

QUELQUES ESPÈCES SUR LES ENSEMBLES DE PETITE CARDINALITÉ

Jacques Labelle¹

Résumé

On sait que toute espèce de structures (au sens combinatoire de [3]) se décompose comme somme d'espèces dites *moléculaires* (c.-à-d. indécomposables pour la somme) et que ces espèces sont elles-mêmes des produits d'espèces dites *atomiques* (c.-à-d. indécomposables pour le produit). Afin d'entreprendre l'étude systématique des espèces sur les petites cardinalités, nous dressons donc la liste complète de toutes les espèces moléculaires (et atomiques) sur les cardinalités jusqu'à cinq. Nous en faisons une analyse assez détaillée et donnons, en particulier, le type, la cardinalité, le rang, la dérivée et la série indicatrice des cycles de chacune d'elles. Certains exemples, contre-exemples, propriétés et identités spéciales à propos de ces exemples sont aussi explicités en cours de route. Nous terminons en disant quelques mots du cas multi-sortes. En résumé, ce travail se veut avant tout un texte de référence concernant la combinatoire des espèces quelconques portées par au plus cinq éléments.

1. Rappels sur les G-ensembles

Soit X un ensemble muni d'une G -action ($\rho : G \times X \rightarrow X$) du groupe G . On dit alors tout aussi bien que G agit sur X , que X est un G -ensemble, que

¹ Travail fait dans le cadre de la subvention FCAC EQ 1608, ministère de l'Éducation du Gouvernement du Québec, et de la subvention CRSNG A 5660 du Gouvernement du Canada.

X est une *représentation ensembliste* de G ou que l'homomorphisme associé $G \rightarrow S_X$ est une représentation de G comme groupe de permutations de X .

Lorsque G et X sont finis (et ce sera le cas à partir de maintenant) l'action ρ peut être représentée géométriquement par le multigraphe orienté obtenu en prenant, $\forall x \in X$, un sommet x et, $\forall g \in G$, une flèche indicée g de x à gx . Bien sûr, dans ce multigraphe l'ensemble des boucles en x correspond au stabilisateur G_x de x et les composantes connexes correspondent aux orbites de ρ . L'action est dite *connexe* (ou *transitive*) si elle admet une seule orbite. Deux G -ensembles sont *isomorphes* (on dit aussi qu'ils ont le même *type*) si et seulement si leurs multigraphes sont isomorphes.

Il est bien connu (lemme de Burnside) que l'orbite de x contient $|G|/|G_x|$ éléments et que le nombre d'orbites est donné (théorème de Burnside) par l'expression:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Fix } g$$

où $\text{Fix } g = |\{x \in X \mid gx = x\}|$.

Lorsque l'action est connexe, son *rang* est le nombre d'orbites (indépendant de x) de l'action restreinte de G_x sur X . On voit facilement [11] que le rang est donné par l'expression:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\text{Fix } g)^2.$$

Il y a bijection entre les types d'actions connexes de G et les classes de conjugaison de sous-groupes de G . En effet, à toute action connexe $\rho : G \times X \rightarrow X$ on peut associer l'ensemble $\{G_x \mid x \in X\}$. Réciproquement si H est un sous-groupe de G alors le type de l'action canonique de G sur G/H ne dépend que de la classe de conjugaison du sous-groupe H . Il découle de ceci que pour G donné, il n'y a qu'un nombre fini (notons-le μ_G) de types d'actions connexes de G . Notons de plus que $|X|$ divise $|G|$ pour tout G -ensemble connexe X .

Au début du vingtième siècle, le mathématicien anglais A. Cayley a entrepris l'étude de l'important cas où G est le groupe symétrique S_n de degré n . Plus tard, les chimistes A.C. Lunn et J.K. Senior ont utilisé ses travaux dans [9] où l'on peut trouver les premières valeurs des nombres $\mu_n = \mu_{S_n}$ ainsi que de nombreuses listes de sous-groupes de S_n . La suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ est la suite 477 du livre de N.J.A. Sloane [14] et ses premières valeurs sont: 1, 1, 2, 4, 11, 19, 56, 96, 296, 554, 1593, 3093.

