarrow Ju = (Pu, u(t_{n-1})): P^k(I_i; \mathbb{R}^n) \rightarrow P^{k-1}(I_i; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

est un isomorphisme et il existe deux constantes β_1 et β_2 , indépendantes de la partition, telles que

$$(4.4) \quad \beta_1 \|u\|_{0,i} \leq \|Ju\|_i \leq \beta_2 \|u\|_{0,i}. \quad \square$$

4.2. Étude du cas (A)

THÉORÈME 4.5. Si la solution de (2.1) est dans $H^{k+1}(0, T; \mathbb{R}^n)$, alors il existe une constante c telle que, pour h suffisamment petit, la solution des équations (2.4)-(2.5) vérifie

$$(4.5) \quad \|u-x\|_0 + \max\{|U_i - x(t_i)| : i = 0, \dots, N\} \leq \begin{cases} c h^k \|x^{(k+1)}\|_0 & \text{si } \gamma = 1 \\ c h^{k+1} \|x^{(k+1)}\|_0 & \text{si } \gamma < 1 \end{cases}$$

où $\gamma = \max\{|\alpha_i/(1-\alpha_i)| : i = 1, \dots, N-1\}$.

DÉMONSTRATION. Posons $y_0 = 0$ et considérons l'intervalle I_i . Les solutions x et u de (2.1) et (2.6) vérifient

$$(\dot{u} - \dot{x}, v)_i - (f(u) - f(x), v)_i + z_{i-1} \cdot v(t_{i-1}^+) + y_i \cdot v(t_i^-) = 0$$

pour tout $v \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$. En prenant $v = y_i \pi_i$ nous obtenons, d'après (4.2) et la définition de π_i ,

$$-(\dot{x}, y_i \pi_i)_i - (f(u) - f(x), y_i \pi_i)_i + z_{i-1} \cdot y_i + (-1)^k |y_i|^2 = 0.$$

Mais $|z_{i-1}| \leq \gamma |y_{i-1}|$, alors en utilisant (4.1) et (4.3) nous obtenons

$$(4.6) \quad |y_i| \leq \gamma |y_{i-1}| + c h^{\frac{1}{2}} \|u-x\|_{0,i} + c h^{k+\frac{1}{2}} \|x^{(k+1)}\|_{0,i}.$$

En intégrant par partie le terme $(\dot{x}, v)_i$ de la relation $(\dot{x}-f(x), v)_i = 0$ nous avons

$$(4.7) \quad x(t_i) \cdot v(t_i^-) = x(t_{i-1}) \cdot v(t_{i-1}^+) + (x, \dot{v})_i + (f(x), v)_i$$

pour tout $v \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$. Soustrayons (4.7) de (2.4), nous obtenons

$$(4.8) \quad [U_i - x(t_i)] \cdot v(t_i^-) = [U_{i-1} - x(t_{i-1})] \cdot v(t_{i-1}^+) + (u-x, \dot{v})_i + (f(u)-f(x), v)_i.$$

Si nous posons $v(t) = U_i - x(t_i)$ dans (4.8) et utilisons (4.1) nous obtenons

$$(4.9) \quad |U_i - x(t_i)| \leq |U_{i-1} - x(t_{i-1})| + c h^{\frac{1}{2}} \|u-x\|_{0,i}.$$

Considérons un polynôme arbitraire $\bar{u} \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$ et écrivons (4.8) comme suit:

$$(4.10) \quad [U_i - x(t_i)] \cdot v(t_i^-) = [U_{i-1} - x(t_{i-1})] \cdot v(t_{i-1}^+) + (u-\bar{u}, \dot{v})_i + (\bar{u}-x, \dot{v})_i \\ + (f(u)-f(\bar{u}), v)_i + (f(\bar{u})-f(x), v)_i.$$

