

THÉORÈMES DU TYPE GELFAND-NAÏMARK DANS LES ALGÈBRES UNIFORMÉMENT A-CONVEXES

M. Oudadess

Nous obtenons, sur les a.l.u.A-convexes, des théorèmes du type Gelfand-Naïmark, ce qui montre que deux classes d'exemples, qui reviennent toujours dans les travaux sur ces algèbres, sont canoniques dans le cas unitaire commutatif complet.

0. Introduction

Dans les travaux sur les a.l.u.A-convexes ([1], [2], [4], [5]) deux classes d'exemples reviennent constamment.

EXEMPLE 1. Soit $E = C_b(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $E_0 = C_b^0(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même qui tendent vers 0 à l'infini. Pour tout ϕ dans E_0 , considérons la seminorme sur E :

$$p_\phi(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x) \cdot f(x)|.$$

La famille $(p_\phi)_\phi$, ϕ parcourant E_0 définit sur E une topologie localement A-convexe qui n'est pas localement multiplicativement convexe ([4]).

EXEMPLE 2. Soit E une algèbre de Banach commutative sans ordre, c.-à-d. $x \cdot E = 0$ implique $x = 0$. On considère l'algèbre $M(E)$ des multiplicateurs sur E c'est-à-dire l'algèbre des opérateurs T linéaires tels que $T(x) \cdot y = x \cdot T(y)$, pour tous x, y dans E .

La topologie stricte β , sur $M(E)$, définie par les semi-normes $p_x(T) = \|T(x)\|$ ($x \in E$) définit sur $M(E)$ une topologie localement A-convexe qui n'est pas en général localement multiplicativement convexe ([4], [5]).

Cet exemple généralise l'Exemple 1: En effet, si E est une algèbre de Banach semi-simple, son spectre (global) $X(E)$ est localement compact pour la topologie faible et tout élément f de E peut être considéré comme une fonction continue sur $X(E)$ et tendent vers 0 à l'infini. De plus, il est montré dans [17] que pour tout multiplicateur T sur E , il existe une fonction g continue bornée sur X telle que $(Tf) \cdot x = g(x) \cdot f(x)$ pour tout f dans E et tout x dans $X(E)$.

Grâce à nos résultats sur les a.l.u.A-convexes ([11], [12], [13], [15]) nous obtenons, sur celles-ci, des théorèmes du type Gelfand-Naïmark: Il ressort (Th. III.3) que toute a.l.u.A-convexe unitaire, commutative, séquentiellement complète est algébriquement isomorphe à une algèbre de multiplicateurs. Dans le cas semi-simple, c'est une sous-algèbre d'une algèbre $C(K)$ de fonctions continues sur un compact (Théorème III.3).

Nous introduisons à la section V les a.l.u.A-convexes stellaires et obtenons, dans le cas commutatif complet, qu'elles sont algébriquement isomorphes à des C^* -algèbres (de fonctions continues sur un compact).

Notre approche permet également de caractériser les a.l.u.A-convexes commutatives unitaires (non complètes) que l'on peut compléter en de telles algèbres.

A la section III nous regardons les a.l.u.A-convexes involutives (c.-à-d. munie d'une involution continue) et obtenons, en particulier, que l'involution est automatique bornée dans le cas semi-simple. Nous montrons aussi que toute forme linéaire est positive si, et seulement si, elle est faiblement positive. En ce qui concerne la continuité des formes positives, les a.l.u.A-convexes sont β -régulières au sens que nous avons défini dans [14] et donc les résultats de cet article leur sont applicables.

Une partie de ce travail a été réalisée à l'E.N.S. Takaddoum de Rabat et l'autre au D.M.S. de l'Université de Montréal. L'auteur remercie ce dernier département pour son hospitalité et Monsieur le Professeur Ngô Van Quê pour son invitation. Il remercie également Messieurs les Professeurs J.I. Nieto et A. Giroux pour leur aide.

I. Préliminaires

Soient (E, τ) un espace localement convexe et $(p_\lambda)_\lambda$ une famille de seminormes définissant sa topologie τ . Si E est muni d'une structure d'algèbre telle que la multiplication soit séparément continue, on dit que (E, τ) est une algèbre localement convexe (a.l.c.).