2. Rappels sur la théorie des espèces

Nous utiliserons la théorie combinatoire des espèces de structures introduite par André Joyal [3] (voir également [5] et [8]). Rappelons seulement qu'une espèce T est un foncteur du groupoïde $\mathcal{B}$ (c.-à-d. la catégorie des ensembles finis avec bijections) dans la catégorie Ens_f des ensembles finis avec fonctions.

Si S et T sont des espèces alors $S + T$, $S \cdot T$ et $S \circ T$ (si $T[\emptyset] = \emptyset$) dénotent leur somme, produit et substitution respectivement.

Notons respectivement 0 , 1 , X , E , $E^\bullet$, $E^\pm$, C et L les espèces *vide*, *ensemble vide*, *singleton*, *ensemble*, *ensemble pointé*, *ensemble orienté*, *permutation cyclique* et *ordre linéaire*. De plus, si T est une espèce, notons T_n l'espèce obtenue en restreignant T aux ensembles de cardinalité n :

$$T_n[U] = \begin{cases} T[U] & \text{si } |U| = n \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $E_0 = 1$, $E_1 = X$, $E_2^\pm = I_2$ et $E_3^\pm = C_3$. De plus, pour $n \geq 1$, $E_n^\bullet = X \cdot E_{n-1}$ et $L_n = X^n$.

Voici quelques précisions concernant l'espèce $S = mT$ où $m \geq 1$. Bien sûr S est la somme de m copies de T ; pour tout U fini, $S[U]$ est donc la réunion disjointe de m copies de $T[U]$. Il est commode de penser à une S -structure s comme étant une T -structure munie d'une étiquette i , $1 \leq i \leq m$, (ou encore coloriée d'une $i^{\text{ième}}$ couleur) indiquant de laquelle des m copies de $T[U]$

elle provient. Notez cependant que lorsqu'on transporte s le long d'une bijection $f : U \rightarrow V$ l'étiquette demeure inchangée. Notez également que mT est un produit d'espèces. En effet, il suffit de penser à m comme étant l'espèce définie par

$$m[U] = \begin{cases} \{1, 2, \dots, m\} & \text{si } U = \emptyset \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espèce M est dite *moléculaire* si $M = S + T$ implique $S = 0$ ou $T = 0$. Comme toute espèce A admet la décomposition $A = \sum_{n \geq 0} A_n$, une espèce moléculaire est nécessairement concentrée sur une seule cardinalité. Soit n cette cardinalité et U un ensemble à n éléments. L'ensemble $A[U]$ est par définition muni de l'action du groupe symétrique S_U définie par

$$(\sigma, a) \mapsto A[\sigma](a) .$$

Dire que A est moléculaire revient à dire que cette action est connexe. En particulier pour $U = n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ on obtient une action connexe de S_n sur $A[n]$ dont le multigraphe associé peut être grandement simplifié comme suit. Il est bien connu ([11]) que les transpositions, $s_i = (0, i)$, $1 \leq i \leq n-1$, constituent un ensemble de générateurs de S_n satisfaisant aux relations: $s_i^2 = I$, $(s_i s_{i+1})^3 = I$ et $(s_i s_{i+1} s_i s_j)^2 = I$, où $1 \leq i, j \leq n-1$, $j \neq i$, $j \neq i+1$ et $i+1$ est pris modulo $n-1$. Plaçons donc en chaque sommet $a \in A[n]$, plutôt que $n!$ flèches, seulement $n-1$ arêtes (l'arête d'indice i , $1 \leq i \leq n-1$, joignant a à $A[s_i](a)$) dont certaines peuvent être des boucles. Ce multigraphe (non orienté), lorsqu'on oublie la nature de ses sommets, s'appelle le *type* de l'espèce A où A peut être une espèce quelconque concentrée sur la cardinalité n . Par exemple, la Figure 1 montre la construction du type de l'espèce $X \cdot C_3$ qui apparaît dans la Figure 10 plus loin. (Le lecteur trouvera également dans [6], Figure 1, l'exemple de l'espèce P_4^{bic} que nous décrivons à la Remarque B2.)

Il est facile de voir que pour toute espèce A , concentrée en cardinalité n , le type de A' (l'espèce *dérivée* de A) s'obtient de celui de A en effaçant toutes les arêtes d'indice $n-1$ (sauf si $n = 0$).

