

À PROPOS DES IDÉAUX LOCAUX

G. Mason et R. Raphael

Introduction

Dans un article intéressant, publié récemment [D], on définit la notion d'idéal local et on démontre quelques résultats pour l'anneau $C(X)$ des fonctions réelles continues. Les preuves utilisent certains résultats fondamentaux d'analyse non standard, ainsi que quelques propriétés très spécifiques de l'anneau $C(X)$. Dans le présent document, nous appliquons les résultats de Dyre à des anneaux plus communs, nous fournissons des preuves qui n'utilisent que les notions élémentaires de la théorie des anneaux et nous étudions les liens entre nos travaux et d'autres résultats déjà publiés. Tous les anneaux traités sont associatifs avec 1.

Idéaux locaux

Dans la référence [D], Dyre définit qu'un idéal I de $C(X)$ est local si, quand $\prod_{i=1}^n (f - f_i) = 0$ avec $f_i \in I$, alors $f \in I$. Cette notion a été mentionnée (sans source) dans une publication récente [H de P], et les auteurs de celle-ci l'attribuent à Luxemburg. Pour tout anneau, nous définissons qu'un idéal I est local si $(x - a_1)R(x - a_2)R \dots R(x - a_n) = 0$ et $a_i \in I$ implique que $x \in I$.

On voit immédiatement que tout idéal local contient le radical $W(R)$. Si R est commutatif, les idéaux locaux de R/W sont précisément les I/W pour lesquels $I \supset W$ est local dans R et, par conséquent, on peut supposer, sans

perte de généralité, que tous les anneaux commutatifs sont semi-premiers. Pour des raisons d'uniformité et afin d'obtenir les meilleurs résultats possibles, nous allons, de fait, limiter notre étude aux anneaux semi-premiers, en considérant aussi ceux qui sont non commutatifs. Si W est nilpotent, il n'y a pas non plus de perte de généralité.

La famille des idéaux locaux est stable par rapport aux intersections et contient les idéaux premiers, donc aussi les idéaux semi-premiers. On dit que I est *sur-premier* si I renferme un idéal premier, et que I est *pseudo-premier* si $aRb = 0$ implique que $a \in I$ ou $b \in I$ (voir [GK]). Les idéaux sur-premiers sont donc à la fois pseudo-premiers et locaux. Par analogie avec le cas des anneaux commutatifs, on peut facilement démontrer le

LEMME 1. I est sur-premier ssi $a_1 R a_2 R \dots R a_n = 0$ implique que $a_i \in I$ pour un i donné.

Voici quelques-uns des résultats connus pour l'anneau $C(X)$ des fonctions réelles continues d'un espace topologique X (voir [D] et [GK]).

THÉORÈME 1. (a) Si I est un idéal, $I^L = \{x \mid \exists a_1, \dots, a_n \in I \text{ avec } \pi(x - a_i) = 0\}$ l'est aussi et I^L est le plus petit idéal local qui contient I (la "fermeture locale de I ").

(b) I est local ssi I est une intersection des idéaux sur-premiers.

(c) I est pseudo-premier ssi I est sur-premier.

(d) Tout idéal de $C(X)$ est local ssi $C(X)$ est bézoutien.

Nous allons maintenant démontrer que (a) et (b) sont vrais pour tout anneau.

Si I est un idéal quelconque, considérons l'ensemble

$$I^L = \{x \in R \mid \exists a_1, \dots, a_n \in I \text{ avec } (x - a_1)R(x - a_2) \dots R(x - a_n) = 0\}.$$

THÉOREME 2. I^L est l'intersection de tous les idéaux sur-premiers qui renferment I . Ainsi, I^L est un idéal et est la fermeture locale de I . D'où I est local ssi I est une intersection des idéaux sur-premiers.