Une a.l.c. (E, τ) est dite *A-connexe* (en abrégé *a.l.A-convexe*) si, pour tout λ et tout x , il existe $M(\lambda, x) > 0$ et $N(\lambda, x) > 0$ tels que

$$p_\lambda(x \cdot y) \leq M(\lambda, x) \cdot p_\lambda(y) \quad \text{et} \quad p_\lambda(y \cdot x) \leq N(\lambda, x) \cdot p_\lambda(y), \quad \text{pour tout } y.$$

Une a.l.c. (E, τ) est dite *uniformément A-convexe* (a.l.u.A-convexe) si, pour tout x , il existe $M(x) > 0$ et $N(x) > 0$ tels que, pour tout x :

$$p_\lambda(x \cdot y) \leq M(x) \cdot p_\lambda(y) \quad \text{et} \quad p_\lambda(y \cdot x) \leq N(x) \cdot p_\lambda(y), \quad \text{pour tout } y.$$

Une a.l.c. (E, τ) est dite *localement multiplicativement convexe* (a.l.m.c.) si

$$p_\lambda(x \cdot y) \leq p_\lambda(x) \cdot p_\lambda(y), \quad \text{pour tous } x, y \text{ et tout } \lambda.$$

Remarquons que toute a.l.m.c. et toute a.l.u. A-convexe est une a.l. A-convexe mais qu'une a.l.m.c. n'est pas nécessairement une a.l.u.A-convexe. De même, une a.l.u.A-convexe n'est pas nécessairement une a.l.m.c. ([4]).

Nous ne considérons que des algèbres complexes et unitaires.

II. Complétion d'une a.l.u.A-convexe

On sait qu'une algèbre A-normée ne peut être complétée en une algèbre que si c'est une algèbre normée. On peut penser que dans le cas d'une a.l.A-convexe, la topologie étant définie par une famille de semi-normes, l'opération complétion puisse être réalisée. L'exemple suivant montre que ce n'est pas possible dans le cas dénombrable et l'on verra que c'est un fait général (Proposition II.1).

EXEMPLE. Soit l'algèbre L^ω d'Arens ([3]). On a $L^\omega = \bigcap_{p \geq 1} L^p[0,1]$ et $C[0,1]$ est inclus dans L^ω . La topologie de L^ω est définie par la suite de semi-normes

$$p_n(f) = \left(\int_0^1 |f(t)|^n dt \right)^{1/n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Munissons $C[0,1]$ de la topologie induite par celle de L^ω . On obtient une a.l.u.A-convexe unitaire non complète et non localement multiplicativement convexe. Sa complétée L^ω n'est pas une a.l.A-convexe car sinon elle serait une a.l.m.c. ([9]), ce qui est inexact ([4]).

On a, plus généralement, la

PROPOSITION II.1. Soit $(E; (p_n)_n)$ une a.l.A-convexe séparée non l.m.c. et non complète. Alors l'e.l.c. $\hat{E}$, complétée de E n'est pas une a.l.A-convexe.

DÉMONSTRATION. Si $\hat{E}$ était une a.l.A-convexe, elle serait de Fréchet et donc ce serait une a.l.m.c. ([9]). Mais alors E serait une a.l.m.c., ce qui est contradictoire.

COROLLAIRE II.1. Si (E, τ) est une a.l.A-convexe telle que $\hat{E}$ est aussi une a.l.A-convexe, alors τ est définie par une famille non dénombrable de semi-normes.

REMARQUE. Ce phénomène sera éclairé dans la suite, par le Théorème III.3:
Les a.l.u.A-convexes commutatifs, unitaires que l'on peut compléter apparaîtront comme des sous-algèbres d'algèbres de multiplicateurs.

III. a.l.u.A-convexes non involutives

Dans [12], nous avons mis en évidence sur toute a.l.u.A-convexe unitaire séquentiellement complète (E, τ) une topologie d'a.l.m.c. de Fréchet τ' plus fine que τ et telle que les bornés sont les mêmes pour τ et τ' .

Nous avons, par la suite, obtenu le:

THÉORÈME III.1 ([15], théorème III.1). *La topologie d'une a.l.u.A-convexe unitaire séparée tonnelée peut être définie par une norme d'algèbre.*

Indications: Soit τ la topologie de l'algèbre E définie par la famille $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de semi-normes qui, par hypothèse, satisfont $\forall x \in E, \exists M(x) > 0, \exists N(x) > 0$:

$$(*) \quad p_\lambda(x \cdot y) \leq M(x) \cdot p_\lambda(y), \quad \forall y \in E;$$

$$(**) \quad p_\lambda(y \cdot x) \leq N(x) \cdot p_\lambda(y), \quad \forall y \in E.$$

On sait ([5]) que $\|x\| = \inf\{M(x) : M(x) \text{ vérifie } (*)\}$ est une norme d'algèbre et que $p_\lambda(x) \leq \|x\|$, pour tout x et tout λ .