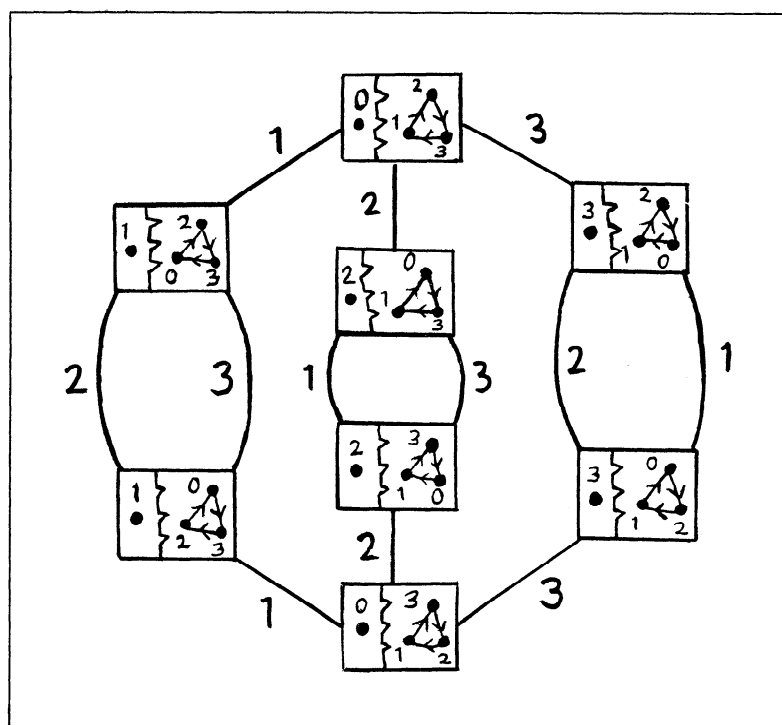


Figure 1

Notez que le type de A pourrait également se représenter en choisissant les générateurs $\tau_i = (i, i+1)$, $0 \leq i \leq n-1$, de S_n . On pourrait également se contenter de ne placer en chaque sommet qu'une arête et une flèche correspondant à l'action des deux générateurs $(0,1)$ et $(0,1,2,\dots,n-1)$ de S_n . Ce dernier modèle, bien que moins chargé, est moins symétrique et ne permet pas de voir facilement le type de A' à partir de celui de A .

Le but des deux prochaines sections est de trouver des modèles concrets d'espèces réalisant tous les types d'espèces moléculaires concentrées sur la cardinalité n pour $n \leq 5$.

Pour $n \leq 4$, ceci a été fait par Hélène Décoste et Gilbert Labelle [6]. La Figure 10 (qui leur est due) donne la liste complète (à isomorphisme près) des 19 espèces moléculaires sur quatre points ou moins.

Comme eux, notons $M_n^{(i)}$ la $i^{\text{ème}}$ espèce moléculaire sur n points.

Pour n fixe, les espèces sont ordonnées suivant l'ordre croissant de leur "cardinalité" (nombre de structures).

Toute espèce T , concentrée sur n points, peut s'écrire de façon unique (à isomorphisme près) sous la forme

$$T = \sum_{i=1}^u c_i M_n^{(i)} \quad \text{où } c_i \in \mathbb{N}.$$

C'est la *décomposition moléculaire* de l'espèce T . Par exemple, si A est l'espèce *arbre*, il est facile de voir que A_4 est isomorphe à $X \cdot E_3 + E_2 \circ L_2$. La décomposition moléculaire de S_n (S étant l'espèce *permutation*) est donnée à la Remarque A5.

Une espèce moléculaire M est dite *atomique* si $M = S \cdot T$ implique $S = 1$ ou $T = 1$. Yeh a démontré récemment [13] que toute espèce moléculaire M peut de façon unique (à isomorphisme et ordre près des facteurs) s'écrire comme produit d'espèces atomiques.

Au cours de la construction des espèces moléculaires sur cinq points et moins nous nous efforcerons donc d'explicitier la décomposition atomique de chaque espèce.

3. Construction d'espèces

Parlons maintenant d'une importante construction permettant de "quotienter" les espèces.

