

QUASIANALYTICITÉ SUR UN ARC RECTIFIABLE

M. Assouyat

Résumé

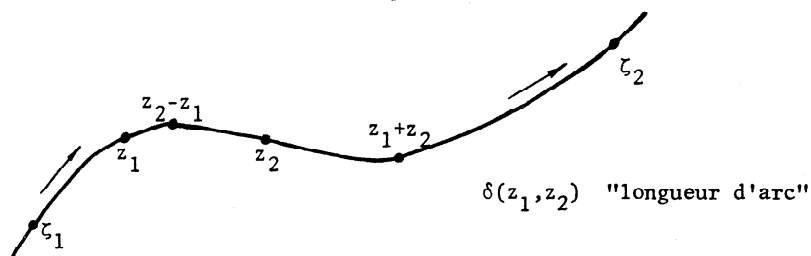
Dans ce papier on étudie une nouvelle classe quasianalytique définie sur un arc rectifiable J et on déduit une quasianalyticité ordinaire pour l'opérateur différentiel $(D_z - P_k)(\cdot)$, où $k \geq 1$, $z \in J$ et $(P_k)_1^\infty$ appartient à $C^\infty(J)$.

Abstract

In these papers, we study a new quasianalytic class defined on a rectifiable arc J and deduce an ordinary quasianalyticity for the differential operator $(D_z - P_k)(\cdot)$, where $k \geq 1$, $z \in J$ and $(P_k)_1^\infty$ belongs to $C^\infty(J)$.

0. Introduction

Dans toute la suite de ce papier, J désignera un arc rectifiable et orienté du plan. De plus on définit sur J une relation d'ordre $\geq$ (paramétrage par la longueur d'arc). On donne aussi les extrémités (initiale et finale) ζ_1 et ζ_2 de J , ($\zeta_1 \neq \zeta_2$ donc J n'est pas réduit à un point).



1. DÉFINITIONS.

i) On définit la différentiabilité sur J comme dans [2] et [1, pp. 123-124].

ii) $(w_k)_0^\infty$ désignera toujours une suite de fonctions continues et strictement positives sur J avec $w_0 = 1$. De plus pour chaque entier naturel k , w_k est strictement croissante.

iii) On dira qu'une fonction f est n -fois continûment différentiable relativement à la suite $(w_k)_0^\infty$ sur J et on écrira $f \in C^n(w_k)$, si $L_0 f = f$ et $L_k f = \left(\frac{L_{k-1} f}{w_{k-1}} \right)$ pour $k = 1, \dots, n$, existent et sont continues. De plus, $f \in C^\infty(w_n)$ si $f \in C^n(w_n)$ pour tout n , $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons qu'étant donné que J est parfait, les $L_k f$ sont uniquement déterminées, par f et les w_k . Ce qui est faux si J contient un point isolé.

2. PROPOSITION. Soient $z_0, z_1, \dots, z_n$ des points de J fixes et

$$\gamma_0(z) = 1, \quad \gamma_k(z) = \int_{z_{k-1}}^z \gamma_{k-1}(t) w_k(t) dt, \quad k = 1, \dots, n.$$

Si $f \in C^n(w_k)$, alors on a

$$\begin{aligned} (*) \quad f(z_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (L_k f)(z_n) \frac{k(z_n)}{w_k(z_n)} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} (L_k f)(t) \gamma_{k-1}(t) dt \\ &= S_n + R_n. \end{aligned}$$

Cette formule donnée par V.S. Videnskiĭ sur un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, généralise celle de Bang pour les cas $w_k = 1$ sur $[a, b]$. En plus si $w_k = 1$ ($0 \leq k \leq n$) et $z_0 = z_1 = \dots = z_{n-1}$, alors on obtient la formule de Taylor sur $[a, b]$.

Quant à la démonstration, elle se fait par récurrence comme dans [5] en tenant compte de [1, pp. 123-124].

3. Nouvelle classe quasianalytique (q.a.)

Soit $(M_n)_0^\infty$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que:
 $M_0 = 1$, $M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1}$ pour $n \geq 1$. Posons

$$C(w_n; M_n) = \{f \in C^\infty(w_n)/w_1(z) \dots w_{n-1}(z) \mid |(L_n f)(z)| \leq A^n M_n\} \quad n = 1, 2, \dots$$

A est une constante indépendante de f.