On pose $\|x\|' = \sup\{p_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}$, pour tout $x \in E$. Comme τ est séparée, on a $x = 0$ si $\|x\|' = 0$. Des propriétés des p_λ et du sup, il découle que $\|\cdot\|'$ est une norme d'espace vectoriel.

On montre alors que

a) $\|\cdot\|'$ définit une topologie équivalente à τ ;

b) $\exists k > 0 : \|x \cdot y\|' \leq k \cdot \|x\|' \cdot \|y\|', \quad \forall x, y \in E$.

En combinant les deux résultats susmentionnés, on obtient le

THÉORÈME III.2 ([15], théorème III.6). Toute a.l.u.A-convexe unitaire séquentiellement complète (E, τ) peut être munie d'une norme d'algèbre de Banach $\|\cdot\|$ plus fine que τ . De plus, les bornés sont les mêmes pour τ et pour $\|\cdot\|$.

Nous passons maintenant au premier théorème du type Gelfand-Naĭmark.

THÉORÈME III.3. Une a.l.u.A-convexe unitaire commutative, et séquentiellement complète est (algébriquement) une algèbre de multiplicateurs. Si, de plus, elle est semi-simple, alors c'est une algèbre de fonctions continues sur un compact.

DÉMONSTRATION. On considère E munie de la norme du Théorème III.2. C'est une algèbre de Banach unitaire commutative. Mais dans ce cas, E est isométriquement isomorphe à son algèbre des multiplicateurs $M(E)$; l'identification se fait comme suit: A tout $f \in E$, on associe l'opérateur T_f défini par $T_f(g) = fg$, pour tout $g \in E$.

Si E est de plus semi-simple, alors, d'après la théorie de Gelfand, c'est une algèbre de fonctions continues sur un compact.

REMARQUE. L'algèbre $C_b(\mathbb{R})$ — l'Exemple 1 dans l'introduction — est une sous-algèbre de $C(\beta\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues sur le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{R}$. En fait, $C_b(\mathbb{R})$ et $C(\beta\mathbb{R})$ sont algébriquement isomorphes.

IV. a.l.u.A-convexes involutives

DÉFINITION. Une a.l.u.A-convexe E est dite *involutive* si elle est munie d'une involution, $x \rightarrow x^*$, continue.

REMARQUE. La définition précédente est équivalente au fait que la topologie de E est définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_\lambda$ telle que $p_\lambda(x^*) = p_\lambda(x)$, pour tout λ et tout x dans E . Pour cela, il suffit de considérer, comme dans le cas d'une algèbre normée, $\text{Max}(p_\lambda(x), p_\lambda(x^*))$.

EXEMPLES.

1. L'algèbre $C_b(\mathbb{R})$ est une a.l.u.A-convexe involutive. L'involution est $f \rightarrow \bar{f}$ où $\bar{f}$ est la conjuguée de f . Et l'on a: $p_\phi(\bar{f}) = p_\phi(f)$, pour tout ϕ et tout f .

2. Une H^* -algèbre est une algèbre de Banach E munie d'une involution et qui est un espace de Hilbert pour un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que

a) $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ c.-à-d. la norme d'espace de Hilbert est compatible avec la norme d'algèbre de Banach; b) $\|x^*\| = \|x\|$; c) $x^* \cdot x \neq 0$ si $x \neq 0$ et

d) $\langle xy, z \rangle = \langle y, x^*z \rangle$, pour tous $x, y, z \in E$. Un exemple de H^* -algèbre est l'algèbre $L_2(G)$ d'un groupe compact G . Si E est une H^* -algèbre, alors l'opération $T \rightarrow T^*$, où T^* est l'adjoint de T , est une involution sur l'algèbre $M(E)$ des multiplicateurs de E ([8]). De plus, elle est continue. En effet:

$\langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle$ et $\langle T^*x, T^*x \rangle = \langle x, TT^*x \rangle$ et comme $M(E)$ est commutative, on a $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Ainsi avons-nous $p_x(T) = p_x(T^*)$, pour tout T et tout x .

On examine maintenant la structure des a.l.u.A-convexes involutives.

THÉORÈME IV.1. *Toute a.l.u.A-convexe (E, τ) unitaire, séquentiellement complète et involutive peut être munie d'une structure d'algèbre de Banach involutive. De plus, les bornés sont les mêmes pour la topologie τ et pour la norme.*

DÉMONSTRATION. On reprend la preuve du Théorème III.2 et l'on constate que $\|x\| = \|x^*\|$, pour tout x .