Nous dirons que le groupe fini G agit de façon naturelle sur l'espèce T si on a un homomorphisme de G dans $\text{Aut}(T)$, le groupe des équivalences (ou automorphismes) naturelles du foncteur T sur lui-même. Ceci veut dire que pour tout ensemble fini U , on a une action $\rho_U : G \times T[U] \rightarrow T[U]$, de sorte que, pour toute bijection $f : U \rightarrow V$ le carré suivant commute:

$$\begin{array}{ccc}
 G \times T[U] & \xrightarrow{\rho_U} & T[U] \\
 1_G \times T[f] \downarrow & & \downarrow T[f] \\
 G \times T[V] & \xrightarrow{\rho_V} & T[V]
 \end{array}$$

On peut alors quotienter l'espèce T par G pour obtenir l'espèce T/G définie par $(T/G)[U] = T[U]/G$. Une (T/G) -structure sur U est donc l'orbite (par l'action ρ_U) d'une T -structure sur U .

En particulier, la donnée d'une action naturelle de $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ sur T équivaut à la donnée d'un automorphisme naturel θ de T tel que $\theta^k = 1_T$. Par exemple, pour l'automorphisme naturel $\theta : L_k \rightarrow L_k$ défini par $\theta_U(u_1, u_2, \dots, u_k) = (u_k, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$, où $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, on obtient l'espèce quotient $L_k/\mathbb{Z}_k$ isomorphe à C_k . Plus simplement, $\forall n \geq 3$, l'automorphisme involutif $\theta : C_n \rightarrow C_n$, défini par $\theta(\sigma) = \sigma^{-1}$, permet de construire l'espèce $C_n/\mathbb{Z}_2 = P_n$ appelée l'espèce *polygone à n côtés*.

REMARQUE. Si H est un sous-groupe de S_n , alors l'espèce moléculaire associée à la classe de conjugaison de H est, à isomorphisme près, $\mathbb{B}([n], -)/H$ où l'action naturelle de H sur l'espèce $\mathbb{B}([n], -)$ est évidente. Une $\mathbb{B}([n], -)/H$ structure sur U (où $|U| = n$) est donc une bijection (à l'action de H près) de $[n]$ sur U . On peut également obtenir un modèle de cette espèce moléculaire en quotientant plutôt l'espèce L_n par l'action de H obtenue en permutant les éléments des ordres totaux (voir par exemple la Remarque A3) dans la section qui suit).

4. Recensement des espèces moléculaires

Le lecteur trouvera dans les Tableaux A, B et C, qui suivent, des modèles concrets pour toutes les espèces moléculaires sur n points ($n \leq 5$) ainsi que de nombreuses données s'y rattachant. Le Tableau A concerne les cardinalités 0, 1, 2 et 3; les Tableaux B et C, les cardinalités 4 et 5 respectivement. Dans chaque tableau, la troisième colonne donne la cardinalité de l'espèce (par abus de langage $|M[n]|$), la quatrième colonne le "rang de l'espèce" (considérée comme action

connexe de S_n) et la cinquième colonne la dérivée de l'espèce. Un crochet dans la sixième colonne indique que l'espèce est atomique. Dans la partie droite des tableaux, sous l'expression $1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ où $\sum d_i = n$, on trouve en i ème case le nombre de $M_n^{(i)}$ -structures sur $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ laissées fixes par une quelconque permutation σ de type $1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ (c.-à-d. ayant d_i cycles de longueur i). Toujours dans la colonne $1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$, au bas du tableau, on trouve le nombre d'éléments de S_n de ce type. Par le théorème de Burnside, le produit scalaire de la ligne au bas d'un tableau avec la partie droite de la i ème ligne donne toujours $n!$. Rappelons [3] que si T est une espèce quelconque, sa série indicatrice des cycles, Z_T , est la série à une infinité de variables $x_1, x_2, \dots$ définie par:

$$Z_T(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\sum d_i = n} \text{Fix}_T(\sigma) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots n^{d_n} d_n!}$$

où, dans la deuxième somme, σ est une permutation quelconque de type $1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ sur n et $\text{Fix}_T(\sigma)$ est le nombre de T -structures sur $\{0, 1, \dots, n-1\}$ laissées fixes par σ . La série indicatrice des cycles de chacune des espèces se lit donc facilement à partir des tableaux.