Prenons $v \in P^k(I_i; \mathbb{R}^n)$ solution de l'équation différentielle

$$\dot{v}(t) = -P(u-\bar{u})(t) \quad t \in I_i, \quad v(t_i^-) = 0.$$

Dans ce cas $|v(t)| \leq h^{\frac{1}{2}} \|P(u-\bar{u})\|_{0,i}$ pour tout $t \in I_i$. De plus $(u-\bar{u}, P(u-\bar{u}))_i = \|P(u-\bar{u})\|_{0,i}^2$. Nous obtenons alors de (4.10) et de (4.1)

$$\|P(u-\bar{u})\|_{0,i} \leq h^{\frac{1}{2}} |U_{i-1} - x(t_{i-1})| + c h \|u-\bar{u}\|_{0,i} + (1+c h) \|\bar{u}-x\|_{0,i}.$$

Cette inégalité combinée à (4.4) donne

$$(\beta_1 - c h) \|u-\bar{u}\|_{0,i} \leq (1+c h) \{ \|\bar{u}-x\|_{0,i} + h^{\frac{1}{2}} [|U_{i-1} - x(t_{i-1})| + |u(t_{i-1}^+) - \bar{u}(t_{i-1}^+)|] \}.$$

Comme $\beta_1 > 0$, pour h suffisamment petit $\beta_1 - c h > 0$ et $(1+c h)/(\beta_1 - c h) \geq 1/(2\beta_1)$. Il existe alors une constante c indépendante de h telle que pour h suffisamment petit

$$(4.11) \quad \|u - \bar{u}\|_{0,i} \leq c h^{\frac{1}{2}} [|U_{i-1} - x(t_{i-1})| + |u(t_{i-1}^+) - \bar{u}(t_{i-1}^+)|] + c \|\bar{u} - x\|_{0,i}.$$

Utilisons (4.11) dans l'inégalité triangulaire $\|u - x\|_{0,i} \leq \|u - \bar{u}\|_{0,i} + \|\bar{u} - x\|_{0,i}$ et prenons $\bar{u}$ tel que $\bar{u}(t_{i-1}^+) = x(t_{i-1})$. Comme $|u(t_{i-1}^+) - U_{i-1}| \leq \gamma |y_{i-1}|$, nous obtenons

$$(4.12) \quad \|u - x\|_{0,i} \leq c h^{\frac{1}{2}} [|U_{i-1} - x(t_{i-1})| + \gamma |y_{i-1}|] + c \|\bar{u} - x\|_{0,i}.$$

Reportons (4.12) dans (4.9) et (4.6), nous obtenons le système d'inégalités suivant:

$$(4.13) \quad \begin{pmatrix} |U_i - x(t_i)| \\ |y_i| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 + ch & ch\gamma \\ ch & (1+ch)\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |U_{i-1} - x(t_{i-1})| \\ |y_{i-1}| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c h^{\frac{1}{2}} \|\bar{u} - x\|_{0,i} + \begin{pmatrix} 0 \\ c h^{k+\frac{1}{2}} \|x^{(k+1)}\|_{0,i} \end{pmatrix}.$$

Pour $\gamma = 1$, d'après le Lemme 1 de l'Annexe 3, nous avons

$$|U_i - x(t_i)| + |y_i| \leq c h^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^i (1+2ch)^{i-j} [\|\bar{u} - x\|_{0,j} + h^k \|x^{(k+1)}\|_{0,j}].$$

Mais, par régularité de la partition et pour h suffisamment petit, nous avons

$$(4.14) \quad \sum_{j=1}^i (1+2ch)^{2(i-j)} \leq \frac{(1+2ch)^{2i}}{4ch(1+ch)} \leq \frac{\exp(4chN)}{4ch(1+ch)} \leq ch^{-1}.$$

Alors

$$(4.15) \quad |U_i - x(t_i)| + |y_i| \leq c [\|\bar{u} - x\|_0 + h^k \|x^{(k+1)}\|_0].$$