DÉMONSTRATION. Soit $I_0 = \cap \{\text{idéaux sur-premiers } Q \supseteq I\}$. Alors $I \subseteq I_L \subseteq I_0$ puisque I^L appartient à tous les idéaux locaux qui renferment I et puisque les idéaux sur-premiers sont locaux. Supposons que $\exists x \in I_0 \setminus I^L$. Posons $T = \{(x - a_1)R \dots R(x - a_n) \mid a_i \in I\} \cup \{1\}$. Puisque $x \notin I^L$, $0 \in T$, T est un m -système tel que son complément contient un idéal premier P maximal parmi les idéaux disjoints de T . Soit $S = \{x - a \mid a \in I\}$. Alors $x \in S \subset T$ et $P \cap S = \emptyset$. De même, $(P + I) \cap S = \emptyset$ car, si $p + i = x - a$, alors $p = x - a - i \in P \cap S$. Ainsi, $P + I$ est un idéal sur-premier qui contient I mais non x , ce qui contredit l'hypothèse que $x \in I_0$.

Anneaux normaux

Les résultats des parties (c) et (d) du Théorème 1 ne peuvent être appliqués à des anneaux arbitraires (semi-premiers), mais ils sont vrais pour plusieurs grandes catégories d'anneaux. A noter d'abord que si R n'est pas semi-premier, il n'est pas nécessaire que les idéaux pseudo-premiers soient sur-premiers, comme le montre l'exemple de l'idéal de 4 dans l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Toutefois, le Théorème 1 (c) a été appliqué à tout f -anneau dans [S]. (Un f -anneau est un anneau ordonné réticulé qui est un produit indirect d'anneaux totalement ordonnés.) La catégorie des f -anneaux est stable pour les sous-anneaux et les anneaux quotients et elle contient $C(X)$.

Dans le but de généraliser le Théorème 1 (c) et (d), nous avançons la définition suivante: si P est un idéal premier, la p -composante de 0 est $0_P = \{r \mid \exists s \notin P \text{ avec } rRs = 0\}$. 0_P est alors un idéal contenu dans P et, puisque R est semi-premier, $rRs = 0 \iff sRr = 0$, de sorte que la définition de 0_P est symétrique des deux côtés. A noter que si I est un idéal quelconque, l'ensemble 0_I , qui en général n'est pas un idéal, possède la propriété suivante:

$0_I \subseteq I$ ssi I est pseudo-premier. La notion de p -composante est apparue dans la littérature sous diverses notations, celle présentée ici étant la notation utilisée par Lambek ([L], p. 145).

Dans [G], par exemple, 0_p est représenté par $N(P)$ lorsqu'il est question de l'espace des idéaux premiers; dans [GS], chaque idéal maximal de $C(X)$ est associé à un point p de βX et $0_M \equiv 0^P$. Enfin, dans [S], si M est un idéal absolument convexe dans un f -anneau, 0_M est représenté par $\pi(M)$.

LEMME 2. Si l'idéal pseudo-premier I est contenu dans un idéal premier P , alors $0_p \subseteq I$.

DÉMONSTRATION. Soit $r \in 0_p$ de sorte que $rRs = 0$ pour un $s \notin P$ donné. Etant donné que I est pseudo-premier, on a soit $r \in I$, soit $s \in I$. Mais il est contradictoire que $s \in I \subset P$.

PROPOSITION 1. (a) $0_p = \cap \{\text{idéaux premiers minimaux appartenant à } P\}$ et
(b) $0_p = \cap \{\text{idéaux premiers minimaux sur } 0_p\}$.

DÉMONSTRATION. Il est évident que 0_p est contenu dans chaque intersection en vertu du lemme précédent, cas (a). Réciproquement, supposons que $x \notin 0_p$ de sorte que $yRx \neq 0$ pour tous les $y \notin P$. Supposons que $S = (R \setminus P) \cup (R \setminus P)Rx$, S est alors un m -système qui ne contient pas zéro, qui contient x et dont le complément appartient à P . Si J est un idéal maximal par rapport à la propriété $J \cap S = \emptyset$, alors J est un idéal premier, $J \subset P$ et $x \notin J$. Ceci complète (a). En outre, en vertu du lemme, $J \subset P$ implique que $0_p \subset J$ de sorte qu'il existe un idéal minimal premier sur 0_p qui ne contient pas x , ce qui termine la preuve.