Dans ce qui suit, les Remarques Ai), Bi) et Ci) se rapportent aux Tableaux A, B et C respectivement.

Tableau A

	i	$M_n^{(i)}$	card	rang	dérivée	atom.	série indicatrice		
n=0	1	E_0	1	1	0		1		
n=1	1	X	1	1	E_0	✓	x_1		
n=2	1	E_2	1	1	X	✓	1^2	2^1	1
	2	L_2	2	2	$2X$		2		0
n=3	1	E_3	1	1	E_2	✓	1^3	$1^1 \cdot 2^1$	3^1
	2	C_3	2	2	L_2	✓	2	0	2
	3	E_3	3	2	$E_2 + L_2$		3	1	0
	4	L_3	6	6	$3L_2$		6	0	0
nombre de permutations:							1	3	2

REMARQUES.

A1) Les espèces $L_3 + 2E_3$ et $C_3 + 2E_3$ ne sont évidemment pas isomorphes (voir leur type à la Figure 2), cependant elles ont la même série indicatrice des cycles, soit $\frac{4}{3}x_1^3 + x_1x_2 + \frac{2}{3}x_3$. Existe-t-il deux espèces moléculaires non isomorphes ayant même série indicatrice?

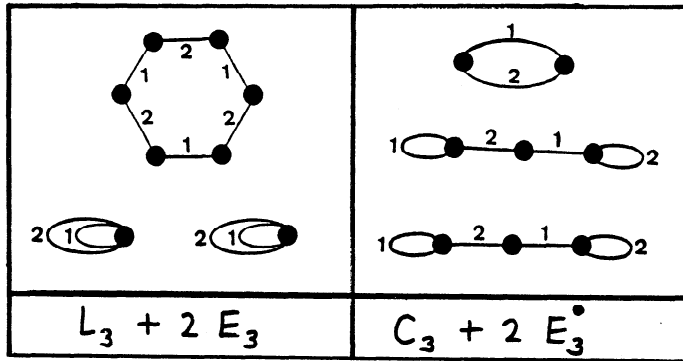


Figure 2

A2) Un isomorphisme possible entre C'_n et L_{n-1} est décrit par la Figure 3 où $n = 5$.

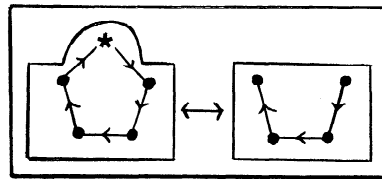


Figure 3

A3) Tout sous-groupe de S_n agit de façon naturelle sur $L_n = X^n$ en permutant les facteurs. On peut donc définir l'espèce E_n^+ comme l'espèce quotient L_n/A_n où A_n est le groupe alterné de degré n .

A4) Pour une espèce non atomique, $M = S \cdot T$, le calcul de la dérivée se fait facilement grâce à la bonne vieille formule: $M' = S' \cdot T + S \cdot T'$. On peut aussi identifier le type de M' en enlevant du type de $M = M_n$ toutes les arêtes (et boucles) d'indice $n-1$. Une troisième façon de procéder est de trouver un isomorphisme explicite entre M' et l'espèce correspondante apparaissant en cinquième colonne.

A5) Soit $\mathcal{S}$ l'espèce permutation. Il est bien connu ([3], [8]) que $\mathcal{S}$ et L sont équipotentes sans être isomorphes. En fait, $\forall n$, $\mathcal{S}_n$ est somme de

p_n (nombre de partages de n) espèces moléculaires. Plus précisément, il est facile de voir que la décomposition moléculaire de $\mathcal{S}_n$ est:

$$\mathcal{S}_n = \sum \prod_{i=1}^n E_{d_i} \circ C_i$$

où la somme s'étend sur les $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_i \geq 0$ et $\sum d_i = n$.

