

UNE CONDITION SUFFISANTE D'EXISTENCE DU MOMENT D'ORDRE m (ENTIER) DU CHAOS MULTIPLICATIF

Note

Fan Ai Hua

Conservons toutes les notions et notations dans l'article de J.-P. Kahane sur le chaos multiplicatif [1].

On a bien une condition nécessaire et suffisante de convergence L^m ($m \geq 2$) de la martingale $Q_n \sigma(K)$ correspondant à $q(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t, s)$:

$$\int \dots \int_{K^m} \exp \sum_{1 \leq j < k \leq m} q(t_j, t_k) d\sigma(t_1) \dots d\sigma(t_m) < \infty.$$

Pour tirer de là une condition plus parlante, posons

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = q(t_1, t_2) + q(t_1, t_3) + \dots + q(t_1, t_m) \\ q_2 = q(t_2, t_1) + q(t_2, t_3) + \dots + q(t_2, t_m) \\ \vdots \\ q_k = q(t_k, t_1) + \dots + q(t_k, t_{k-1}) + q(t_k, t_{k+1}) + \dots + q(t_k, t_m) \\ \vdots \\ q_m = q(t_m, t_1) + q(t_m, t_2) + \dots + q(t_m, t_{m-1}) \end{array} \right.$$

avec les notations évidentes

$$q(t_k, t_j) = q(t_j, t_k) \quad j < k.$$

Alors

$$(**) \quad \sum_{1 \leq j < k \leq m} q(t_j, t_k) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} q(t_j, t_k) = \frac{1}{2}(q_1 + \dots + q_m)$$

donc, d'après l'inégalité de Hölder

$$\int \dots \int_{K^m} \exp \sum_{1 \leq j < k \leq m} q(t_j, t_k) d\sigma(t_1) \dots d\sigma(t_m) \leq \left(\int \dots \int_{K^m} \exp \frac{m}{2} q_1 \right)^{\frac{1}{m}} \dots \left(\int \dots \int_{K^m} \exp \frac{m}{2} q_m \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Ensuite on va calculer la première intégrale

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{K^m} \exp \frac{m}{2} (q(t_1, t_2) + q(t_1, t_3) + \dots + q(t_1, t_m)) d\sigma(t_1) \dots d\sigma(t_m) \\ &= \int_K \left\{ \left[\int_K \exp \frac{m}{2} q(t_1, t_2) d\sigma(t_2) \right] \dots \left[\int_K \exp \frac{m}{2} q(t_1, t_m) d\sigma(t_m) \right] \right\} d\sigma(t_1) \\ &= \int_K \left(\int_K \exp \frac{m}{2} q(s, t) \right)^{m-1} d\sigma(s). \end{aligned}$$

Comme

$$\int \dots \int_{K^m} \exp \frac{m}{2} q_1 = \int \dots \int_{K^m} \exp \frac{m}{2} q_2 = \dots = \int \dots \int_{K^m} \exp \frac{m}{2} q_m$$

on obtient finalement

THÉORÈME. Pour avoir à la fois non dégénérescence forte de l'opérateur Q correspondant à $q(t, s)$ et $E[Q\sigma(K)]^m < \infty$, il suffit qu'on ait

$$(1) \quad \int_K \left(\int_K \exp \frac{m}{2} q(s, t) d\sigma(t) \right)^{m-1} d\sigma(s) < \infty.$$

En particulier, la condition précédente peut être remplacée par

$$(2) \quad \sup_s \int_K \exp \frac{m}{2} q(s, t) d\sigma(t) < \infty.$$

Référence

- [1] KAHANE, J.-P., *Le chaos multiplicatif*, Ann. sc. math. Québec 9(1985), 105-150 et C.R. Acad. Sc. Paris 301(1985), 329-332.

Département de mathématiques
Université de Wuhan
Wuhan, Hubei
Chine

Manuscrit reçu le 17 juin 1986