Nous dirons que $C(w_n; M_n)$ est une classe quasianalytique (ce que l'on notera par q.a.), si pour $f \in C(w_n; M_n)$ sur J, la condition $(L_n f)(\zeta_2) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ implique $f \equiv 0$.

4. PROPOSITION. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_n}{n!} \right)^{1/n} < \infty$, alors la classe $C(w_n; M_n)$ est q.a.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, on peut extraire une sous-suite (n_k) telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{M_{n_k}}{(n_k)!} \right)^{1/n_k} \text{ existe}$$

et donc la suite

$$\left(\frac{M_{n_k}}{(n_k)!} \right)^{1/n_k}$$

est bornée. Par conséquent, il existe une constante $d > 0$ telle que:

$$\frac{M_{n_k}}{(n_k)!} < d^{n_k} \quad \text{pour tout } k.$$

Soit z_0 un point quelconque de J tel que:

$$0 < \delta(\zeta_2, z_0) < d^{-1}.$$

Appliquons la formule (*) avec $z_1 = \dots = z_{n_k-1} = z_0$ et $z_{n_k} = \zeta_2$:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= |R_{n_k}| = \left| \int_{z_0}^{\zeta_2} (L_{n_k} f)(t) \gamma_{n_k-1}(t) dt \right| \\ &\leq \int_{z_0}^{\zeta_2} w_1(t) \dots w_{n_k-1}(t) |(L_{n_k} f)(t)| dt \int_{z_0}^t dt_1 \int_{z_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{z_0}^{t_{n_k-2}} dt_{n_k-1} \end{aligned}$$

où $t, t_0, \dots, t_{n_k-1}$ sont les points de J entre z_0 et ζ_2 . Par conséquent,

$$|f(z_0)| \leq \Lambda^{n_k} M_{n_k} \frac{\delta(\zeta_2, z_0)^{n_k}}{(n_k)!} [\text{Ad } \delta(\zeta_2, z_0)]^{n_k}.$$

De là, $f(z_0) = 0$ et en vertu du choix de z_0 , on a $f(z) = 0$ pour $0 < \delta(\zeta_2, z) < d^{-1}$ (continuité de f).

Choisissons un autre point $z'_0 \in J$ tel que $0 < \delta(z_0, z'_0) < d^{-1}$, on conclut de la même manière que $f(z'_0) = 0$ et $f(z) = 0$ pour $0 < \delta(z_0, z) < \delta^{-1}$. Par la suite $f(z) = 0$ pour $0 < \delta(\zeta, z) < zd^{-1}$ et ainsi de suite. Ce qui termine la démonstration.

Etablissons maintenant le théorème suivant sur J , énoncé dans [5] sur $[a, b]$ mais sans démonstration explicite.

5. THÉORÈME. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty$, alors la classe $C(w_n, M_n)$ est q.a.

PREUVE. Soit z_0 un autre point de J tel que $z_0 \neq \zeta_2$. La suite de la preuve résulte du lemme suivant:

6. LEMME. Si $(M_n)_0^{\infty}$ est une suite qui satisfait aux hypothèses du théorème et $f \in C(w_n; M_n)$ sur J ; alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n et des points

$$z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_{n-1} < z_n = \zeta_2$$

tels que

$$|R_n| < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION du lemme. Posons $\mu_1 = 1$, $\mu_k = \frac{M_{k-1}}{M_k}$ ($k \geq 2$). (μ_k est décroissante grâce à la Log-convexité.) Posons

$$\alpha_n = \frac{\delta(z_0, \zeta_2)}{\sum_{k=1}^n \mu_k} \quad (\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ par hypothèse}).$$

Choisissons les points $z_1, \dots, z_n$ de J situés entre z_0 et ζ_2 tels que

$z_n = \zeta_2$, $\delta(z_{k-1}, z_k) = \alpha_k \mu_k$ ($k = 1, \dots, n$). Alors

$$M_k = \alpha_k \frac{M_{k-1}}{\delta(z_{k-1}, z_k)}$$

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{z_{k-1}}^{z_k} (L_k f)(t) \gamma_{k-1}(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} w_1(t) \dots w_{k-1}(t) |(L_k f)(t)| dt \int_{z_1}^t dt_1 \int_{z_2}^{t_1} dt_2 \dots \int_{z_{k-2}}^{t_{k-2}} dt_{k-2} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^t dt_2 \dots \int_{z_{k-2}}^{t_{k-2}} dt_{k-2} &\leq \frac{\delta(z_0, \zeta_2)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{\alpha_n^{k-1} \mu_k^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\leq (\alpha_n e)^{k-1} \mu_2 \dots \mu_k \end{aligned}$$