Tableau B ($n = 4$)

i	$M_n^{(i)}$	card	rang	dérivée	atom.	1^4	$1^2 \cdot 2^1$	$1^1 \cdot 3^1$	2^2	4
1	E_4	1	1	E_3	✓	1	1	1	1	1
2	$E_4^\pm$	2	2	$E_3^\pm$	✓	2	0	2	2	0
3	$E_2 \circ E_2$	3	2	$E_3^\bullet$	✓	3	1	0	3	1
4	$E_4^\bullet$	4	2	$E_3 + E_3^\bullet$		4	2	1	0	0
5	$E_2 \bullet E_2$	6	3	$2E_3^\bullet$		6	2	0	2	0
6	P_4^{bic}	6	6	L_3	✓	6	0	0	6	0
7	C_4	6	3	L_3	✓	6	0	0	2	2
8	$X \cdot C_3$	8	4	$C_3 + L_3$		8	0	2	0	0
9	$L_2 \cdot E_2$	12	7	$2E_3^\bullet + L_3$		12	2	0	0	0
10	$E_2 \circ L_2$	12	8	$2L_3$	✓	12	0	0	4	0
11	L_4	24	24	$4L_3$		24	0	0	0	0

nombre de permutations: 1 6 8 3 6

B1) Pour une espèce obtenue par substitution, $M = S \circ T$, la formule de dérivation en chaîne est disponible,

$$M' = (S' \circ T) \cdot T'.$$

B2) L'espèce p_n^{bic} est l'espèce "polygone à n côtés bicolorés". Plus précisément, nous disposons de deux couleurs (la première représentée par un trait gras et la seconde par un trait fin) et une p_n^{bic} -structure sur U , $|U| = n$, est un polygone ayant U comme ensemble de sommets et dont les arêtes sont coloriées avec les deux couleurs de sorte que deux arêtes incidentes ne soient jamais de la même couleur. Les arêtes grasses (de même que les fines) forment donc un facteur linéaire du graphe simple qu'est le polygone ([2], [7]). En particulier, p_4^{bic} est l'espèce "carré bicoloré" dont le type apparaît dans la Figure 10. Un isomorphisme entre $(p_4^{\text{bic}})'$ et L_3 est décrit par la Figure 4.

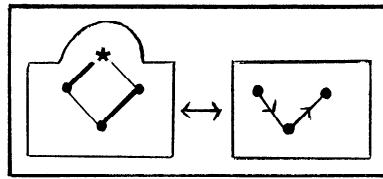


Figure 4

Il est intéressant de noter que les espèces p_4^{bic} et C_4 , bien que non isomorphes, ont des dérivées toutes deux isomorphes à L_3 (plus généralement, on a $(p_{2n}^{\text{bic}})' \cong L_{2n-1} \cong C_{2n}'$). Ce dernier fait a été utilisé par G. Labelle pour démontrer une partie du très joli Théorème A de [6] sur la non-unicité de la solution combinatoire d'un système différentiel dont nous citons un cas particulier à la section 6.

Tableau C (n = 5)

i	$M_n^{(1)}$	card	rang	dérivée	atom.	1^5	$1^3 \cdot 2^1$	$1^2 \cdot 3^1$	$1^1 \cdot 4^1$	$1^1 \cdot 2^2$	$2^1 \cdot 3^1$	5
1	E_5	1	1	E_4	✓	1	1	1	1	1	1	1
2	E_5^+	2	2	E_4^+	✓	2	0	2	0	2	0	2
3	E_5^*	5	2	$E_4 + E_4^*$		5	3	2	1	1	0	0
4	P_5/Z_2	6	2	C_4	✓	6	0	0	2	2	0	1
5	$X \cdot E_4^+$	10	4	$E_4^+ + X \cdot E_3^+$		10	0	4	0	2	0	0
6	$E_2 \cdot E_3$	10	3	$E_4^* + E_2 \cdot E_2$		10	4	1	0	2	1	0
7	P_5	12	4	$E_2 \circ L_2$	✓	12	0	0	0	4	0	2
8	$X \cdot (E_2 \circ E_2)$	15	4	$E_2 \circ E_2 + L_2 \cdot E_2$		15	3	0	1	3	0	0
9	$L_2 \cdot E_3$	20	7	$2E_4^* + L_2 \cdot E_2$		20	6	2	0	0	0	0
10	$E_2 \cdot C_3$	20	5	$X \cdot C_3 + L_2 \cdot E_2$		20	2	2	0	0	2	0
11	$(L_2 \cdot C_3)/Z_2$	20	6	$X \cdot C_3 + E_2 \circ L_2$	✓	20	0	0	0	4	2	0
12	C_5	24	8	L_4	✓	24	0	0	0	0	0	4
13	$X \cdot E_2 \cdot E_2$	30	11	$E_2 \cdot E_2 + 2L_2 \cdot E_2$		30	6	0	0	2	0	0
14	$X \cdot P_4^{bic}$	30	12	$L_4 + P_4^{bic}$		30	0	0	0	6	0	0
15	$X \cdot C_4$	30	9	$L_4 + C_4$		30	0	0	2	2	0	0
16	$L_2 \cdot C_3$	40	16	$L_4 + 2X \cdot C_3$		40	0	4	0	0	0	0
17	$E_2 \cdot L_3$	60	33	$L_4 + 3L_2 \cdot E_2$		60	6	0	0	0	0	0
18	$X \cdot (E_2 \circ L_2)$	60	32	$2L_4 + E_2 \circ L_2$		60	0	0	0	4	0	0
19	L_5	120	120	$5L_4$		120	0	0	0	0	0	0