En reportant (4.15) dans (4.12), nous obtenons

$$(4.16) \quad \|u - x\|_0 \leq c [\|\bar{u} - x\|_0 + h^k \|x^{(k+1)}\|_0].$$

Pour $0 \leq \gamma < 1$, d'après le Lemme 2 de l'Annexe 3, nous avons

$$(4.17) \quad \begin{pmatrix} |U_i - x(t_i)| \\ |y_i| \end{pmatrix} \leq c \sum_{j=1}^i (1+ch)^{i-j} \left[ch^{\frac{1}{2}} \|\bar{u} - x\|_{0,j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + ch^{k+\frac{1}{2}} \|x^{(k+1)}\|_{0,j} \begin{pmatrix} h \\ h^2 + \gamma^{i-j} \end{pmatrix} \right]$$

puisque $1 + \gamma^{i-j} \leq 2$ et pour h suffisamment petit $1 + \gamma^{i-j} \theta^2(h) \leq 2$, $1+ch \leq 2$ et $\theta(h) \leq ch$. Ainsi, en utilisant (4.14), nous obtenons

$$(4.18) \quad |U_i - x(t_i)| \leq c[\|\bar{u}-x\|_0 + h^{(k+1)}\|x^{(k+1)}\|_0].$$

De (4.12), et en utilisant (4.17) pour y_{i-1} , nous avons

$$\begin{aligned} \|u-x\|_{0,i} &\leq ch^{\frac{1}{2}}|U_{i-1} - x(t_{i-1})| + c\|\bar{u}-x\|_{0,i} \\ &\quad + ch \sum_{j=1}^{i-1} (1+ch)^{i-1-j} [\|\bar{u}-x\|_{0,j} + h^k\|x^{(k+1)}\|_{0,j} (h^{2+\gamma} i^{1-j})]. \end{aligned}$$

Alors nous obtenons de (4.14)

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \|u-x\|_{0,i} &\leq ch^{\frac{1}{2}}[|U_{i-1} - x(t_{i-1})| + \|\bar{u}-x\|_0 + h^{k+2}\|x^{(k+1)}\|_0] + c\|\bar{u}-x\|_{0,i} \\ &\quad + ch^{k+1} \sum_{j=1}^{i-1} [(1+ch)\gamma]^{i-1-j} \|x^{(k+1)}\|_{0,j}. \end{aligned}$$

Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^N$

$$V = \begin{pmatrix} \|u-x\|_{0,1} \\ \vdots \\ \|u-x\|_{0,N} \end{pmatrix}, \quad \bar{V} = \begin{pmatrix} \|\bar{u}-x\|_{0,1} \\ \vdots \\ \|\bar{u}-x\|_{0,N} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \|x^{(k+1)}\|_{0,1} \\ \vdots \\ \|x^{(k+1)}\|_{0,N} \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^i \Lambda$$

de normes $|V| = \|u-x\|_0$, $|\bar{V}| = \|\bar{u}-x\|_0$, $|v| = N^{\frac{1}{2}} \leq ch^{-\frac{1}{2}}$, $|\Lambda| = \|x^{(k+1)}\|_0$ et $|\Lambda_i| \leq |\Lambda|$. Alors, (4.19) et (4.18) donnent

$$V \leq ch^{\frac{1}{2}}[\|\bar{u}-x\|_0 + h^{k+1}\|x^{(k+1)}\|_0]v + c\bar{V} + ch^{k+1} \sum_{i=1}^{N-1} [(1+ch)\gamma]^{i-1} \Lambda_i.$$

Mais pour h suffisamment petit $(1+ch)\gamma < 1$ et

$$\sum_{i=1}^{N-1} [(1+ch)\gamma]^{i-1} \leq \frac{1}{1 - (1+ch)\gamma},$$

et comme $1 - (1+ch)\gamma \rightarrow 1-\gamma$ quand $h \rightarrow 0^+$, nous obtenons

$$(4.20) \quad \|u-x\|_0 \leq c[\|\bar{u}-x\|_0 + h^{k+1}\|x^{(k+1)}\|_0].$$

Nous achevons la démonstration en utilisant le Lemme 4.4 et les inégalités (4.15), (4.16), (4.18) et (4.20). $\square$