Si l'on ne sait pas au départ que l'involution est continue pour la topologie, on a la

PROPOSITION IV.2. *Toute involution sur une a.l.u.A-convexe (E, τ) unitaire séquentiellement complète et semi-simple est bornée.*

DÉMONSTRATION. Considérons la norme $\|\cdot\|$ d'algèbre de Banach du Théorème III.2. Alors $(E; \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach semi-simple et munie d'une involution. D'après [16], cette involution est continue donc bornée; et comme les bornés sont les mêmes pour la topologie et pour la norme, on a le résultat.

Ainsi, on a le

COROLLAIRE IV.3. Si (E, τ) est une a.l.u.A-convexe unitaire, séquentiellement complète involutive, alors munie de sa bornologie de Von-Neumann, c'est une *-a.b.m.c. au sens d'Hogb -Nlend [7]. Si elle est semi-simple, la continuité de l'involution est superflue.

En tenant compte des résultats de [16], on a aussi le

COROLLAIRE IV.4. Une forme linéaire, sur une a.l.u.A-convexe unitaire séquentiellement complète, est positive si, et seulement si, elle est faiblement positive.

V. a.l.u.A-convexes stellaires

DÉFINITION. Soit (E, τ) une a.l.u.A-convexe munie d'une involution et dont la topologie τ est définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_\lambda$. On dira que (E, τ) est stellaire si $p_\lambda(x^* \cdot x) = [p_\lambda(x)]^2$, pour tout λ et tout x .

THÉORÈME V.1. Toute a.l.u.A-convexe unitaire, commutative, séquentiellement complète et stellaire est algébriquement isomorphe à une $\mathbb{C}^*$ -algèbre de fonctions continues sur un compact.

DÉMONSTRATION. On montre, comme au Théorème IV.1, que E peut être munie d'une norme qui en fait une $\mathbb{C}^*$ -algèbre. Alors $(E; \|\cdot\|)$ qui est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre unitaire et commutative est isométriquement isomorphe (théorème de Gelfand-Naïmark) à la $\mathbb{C}^*$ -algèbre $C(M)$, des fonctions continues sur l'espace M des caractères de E . Ainsi, E est algébriquement isomorphe à $C(M)$.

Le corollaire suivant mérite une mention particulière.

COROLLAIRE V.2. Dans le cas Fréchet, (E, τ) est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre.

Références

- [1] AKKAR, M., *Sur certaines algèbres munies de normes particulières*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 280 (1975), Série A, 345-348.
- [2] AKKAR, M., *Etude spectrale et structures d'algèbres topologiques et bornologiques complètes*, Thèse Sc. math., Bordeaux, 1976.
- [3] ARENS, R., *The space L^ω and convex topological rings*, Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 931-935.
- [4] COCHRAN, A.C., KEOWN, R., WILLIAMS, C.R., *On a class of topological algebras*, Pacific J. Math., 34 (1970), 17-25.
- [5] COCHRAN, A.C., *Representation of A-convex algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 41 (1973), 473-479.
- [6] DIXMIER, J., *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, 2^{ième} édition (1969).
- [7] HOGBE-NLEND, H., *Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques*, Bol. Soc. Brasil. Mat., 3 (1972), 19-86.
- [8] LARSEN, R., *The multiplier problem*, Lecture Notes in Math., 105, Springer-Verlag (1969).
- [9] MICHAEL, E.A., *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 11, Providence (1952).
- [10] NAIMARK, M.A., *Normed Algebras*, Walters-Noordhoff Publishing Groningen, The Netherlands (1972).
- [11] OUDADESS, M., *Caractères et formes positives dans des algèbres topologiques ou bornologiques*, Thèse Ph.D., Université de Montréal (1983).

- [12] OUDADESS, M., *Théorèmes de structures et propriétés fondamentales des algèbres localement uniformément A-convexes*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 296 (1983), Série I, 851-853.
- [13] OUDADESS, M., *Continuité des caractères dans les algèbres uniformément A-convexes*, Ann. sc. math. Québec (1983), Vol. VII, No 2, 193-201.
- [14] OUDADESS, M., *Rayon de régularité dans les algèbres infra-séquentielles*, Can. J. Math., Vol. XXXVI, No 1 (1984), 84-94.
- [15] OUDADESS, M., *Une norme d'algèbre de Banach dans les algèbres localement uniformément A-convexes complètes*, Afrika Matematika (à paraître).
- [16] PTAK, V., *Banach algebras with involution*, Manuscripta Math. 6 (1972), 245-290.
- [17] WANG, J.K., *Multipliers of commutative Banach algebras*, Pacific J. Math., 11 (1961), 1131-1149.

Ecole normale supérieure Takaddoum
Avenue Oued Akreuch
B.P. 5118, Rabat
Maroc

Manuscrit reçu le 21 août 1984.
Révisé le 16 janvier 1985.