Le résultat suivant est démontré par analyse dans [GK] pour les idéaux 0^P de $C(X)$.

THÉOREME 3. Dans n'importe quel anneau semi-premier, chaque idéal $I = \cap (I + 0_M)$ lorsque l'intersection est sur les idéaux maximaux.

DÉMONSTRATION. Il est évident que I appartient à l'intersection. Réciproquement, supposons $x \in \bigcap (I + 0_{M_i})$. Pour chaque idéal maximal M_i , il existe alors un $y_i \in I$ et un $z_i \in 0_{M_i}$ tels que $x = y_i + z_i$. Il existe donc un $w_i \notin M_i$ tel que $z_i R w_i = 0$. L'ensemble des w_i n'appartient pas à un idéal maximal, d'où $R = \sum R w_i R$. Par conséquent, il existe des r_{ij}, s_{ij} tels que $1 = \sum_{ij} r_{ij} w_i s_{ij}$, une somme finie. Pour chaque i , $x r_{ij} w_i s_{ij} = (y_i + z_i) r_{ij} w_i s_{ij} = y_i r_{ij} w_i s_{ij} \in I$ de sorte que $\psi = \sum x r_{ij} w_i s_{ij} \in I$.

Le résultat suivant caractérise une grande catégorie d'anneaux dans laquelle tout idéal pseudo-premier est sur-premier et tous les idéaux sont locaux.

THÉOREME 4. Les énoncés suivants sont équivalents pour un anneau R semi-premier.

- (a) Si P_1 et P_2 sont des idéaux premiers minimaux distincts de R , Alors $R = P_1 + P_2$.
- (b) Tout idéal premier propre contient un idéal premier minimal unique.
- (c) Tout idéal maximal contient un idéal premier minimal unique.
- (d) 0_P est premier pour tous les idéaux premiers.
- (e) 0_M est premier pour tous les idéaux maximaux.
- (f) Si $rRs = 0$, alors $R = \text{Ann } RrR + \text{Ann } RsR$.

Si R est un anneau réduit, ces énoncés sont équivalents aux suivants:

- (g) $rs = 0$ implique que $R = \text{Ann } r + \text{Ann } s$.
- (h) $\text{Ann } rs = \text{Ann } r + \text{Ann } s$ pour tous les r, s .
- (i) $\bigcap_{i=1}^n r_i = 0$ implique que $R = \sum_{i=1}^n \text{Ann } r_i$.

REMARQUES. Ce résultat est fondé sur [H, théorème 8], qui a traité de certaines de ces conditions dans le cas des anneaux commutatifs. Conformément à la terminologie de [H de P], nous allons parler ici d'anneaux normaux. A noter que si l'on considère l'énoncé (f), il n'est pas nécessaire de distinguer les annulateurs à gauche des annulateurs à droite, puisque R est semi-premier. De la même façon, dans des anneaux réduits, $rs = 0 \iff rRs = 0 \iff sRr = 0 \iff sr = 0$, de sorte que $\text{Ann } r$ est bien défini.

DÉMONSTRATION. (a) $\Rightarrow$ (b). Comme on le sait, tout idéal premier P contient au moins un idéal premier minimal. Si P contient les idéaux premiers minimaux P_1 et P_2 , alors $P \supset P_1 + P_2 = R$, ce qui est contradictoire.

(b) $\Rightarrow$ (c) est évident.

(d) $\Rightarrow$ (e) est trivial.

(e) $\Rightarrow$ (f). Supposons que $rRs = 0$ et que $\text{Ann } RrR + \text{Ann } RsR$ est un idéal propre appartenant à un idéal maximal M . On a d'abord que $\text{Ann } RrR \subset M$ implique que $r \notin 0_M$ ou encore que $rRt = 0$ pour un $t \notin M$. Mais alors, $t \in \text{Ann } RrR \subset M$. De la même façon, $\text{Ann } RsR \subset M \Rightarrow s \notin 0_M$. Ainsi, si $rRs = 0$ et 0_M est premier, $r \in 0_M$ ou $s \in 0_M$, ce qui est contradictoire.