4.3. Études du cas (B)

THÉORÈME 4.6. Si pour toute donnée initiale x^0 la solution x du système (2.1) est dans $H^{k+1}(0,T;\mathbb{R}^n)$ et s'il existe une constante c , indépendante de x , telle que $\|x^{(k+1)}\|_0 \leq c$, alors il existe une constante c telle que, pour h suffisamment petit, toute solution $u \in \Pi^{h,k}$ des équations (2.4)-(2.5) vérifie

$$(4.21) \quad \|u-x\|_0 + \max\{|U_i - x(t_i)| : i = 0, \dots, N\} \leq \begin{cases} ch^k & \text{si } \gamma = 1 \\ ch^{k+1} & \text{si } \gamma < 1 \end{cases}$$

où $\gamma = \max\{|(1-\alpha_i)/\alpha_i| : i = 1, \dots, N-1\}$.

DÉMONSTRATION. Soit u une solution des équations (2.4)-(2.5). Nous avons $U_0(U_N) = x^0$. Considérons la solution z du système

$$\dot{z}(t) = f(z(t), t), \quad t \in [0, T], \quad z(T) = U_N.$$

D'après les résultats du Théorème 4.5, nous avons par symétrie

$$(4.22) \quad \|u-z\|_0 + \max\{|U_i - z(t_i)| : i = 0, \dots, N\} \leq \begin{cases} ch^k \|z^{(k+1)}\|_0 & \text{si } \gamma = 1 \\ ch^{k+1} \|z^{(k+1)}\|_0 & \text{si } \gamma < 1 \end{cases}$$

où $\gamma = \max\{|(1-\alpha_i)/\alpha_i| : i = 1, \dots, N-1\}$. Puisque $\|z^{(k+1)}\|_0 \leq c$ (et que la constante c apparaissant dans (4.5) ne dépend que de $\|z^{(k+1)}\|_0$), nous obtenons de (2.3) et (4.22)

$$(4.23) \quad \|x-z\|_1 \leq c(T) |x^0 - z(0)| \leq \begin{cases} ch^k & \text{si } \gamma = 1 \\ ch^{k+1} & \text{si } \gamma < 1 \end{cases}.$$

Mais comme $\|x-z\|_\infty + \|x-z\|_0 \leq c\|x-z\|_1$, nous déduisons le résultat de (4.22) et (4.23). $\square$

4.4. Superconvergence aux noeuds

Pour obtenir un résultat de superconvergence aux noeuds, nous devons établir les résultats auxiliaires suivants.

COROLLAIRE 4.7. *Sous les hypothèses du Théorème 4.5 (ou 4.6) nous avons*

$$(4.24) \quad \|u-x\|_{\ell} \leq \begin{cases} ch^{k-\ell} \|x^{(k+1)}\|_0 & \text{si } \gamma = 1 \\ ch^{k+1-\ell} \|x^{(k+1)}\|_0 & \text{si } \gamma < 1 \end{cases}$$

pour $\ell = 0, \dots, k$.

DÉMONSTRATION. Pour $\ell \leq k$ et pour tous u et $\bar{u} \in P^k(I_1; \mathbb{R}^n)$, nous avons $\|u-\bar{u}\|_{\ell,i} \leq ch^{-\ell} \|u-\bar{u}\|_{0,i}$. Ainsi pour $x \in H^{k+1}(0,T; \mathbb{R}^n)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u-x\|_{\ell,i} &\leq \|u-\bar{u}\|_{\ell,i} + \|\bar{u}-x\|_{\ell,i} \leq ch^{-\ell} \|u-\bar{u}\|_{0,i} + \|\bar{u}-x\|_{\ell,i} \\ &\leq ch^{-\ell} \|u-x\|_{0,i} + ch^{-\ell} \|\bar{u}-x\|_{0,i} + \|\bar{u}-x\|_{\ell,i}. \end{aligned}$$

Alors

$$\|u-x\|_{\ell} \leq ch^{-\ell} \|u-x\|_0 + ch^{-\ell} \|\bar{u}-x\|_0 + \|\bar{u}-x\|_{\ell},$$

et le résultat suit du Lemme 4.4 et du Théorème 4.5 (ou 4.6). $\square$

COROLLAIRE 4.8. *Sous les hypothèses du Théorème 4.5 (ou 4.6) nous avons*

$$(4.25) \quad \|x-u\|_{\infty,i} \leq \begin{cases} ch^{k-\frac{1}{2}} & \text{si } \gamma = 1 \\ ch^{k+\frac{1}{2}} & \text{si } \gamma < 1 \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, N$.