nombre de permutations:

1 10 20 30 15 20 24

C1) L'espèce P_5 est munie d'un automorphisme naturel involutif θ (Figure 5) qui consiste à envoyer un cycle de longueur cinq sur U , $|U| = 5$, dans son complémentaire qui (accidentellement) est aussi un cycle de longueur cinq sur H .

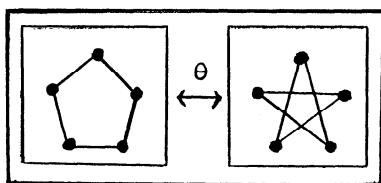


Figure 5

L'espèce $M_5^{(4)}$ est $P_5/\mathbb{Z}_2$ où l'action de $\mathbb{Z}_2$ est celle définie par θ . Une $(P_5/\mathbb{Z}_2)$ -structure sur U , $|U| = 5$, peut également se définir comme une 2-factorisation ([2], [7]) du graphe complet K_U . Un isomorphisme possible entre $(P_5/\mathbb{Z}_2)'$ et C_4 est décrit par la Figure 6.

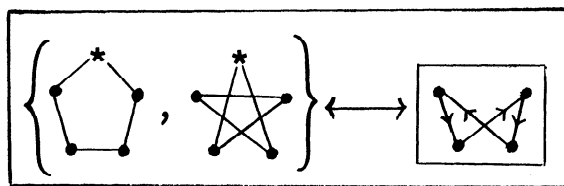


Figure 6

C2) La remarque précédente nous montre que C_4 est intégrable. Quelles sont précisément les valeurs de n pour lesquelles C_n est intégrable? Dans cette direction, on a le résultat suivant:

LEMME. Si $n+1 = p$ est un nombre premier, alors l'espèce C_n est intégrable.

DÉMONSTRATION. Soit a une racine primitive modulo p . Le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_{n+1}^*$ est donc cyclique engendré par a . Considérons l'automorphisme naturel de l'espèce C_{n+1} défini en posant

$$\theta(\sigma) = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_a$$

où $\sigma \in C_{n+1}[V]$ et $|V| = n+1$.

On a $\Theta^n(\sigma) = \sigma^{a^n} = \sigma$ et Θ induit donc une action naturelle de $\mathbb{Z}_n$ sur C_{n+1} .

Soit T l'espèce quotient $C_{n+1}/\mathbb{Z}_n$, alors $T' \cong C_n$. En effet, voici un isomorphisme naturel $\psi : T' \rightarrow C_n$: pour $|U| = n$ et $\alpha \in T'[U] = T[U \cup \{*\}]$, on pose

$$\psi_U[\alpha] = (\sigma(*), \sigma^a(*), \sigma^{a^2}(*), \dots, \sigma^{a^{n-1}}(*))$$

où $\sigma \in C_{n+1}[U \cup \{*\}]$ est un représentant quelconque de α .

Le lecteur peut facilement se convaincre que dans le cas particulier où $n = 4$ et $a = 2$ l'espèce $C_5/\mathbb{Z}_4$ ainsi construite est isomorphe à l'espèce $P_5/\mathbb{Z}_2$ de l'exemple précédent.