(f) $\Rightarrow$ (a). Supposons que P et Q sont deux idéaux premiers minimaux distincts de R et soit $p \in P \setminus Q$. Selon la Proposition 1, $P = 0_P$ pour les idéaux premiers minimaux, de sorte que $pRs = 0$ pour un $s \notin P$. Puisque $p \notin Q$, $\text{Ann } RpR \subset Q$. De la même manière, $s \notin P \Rightarrow \text{Ann } RsR \subset P$. En utilisant (f), $R = \text{Ann } RpR + \text{Ann } RsR \subset P + Q$, de sorte que $R = P + Q$, le résultat requis.

Supposons maintenant que R est réduit.

(f) $\Leftrightarrow$ (g) en vertu des remarques précédentes concernant les anneaux réduits.

(g) $\Leftrightarrow$ (h). $\text{Ann } rs \subseteq \text{Ann } r + \text{Ann } s$ est toujours vrai. Réciproquement, si $rst = 0$, $R = \text{Ann } r + \text{Ann } st$ selon (g), et ainsi $1 = x + y$ et $t = tx + ty$ où $tx \in \text{Ann } r$ et $ty \in \text{Ann } s$, le résultat requis.

(h) $\Rightarrow$ (i). Par induction, (h) implique que $\text{Ann} \left(\prod_{i=1}^n r_i \right) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ann } r_i$ et le cas où $\prod_{i=1}^n r_i = 0$ suit.

(i) $\Rightarrow$ (g) est trivial.

COROLLAIRE. Si R est normal, alors tous les idéaux sont locaux et tout idéal pseudo-premier est sur-premier.

DÉMONSTRATION. Si R est normal, chaque 0_M est premier de sorte que chaque $I + 0_M$ est sur-premier et $I = \cap (I + 0_M)$ selon le Théorème 3. Ainsi, I est local selon le Théorème 2. De même, puisque chaque idéal pseudo-premier $I \subset M$ pour un idéal maximal M , $I \supset 0_M$ en vertu du Lemme 2, et ainsi I est sur-premier.

Nous allons maintenant analyser des exemples et des propriétés de la condition de normalité. A noter d'abord que, d'après la définition d'un idéal local, tout idéal de R est local ssi tout idéal de type fini est local, de sorte que dans un anneau de Bézout, cela suffit à montrer que tout idéal principal est local. En fait, si R est un anneau de Bézout commutatif, alors en vertu de [G, théorème 3.10], les idéaux premiers appartenant à n'importe quel idéal forment une chaîne et, par conséquent, 0_M est premier et ainsi R est normal. Pour $C(X)$, Dyre a démontré que réciproquement, si tous les idéaux sont locaux, $C(X)$ est bézoutien, mais, en général, ceci est faux (voir la remarque qui conclut le présent document). Par exemple, dans n'importe quel anneau premier, tout idéal est sur-premier, donc local.

Dans le cas d'anneaux non commutatifs, nous pouvons généraliser le résultat de Gillman d'une certaine façon. Nommons R l'anneau de Bézout gauche (ou droit), si tout idéal gauche (resp. droit) de type fini est principal.

PROPOSITION 2. *Si les idéaux premiers minimaux d'un anneau de Bézout gauche ou droit sont complètement premiers, alors chaque idéal maximal contient un idéal premier minimal unique, c.-à-d. que R est normal.*

REMARQUE. Les idéaux premiers minimaux sont complètement premiers dans des anneaux réduits, ou plus généralement dans des anneaux compressifs [T].

DÉMONSTRATION. Si l'idéal maximal M contient deux idéaux premiers minimaux distincts $P \neq Q$, supposons que $p \in P \setminus Q$ et $q \in Q \setminus P$. Il existe alors un $a \in R$ tel que $Rp + Rq = Ra$, de sorte que pour des valeurs de $b, c, s, t \in R$, $p = ba$, $q = ca$ et $a = sp + tq$. Soit maintenant $a \notin P$ de sorte que $b \in P$. Et aussi

$tq = a - sp = a - sba = (1 - sb)a \in Q$ et $a \notin Q$ de sorte que $1 - sb \in Q$. Par conséquent, $1 = sb + (1 - sb) \in P + Q \subseteq M$, ce qui est contradictoire.