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\|u-x\|_{\infty,i} \leq h_i^{-\frac{1}{2}} [\|u-x\|_{0,i} + h_i \|u-x\|_{1,i}] \leq ch^{-\frac{1}{2}} [\|u-x\|_0 + h \|u-x\|_1]$$

et le résultat suit de (4.24). $\square$

Finalement, sous certaines hypothèses supplémentaires nous pouvons augmenter l'ordre de convergence aux noeuds.

THÉOREME 4.9 (Delfour et Dubeau [6], Théorème 4.6). Supposons les hypothèses du Théorème 4.5 (ou 4.6) et

(i) la matrice

$$A(t) = f_x(x(t), t) \quad (a_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x(t), t))$$

existe et ses colonnes sont dans $H^k(0, T; \mathbb{R}^n)$;

(ii) il existe un voisinage V de l'origine de $\mathbb{R}^n$ et une constante positive B tels que pour tout t et tout $y \in x(t) + V$

$$|f(y, t) - f(x(t), t) - A(t)(y - x(t))| \leq B |x(t) - y|^2.$$

Alors il existe une constante c telle que lorsque h est suffisamment petit on ait

$$(4.26) \quad \max\{|x(t_i) - U_i| : i = 0, \dots, N\} \leq \begin{cases} ch^{2k} & \text{si } \gamma = 1 \\ ch^{2k+1} & \text{si } \gamma < 1. \quad \square \end{cases}$$

REMARQUE 4.10. Le résultat (4.26) pour $\gamma = 1$ résoud partiellement une conjecture présentée par Delfour, Hager et Trochu [7]. La Table 1 résume la situation ($\gamma = 1$ correspond à $\alpha_j = \frac{1}{2}$ et $\alpha_j = -\infty$).

Table 1. Taux de convergence (i) démontrés et (ii) observés.

k		pair			impair		
α_j		$-\infty$	$-\infty < \alpha_j < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$	$-\infty < \alpha_j < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\ u - x\ _0$	(i)	k	k+1*	k	k	k+1*	k
	(ii)	k	k+1	k+1	k+1	k+1	k
$\max U_i - x(t_i) $	(i)	2k	2k+1*	2k	2k	2k+1*	2k
	(ii)	2k	2k+1	2k+2	2k+2	2k+1	2k

* Démontrer par Delfour, Hager et Trochu [7] pour des systèmes linéaires.

REMARQUE 4.11. Pour observer numériquement (4.27) avec les schémas (3.5) et (3.6) il faut prendre la quadrature (3.1) exacte pour les polynômes de degré $2k$ (voir les essais numériques de A. Chalifour [4], Delfour, Hager et Trochu [7] et Delfour et Trochu [8]).

5. Conclusion

Nous avons étendu les résultats de convergence des méthodes présentées par Delfour, Hager et Trochu [7] au cas des systèmes non linéaires d'équations différentielles ordinaires. Nous avons distingué deux cas, (A) et (B). Pour le cas (A) nous avons démontré l'existence, l'unicité et la convergence de la solution du problème variationnel proposé. D'après les expériences numériques il semble possible d'améliorer les résultats de convergence lorsque $\gamma = 1$ (voir la Table 1). Pour le cas (B) nous avons établi des résultats de convergence en supposant l'existence d'une solution au problème variationnel. Mais dans ce cas le problème de l'existence et de l'unicité de la solution du problème variationnel n'est résolu que pour les systèmes linéaires. Dans le cas non linéaire le problème n'est pas résolu et, par conséquent, il y a également un problème de mise-en-oeuvre.