car (μ_k) est décroissante, d'où

$$\begin{aligned} \int_{z_{k-1}}^{z_k} w_1(t) \dots w_{k-1}(t) |(L_k f)(t)| dt \int_{z_1}^t dt_1 \dots \int_{z_{k-2}}^{t_{k-2}} dt_{k-2} \\ \leq \alpha_n \mu_k A^k M_k (\alpha_n e)^{k-1} \mu_2 \dots \mu_k \\ \leq M_1 A^k \alpha_n (\alpha_n e)^{k-1} \\ = M_1 A \alpha_n (A \alpha_n e)^{k-1}. \end{aligned}$$

De là, $|R_n| \leq M_1 \alpha_n (1 - \alpha_n A e)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ce qui termine la démonstration du lemme et par suite celle du théorème car dans ce cas $f(z_0) = R_n$.

Donnons maintenant une application du travail ci-dessus à des fonctions de $C^\infty(J)$. Pour la définition d'une fonction différentiable sur un arc voir [2] et [1, pp. 123-124].

Soit D l'opérateur de dérivation sur J défini par:

$$(Df)(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

lorsque cette limite existe.

7. THÉORÈME. Posons $H_n(D) = \prod_{k=1}^n (D - P_k(\cdot))$ où $(P_k)_1^\infty$ est une suite de fonctions appartenant à $C^\infty(J)$. Supposons de plus que $(P_k)_1^\infty$ est strictement croissante. Soit $f \in C^\infty(J)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{et} \\ \|H_n(D)f\|_\infty \leq A^n M_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ f^{(n)}(\zeta_2) = (D^n f)(\zeta_2) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Si $(M_n)_0^\infty$ est une suite de nombres réels comme dans la Proposition 4 ou le Théorème 5, alors $f \equiv 0$.

PREUVE. Posons

$$Q_k(z) = P_{k+1}(z) - P_k(z) \quad \forall z \in J, \quad k = 1, \dots$$

$$w_k(z) = e^{Q_k(z)}, \quad k = 1, \dots$$

$$w_0(z) = 1.$$

En appliquant les opérateurs correspondants L_n aux fonctions $\phi(z) = f(z)e^{-P_1(z)}$, on trouve (par récurrence)

$$w_1(z) \dots w_{n-1}(z) (L_n \phi)(z) = e^{-P_1(z)} (H_n(D)f)(z).$$

Mais la condition $f^{(n)}(\zeta_2) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ est équivalente à $(L_n \phi)(\zeta_2) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ et on a donc : $(L_n \phi)(\zeta_2) = (H_n(D)f)(\zeta_2) = 0$, $n = 0, 1, \dots$

Le théorème découle maintenant de la Proposition 4 et du Théorème 5.

8. REMARQUE. Le cas $P_k(z) = \alpha_k z$ où $(\alpha_k)_1^\infty$ est une suite strictement croissante a été obtenu (sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$) par Videnskiĭ [5]. Le résultat que l'on vient d'établir peut avoir un intérêt dans des problèmes de régularité ou d'approximation tels que ceux que l'on trouvera dans [1], [3] ou [4].

Bibliographie

- [1] BRENNAN, J., *Approximation in the mean by polynomials on non-Carathéodory domains*, Ark. Mat. 15(1977), No. 1.
- [2] DALES, H.G. and DAVIE, A.M., *Quasianalytic Banach function algebras*, Journal of Functional Analysis 13(1973), 28-50.
- [3] POLKING, J.C., *Approximation in $\mathbb{L}^p$ by solutions of elliptic partial differential equations*, Amer. J. Math. 94(1972), 1231-1244.
- [4] HRYPTUN, V.G., *Classes of functions quasianalytic with respect to an ordinary linear differential operator, and their applications*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Tome 177 (1967), No. 3.
- [5] VIDENSKIĬ, V.S., *On a new quasianalytic class of functions*, Soviet Math. Dokl., Vol. 15 (1974), No. 6.

Département de mathématiques
et d'informatique
Faculté des sciences
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, P. Qué.
J1K 2R1

Manuscrit reçu le 18 novembre 1985.
Revision le 23 avril 1986.