PROPOSITION 3. (a) Si les R_i sont des anneaux normaux, alors $\oplus R_i$ l'est aussi.

(b) Si R est normal, alors chaque "anneau coin" eRe où $e = e^2$ l'est aussi.

DÉMONSTRATION. (a) Soit $a = (a_i)$, $b = (b_i) \in R = \oplus R_i$ et supposons que $aRb = 0$. Alors $a_i R_i b_i = 0$ pour tous les i et ainsi, par hypothèse, $R_i = \text{Ann}_{R_i} R_i a_i R_i + \text{Ann}_{R_i} R_i b_i R_i$ pour chaque i . Alors, $R = \oplus R_i = \oplus (\text{Ann}_{R_i} R_i a_i R_i + \text{Ann}_{R_i} R_i b_i R_i) = \text{Ann}_R(\oplus R_i a_i R_i) + \text{Ann}_R(\oplus R_i b_i R_i) = \text{Ann}_R RaR + \text{Ann}_R RbR$.

(b) Si $e^2 = e$ et $(ea_1 e)eRe(ea_2 e) = 0$, alors $ea_1 eRea_2 e = 0$ de sorte que $R = \text{Ann}_R Rea_1 eR + \text{Ann}_R Rea_2 eR$. Puisque $1 = x_1 + x_2$ lorsque $x_i Rea_i eR = 0$, $i = 1, 2$. On peut donc exprimer e , l'élément unité de eRe , comme $e = ex_1 e + ex_2 e$ où $ex_i \in \text{Ann}_{eRe} eRe(ea_i e)eRe$, pour $i = 1, 2$.

Rappelons (voir [Ka]) qu'un anneau R est un anneau de Baer si tout annulateur à gauche (à droite) est de la forme Re (resp. eR), $e^2 = e$. Les énoncés suivants doivent être vérifiés.

1. Le centre d'un anneau de Baer est de Baer [Ka, théorème 7].
2. Un anneau de Baer commutatif est normal: selon [Ki, théorème 9.5], tout idéal premier contient un idéal premier minimal unique.
3. Pour tous les x dans un anneau de Baer R , il existe un idempotent central $e(x)$ tel que $e(x)x = x$. De plus, si R est semi-premier, $xRy = 0$ implique que $e(x)e(y) = 0$ [Ka, théorèmes 9 et 13].

THÉORÈME 5. Un anneau de Baer semi-premier est normal.

DÉMONSTRATION. De la démonstration qui précède, $xRy = 0$ implique que $e(x)e(y) = 0$. Nous avons maintenant $e(x), e(y) \in Z(R)$, le centre de R , qui est de Baer et par conséquent normal. Ainsi $Z(R) = \text{Ann } e(x) + \text{Ann } e(y)$ de sorte

que $1 = u + v$, où $u, v \in Z(R)$ et $ue(x) = ve(y) = 0$. Par conséquent, $uRxR = Ru x R = Rue(x)xR = 0$ et $vRyR = 0$. Donc, $1 \in \text{Ann}_R RxR + \text{Ann}_R RyR$.

Etant donné que d'après [Ki, théorème 10.1], tout anneau semi-premier commutatif peut être inclus dans un anneau de Baer, nous remarquons que cela signifie que chaque anneau semi-premier commutatif peut être inclus dans un anneau normal.

THÉOREME 6. *Si R est un anneau dans lequel tous les fibres de Pierce sont des anneaux premiers, alors R est normal.*

DÉMONSTRATION. Soit $B(R)$ l'anneau possédant des idempotents centraux dans R . Si M est un idéal maximal de R , $M \cap B(R)$ est premier et donc maximal dans l'anneau booléen $B(R)$. Par hypothèse, l'extension $R[M \cap B(R)]$ est première dans R . En outre, elle est l'idéal premier minimal unique dans M , car si P est un idéal premier minimal et $P \subset M$, alors $P \cap B(R) \subseteq M \cap B(R)$, l'égalité existant puisque $B(R)$ est booléen. Conséquemment, $R[M \cap B(R)] = R[P \cap B(R)] \subseteq P$ et l'égalité existe en raison de la minimalité de P .