Références

- [1] BUTCHER, J.C., *Implicit Runge-Kutta processes*, Math. Comp. 18(1964), 50-64.
- [2] BUTCHER, J.C., *Integration processes based on Radau quadrature formulas*, Math. Comp. 18(1964), 233-244.
- [3] CARATHEODORY, C., *Vorlesungen über Reelle Funktionen*, Verlag und Druck, Leipzig, 1927.
- [4] CHALIFOUR, A., *Analyse d'une méthode d'éléments finis discontinus pour les équations différentielles linéaires*, Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, Août 1976.
- [5] CHIPMAN, F.H., *A-stable Runge-Kutta processes*, BIT 11 (1971), 384-388.

- [6] DELFOUR, M.C. et DUBEAU, F., *Discontinuous polynomial approximations in the theory of one-step, hybrid and multistep methods for non-linear ordinary differential equation*, Math. Comp. 47(1986), 169-189.
- [7] DELFOUR, M.C., HAGER, W. and TROCHU, F., *Discontinuous Galerkin methods for ordinary differential equations*, Math. Comp. 36(1981), 455-473.
- [8] DELFOUR, M.C. et TROCHU, F., *Discontinuous approximation of ordinary differential equations and application to optimal control problems*, Rapport CRMA-751, Centre de recherche de mathématiques appliquées, Université de Montréal, Octobre 1977.
- [9] DUBEAU, F., *Approximations polynomiales par morceaux des équations différentielles*, Thèse de doctorat, Université de Montréal, Février 1981.
- [10] LESAIN, P. et RAVIART, P.A., *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, C. de Boor, ed., Academic Press, New York, 1974, 89-124.

ANNEXE 1. Exemples de schémas (3.3) et (3.4)

Nous présentons les schémas obtenus de (3.3) et (3.4) pour $k = 0, 1$ et 2 en employant différentes quadratures à $k+1$ points; Gauss-Legendre, Gauss-Radau (à gauche et à droite) et Gauss-Lobatto. Pour ces différentes quadratures l'ordre des méthodes est $2k+1$ sauf lorsqu'une quadrature de Gauss-Lobatto est utilisée, dans ce cas l'ordre est $2k$.

Les tables que nous présentons complètent celles présentées en [7]. Il est à remarquer que certaines matrices $A = (a_{\ell m})$ de ces tables ont déjà été obtenues par J.C. Butcher [1], [2] et F.H. Chipman [5].

Table 2. Schémas (3.3) et (3.4) pour $k = 0$

$k = 0$	$t_{u0} = t_{i-1} + h_i \tau_0$ où $\tau_0 = \begin{cases} 0 & \text{Gauss-Radau}^0 \\ \frac{1}{2} & \text{Gauss-Legendre} \\ 1 & \text{Gauss-Radau}^1 \end{cases}$	
(A) $U_0 = x^0, z_0 = 0$	(B) $U_0 = x^0, y_N = 0$	
$u_{i0} = U_{i-1} + z_{i-1}$	$u_{i0} = U_i - y_i$	
$U_i = U_{i-1} + h_i f(u_{i0}, t_{i0})$	$U_{i-1} = U_i - h_i f(u_{i0}, t_{i0})$	
$y_i = h_i f(u_{i0}, t_{i0}) - z_{i-1}$	$z_{i-1} = h_i f(u_{i0}, t_{i0}) - y_i$	
$z_i = \alpha_i y_i / (1 - \alpha_i)$	$y_{i-1} = (1 - \alpha_{i-1}) z_{i-1} / \alpha_{i-1}$	

Table 3. Schémas (3.3) et (3.4) pour $k = 1$

k = 1	Legendre		Radau ⁰		Radau ¹		Lobatto		
m	0	1	0	1	0	1	0	1	
τ _m	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	1	
a _m	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
π(τ _m)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	1	-1	cas (A)
a _{0m}	$\frac{1}{6}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	z ₀ = 0
a _{1m}	$\frac{2+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	1	0	α _i ≤ $\frac{1}{2}$
π(τ _m)	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	-1	1	cas (B)
a _{0m}	$\frac{1}{6}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{6}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	y _N = 0
a _{1m}	$\frac{2-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	α _i > $\frac{1}{2}$

ANNEXE 2. Exemples de schémas du cas (B) avec $y_N = 0$ et $\alpha_i = 1$

Les commentaires de l'Annexe 1 sont également valables ici.

Table 5. Schémas (3.4) avec $y_N = 0$, $\alpha_i = 1$ et $k = 0$

$k = 0$	$t_{i0} = t_{i-1} + h_i \tau_0 \quad \text{où} \quad \tau_0 = \begin{cases} 0 & \text{Gauss-Radau}^0 \\ \frac{1}{2} & \text{Gauss-Legendre} \\ 1 & \text{Gauss-Radau}^1 \end{cases}$
$U_i = U_{i-1} + h_i f(U_i, t_{i0})$	

Table 6. Schémas (3.4) avec $y_N = 0$, $\alpha_i = 1$ et $k = 1$

$k = 1$	m	0	1
Gauss-Legendre	a_{0m}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{6}$
	a_{1m}	$\frac{1+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{3}$
Gauss-Radau ⁰	a_{0m}	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
	a_{1m}	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
Gauss-Radau ¹	a_{0m}	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
	a_{1m}	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
Gauss-Lobatto	a_{0m}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	a_{1m}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Table 7. Schémas (3.4) avec $y_N = 0$, $\alpha_i = 1$ et $k = 2$

$k = 1$	m	0	1	2
Gauss-Legendre	a_{0m}	$\frac{29}{180}$	$\frac{8-3\sqrt{15}}{45}$	$\frac{29-6\sqrt{15}}{180}$
	a_{1m}	$\frac{8+3\sqrt{15}}{72}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{8-3\sqrt{15}}{72}$
	a_{2m}	$\frac{29+6\sqrt{15}}{180}$	$\frac{8+3\sqrt{15}}{45}$	$\frac{29}{180}$
Gauss-Radau ⁰	a_{0m}	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1+\sqrt{6}}{18}$	$\frac{-1+\sqrt{6}}{18}$
	a_{1m}	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-43\sqrt{6}}{360}$
	a_{2m}	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+43\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$
Gauss-Radau ¹	a_{0m}	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296-169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2+3\sqrt{6}}{225}$
	a_{1m}	$\frac{296+169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2-3\sqrt{6}}{225}$
	a_{2m}	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
Gauss-Lobatto	a_{0m}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
	a_{1m}	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
	a_{2m}	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

ANNEXE 3. Comportement asymptotique d'un système d'inégalités

Nous considérons le système d'inégalités suivant

$$(1) \quad \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1+a & \gamma a \\ a & \gamma(1+a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ v_{i-1} \end{pmatrix} + b_i \quad i = 1, 2, \dots$$

où $\gamma > 0$, $a > 0$ et $b_i \geq 0$. Sachant que $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$, nous cherchons le comportement des suites $\{u_i\}_{i=0}^\infty$ et $\{v_i\}_{i=0}^\infty$ lorsque $a \rightarrow 0^+$. Plus précisément, nous distinguons les situations $\gamma = 1$ et $0 \leq \gamma < 1$.

LEMME 1. Lorsque $\gamma = 1$ nous avons

$$(2) \quad \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \leq \sum_{j=1}^i \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} b_j + (1+2a)^{i-j} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} b_j \right], \quad i = 1, 2, \dots$$

DÉMONSTRATION. Comme

$$\begin{pmatrix} 1+a & a \\ a & 1+a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

substituons cette expression dans (1), nous en déduisons

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+2a)^{i-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} b_j$$

et nous obtenons (2) après multiplication des matrices. $\square$

Lorsque $0 \leq \gamma < 1$, nous obtenons le résultat asymptotique suivant.