Soit $J_{n \times n}$ l'ensemble de $n \times n$ matrices avec des coefficients dans $J \subseteq R$, RG l'anneau de groupe de R sur le groupe G et $R[x]$ l'anneau des polynômes dans une indéterminée commutante x .

PROPOSITION 4. (a) R est normal ssi $R_{n \times n}$ est normal.

(b) $R[x]$ normal implique que R est normal.

(c) RG normal implique que R est normal.

DÉMONSTRATION. (a) L'ensemble réticulé des idéaux dans $R_{n \times n}$ est isomorphe par rapport à celui dans R , de telle façon que chaque idéal dans $R_{n \times n}$ est de la forme $J_{n \times n}$ pour J idéal de R ; de plus, $P_{n \times n}$ est premier ssi P est premier dans R . Le résultat découle donc du Théorème 4 (c).

(b) si $aRb = 0$, alors $aR[x]b = 0$, de sorte que

$R[x] = \text{Ann}_{R[x]} R[x]aR[x] + \text{Ann}_{R[x]} R[x]bR[x]$. En posant $1 = p(x) + q(x)$, on

montre que $1 = p_0 + q_0$ où ces derniers sont les termes constants de $p(x)$ et de $q(x)$ respectivement. De plus, $p(x) \in \text{Ann}_{R[x]} R[x]aR[x]$ implique que $p_0 \in \text{Ann}_R RaR$.

(c) Si $aRb = 0$, $aRb = 0$ et ainsi $RG = \text{Ann}_{RG} RGaRG + \text{Ann}_{RG} RGbRG$ et, en posant $1 = \sum x_g g + \sum y_g g$, on arrive à $1 = x_0 + y_0$ avec $x_0 \in \text{Ann}_R RaR$, $y_0 \in \text{Ann}_R RbR$.

Nous concluons avec quelques résultats et remarques portant sur des catégories spéciales d'anneaux commutatifs. Rappelons qu'un idéal I est qualifié de dense si $\text{Ann } I = 0$ [L, p. 37]. Nous remarquons en premier lieu que n'importe quel idéal I qui contient strictement un idéal pseudo-premier J est dense, car si $x \in I \setminus J$ et $yI = 0$, alors $yx = 0$, de sorte que $y \in J \subset I$ et $y^2 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse qu'il est semi-premier.

THÉOREME 7. Soit R un anneau noethérien (semi-premier) commutatif.

(a) Si $I^2 = I$, I ne contient pas strictement un idéal pseudo-premier.

(b) Tout idéal pseudo-premier non-premier est dense.

(c) Si I est pseudo-premier et non sur-premier, alors $I \supseteq \text{Ann } P_i$, où les P_i sont les (nombreux) idéaux premiers minimaux (finis) dans R . Par conséquent, si R possède précisément deux idéaux premiers minimaux, tout idéal pseudo-premier est sur-premier.

DÉMONSTRATION. (a) Si $I^2 = I$, alors en appliquant le Lemme 2 de [Z et S, p. 215], il existe un $z \in I$ tel que $(1 - z)I = 0$. Par conséquent, I n'est pas dense et ainsi, en vertu de la remarque précédente, I ne contient pas strictement un idéal pseudo-premier.

(b) Supposons que I est pseudo-premier et non premier. Alors I possède une décomposition primaire $I = \bigcap Q_i$, où les Q_i ont des radicaux premiers P_i qui satisfont la relation $P_i^n \subset Q_i \subset P_i$ pour un n donné. Puisque tous les $P_i \not\subset I$, chaque P_i est dense et par conséquent chaque P_i^n est dense. En outre, puisque $I \supset \bigcap P_i^n$, I est aussi dense.

(c) Si I est pseudo-premier et non sur-premier, alors pour chaque idéal premier minimal P_i , $I \not\subset P_i$ et $P_i \cdot \text{Ann } P_i = 0$ implique que $\text{Ann } P_i \subset I$ pour tous les i et ainsi $\bigcup \text{Ann } P_i \subset I$. Si I possède exactement deux idéaux premiers minimaux P_1 et P_2 , alors étant donné que R est semi-premier, $P_1 P_2 \subset P_1 \cap P_2 = 0$ de sorte que $P_1 \subset \text{Ann } P_2$. Ainsi I étant pseudo-premier non sur-premier implique que $I \supset \text{Ann } P_2 \supset P_1$, une contradiction.

A noter qu'il n'est pas nécessaire que tout idéal primaire dans un anneau noethérien soit sur-premier. Par exemple, supposons que R possède un idéal maximal M tel que $M^n = (0)$. Maintenant chaque M^n est un idéal primaire, mais puisque R ne possède que des idéaux premiers minimaux finis, tous les M^n ne peuvent pas être sur-premiers.

PROPOSITION 5. Si $R \subset S$ est une extension intégrale des anneaux commutatifs et S est normal, alors R l'est aussi.

DÉMONSTRATION. Soit P_1 et P_2 les idéaux premiers minimaux de R contenus dans l'idéal premier P_3 de R . En vertu des propriétés bien connues du comportement des idéaux premiers dans les extensions intégrales (voir [ZS, pp. 257-259]), il existe des idéaux premiers Q_i dans S tels que $Q_i \cap R = P_i$, $i = 1, 2, 3$, et les Q_i sont minimaux dans S pour $i = 1, 2$. De plus, puisque S est normal, $Q_1 = Q_2$ ce qui oblige $P_1 = Q_1 \cap R = Q_2 \cap R = P_2$.

Enfin, dans le cas des anneaux ordonnés réticulés commutatifs, mentionnons que pour l'ensemble des f -algèbres archimédiennes A , A est normal ssi tout idéal est local [H de P, proposition 6.3]. De plus, si A est uniformément complet, ces conditions sont équivalentes à un A bézoutien [H de P, théorème 6.6].

Remerciements

Les auteurs remercient le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie de son support financier au cours de la préparation du présent document.

Références

- [D] DYRE, J., *Non-standard characterizations of ideals in $C(X)$* , Math. Scand. 50 (1982), 44-54.
- [G] GILLMAN, L., *Rings with Hausdorff structure space*, Fund. Math. 45 (1957), 1-16.
- [GJ] GILLMAN, L. and JERISON, M., *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, New York, 1960.
- [GK] GILLMAN, L. and KOHLS, C., *Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions*, Math. Zeitschr. 72 (1960), 399-409.
- [H] HUIJSMANS, C.B., *Some analogies between commutative rings, Riesz spaces and distributive lattices with smallest element*, Proc. Nederl. Akad. Wetensch. A77 (Indag. Math. 36) (1974), 132-147.
- [H de P] HUIJSMANS, C.B. and de PAGTER, B., *Ideal theory in f -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 269 (1982), 225-245.
- [Ka] KAPLANSKY, I., *Rings of Operators*, W.A. Benjamin, New York, 1968.
- [Ki] KIST, J., *Minimal prime ideals in commutative semi-groups*, Proc. London Math. Soc. (3), 13 (1963), 31-50.
- [L] LAMBEK, J., *Lectures on Rings and Modules*, Chelsea, New York, 1976.
- [S] SUBRAMANIAN, H., *ℓ -prime ideals in f -rings*, Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 193-203.
- [T] THIERRIN, G., *Sur les idéaux complètement premiers d'un anneau quelconque*, Bull. Acad. Royale Belg. 43 (1957), 124-132.
- [Z & S] ZARISKI, O. and SAMUEL, P., *Commutative Algebra*, Vol. I, Van Nostrand, Princeton, 1958.

Université du Nouveau-Brunswick
Fredericton, Nouveau-Brunswick
Canada E3B 5A3

Université Concordia
Montréal, Québec
Canada H3G 1M8

Manuscrit reçu le 1^{er} octobre 1984.
Révisé le 21 novembre 1984.