LEMME 2. Lorsque $0 \leq \gamma < 1$, le vecteur (u_i, v_i) vérifie asymptotiquement l'inégalité

$$(3) \quad \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \leq \sum_{j=1}^i (1+O(a))^{i-j+1} \begin{pmatrix} 1+O^2(a)+\gamma^{i-j} & O(a)(1+\gamma^{i-j}) \\ O(a)(1+\gamma^{i-j}) & O^2(a)+\gamma^{i-j} \end{pmatrix} b_j \quad i = 1, 2, \dots$$

où $O(a)/a \rightarrow c > 0$ lorsque $a \rightarrow 0^+$ (pour $\gamma = 0$ l'expression peut être simplifiée).

DÉMONSTRATION. La matrice associée à (1) n'est plus symétrique. Cherchons alors une matrice P telle que

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & \gamma a \\ a & \gamma(1+a) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En particulier, une telle matrice existe si les valeurs propres de A sont réelles et distinctes.

Les valeurs propres de A étant de la forme

$$\lambda_{\pm}(a) = \frac{(1+\gamma)(1+a)}{2} \pm \frac{(1-\gamma)}{2} \sqrt{1+2a+a^2 \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^2},$$

utilisons un développement d'ordre 1 du radical pour obtenir

$$\lambda_{\pm}(a) = \frac{(1+\gamma)(1+a)}{2} \pm \frac{1-\gamma}{2} [1+a+o(a)]$$

où $o(a)/a \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow 0^+$. Donc

$$\lambda_+(a) = 1 + a + o(a)$$

$$\lambda_-(a) = \gamma(1+a) + o(a).$$

Les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont

$$W(\lambda_+(a)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} o(a) & -a \\ -a & (1-\gamma)(1+a)+o(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$$

d'où $W(\lambda_+(a)) = [(1, 0_+(a))]$ où $0_+(a)/a \rightarrow 1/(1-\gamma)$ lorsque $a \rightarrow 0^+$. De même

$$W(\gamma_-(a)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} (1-\gamma)(1+a)+o(a) & \gamma a \\ a & o(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$$

d'où $W(\gamma_-(a)) = [(0_-(a), 1)]$ où $0_-(a)/a \rightarrow -\gamma/(1-\gamma)$ lorsque $a \rightarrow 0^+$ (ici $[v]$ est l'espace engendré par $v \in \mathbb{R}^n$).

De cette façon nous avons

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0_-(a) \\ 0_+(a) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a+o(a) & 0 \\ 0 & \gamma(1+a)+o(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_-(a) \\ 0_+(a) & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

En reportant (4) dans (1) nous obtenons

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \leq \sum_{j=1}^i \begin{pmatrix} 1 & 0_-(a) \\ 0_+(a) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+a+o(a))^{i-j} & 0 \\ 0 & (\gamma(1+a)+o(a))^{i-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_-(a) \\ 0_+(a) & 1 \end{pmatrix}^{b_j}.$$

En introduisant un $O(a)$ adéquat nous avons

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \leq (1+O(a)) \sum_{j=1}^i \begin{pmatrix} 1 & O(a) \\ O(a) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+O(a))^{i-j} & 0 \\ 0 & \gamma^{i-j}(1+O(a))^{i-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O(a) \\ O(a) & 1 \end{pmatrix}^{b_j}.$$

Après multiplication, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \leq \sum_{j=1}^i (1+O(a))^{i-j+1} \begin{pmatrix} 1+O^2(a)\gamma^{i-j} & O(a)(1+\gamma^{i-j}) \\ O(a)(1+\gamma^{i-j}) & O^2(a)+\gamma^{i-j} \end{pmatrix} b_j$$

ce qui complète la démonstration. $\square$

Département de mathématiques
Collège militaire royal de St-Jean
St-Jean-sur-Richelieu, Québec
Canada J0J 1R0

Manuscrit reçu le 10 février 1985.
Revision le 3 février 1986.