REMARQUE. Plus généralement, on montre ([4], [12]) que si $n+1 = q$ est une puissance d'un nombre premier, alors C_n est intégrable. En effet, l'espèce $B(F_q, -)/H$, où F_q est le corps à q éléments et $H = \{ax + b \mid a, b \in F_q, a \neq 0\}$ est le groupe des transformations affines de F_q , admet C_n comme dérivée. De plus, un calcul ad hoc de théorie des groupes [12] permet de démontrer que l'espèce C_5 n'est pas intégrable.

C3) Un isomorphisme entre P'_5 et $E_2 \circ L_2$ est décrit par la Figure 7.

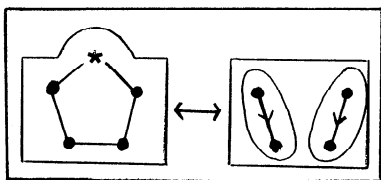


Figure 7

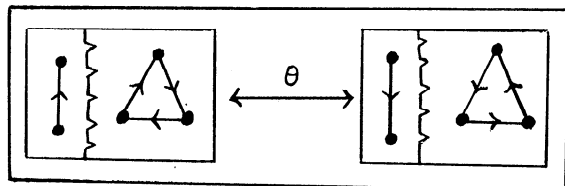


Figure 8

C4) L'espèce $L_2 \cdot C_3$ est munie d'un automorphisme naturel involutif décrit par la Figure 8. L'espèce $M_5^{(11)}$ est $(L_2 \cdot C_3)/\mathbb{Z}_2$ où l'action de $\mathbb{Z}_2$ est celle induite par Θ . Un isomorphisme possible entre $(M_5^{(11)})'$ et

$X \cdot C_3 + E_2 \circ L_2$ est décrit par la Figure 9. Notez que $M_5^{(11)}$ est une espèce atomique dont la dérivée n'est même pas moléculaire. (C'est également le cas de $E_2 \circ L_2$ dont la dérivée est $2L_3$.)

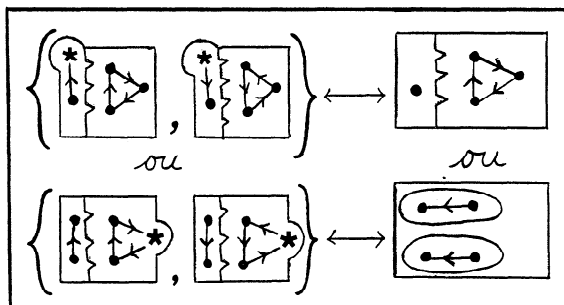


Figure 9

5. Les types des espèces moléculaires

La très jolie Figure 10, due à Hélène Décoste et Gilbert Labelle, donne les types de toutes les espèces moléculaires sur quatre points et moins. La Figure 11 décrit les types de $M_5^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq 7$. On y voit immédiatement, en enlevant les arêtes numérotées quatre, les formules:

$$(P_5/Z_2)' = C_4 \quad \text{et} \quad P_5' = E_2 \circ L_2.$$

La Figure 12 décrit les types de $M_5^{(i)}$ pour $8 \leq i \leq 12$. Encore là, les dérivées de ces cinq espèces (qui apparaissent dans le Tableau C) se retrouvent par suppression des arêtes indicées quatre.

Dans la Figure 12, les types des trois espèces, $L_2 \cdot E_3$, $E_2 \cdot C_3$ et $(L_2 \cdot C_3)/Z_2$, ont été sciemment dessinés sur deux paliers avec un effet de relief. Ainsi, les trois épimorphismes d'espèces, soient $L_2 \cdot E_3 \twoheadrightarrow E_2 \cdot E_3$, $E_2 \cdot C_3 \twoheadrightarrow E_2 \cdot E_3$ et $(L_2 \cdot C_3)/Z_2 \twoheadrightarrow E_2 \cdot E_3$, obtenus dans chaque cas en envoyant une structure dans son découpage sous-jacent, sont mis en évidence (voir le type de $E_2 \cdot E_3$ à la Figure 11). Ces trois épimorphismes sont des genres de "revêtement à deux feuilles" au-dessus de $E_2 \cdot E_3$ dans la catégorie des espèces. De même pour $X \cdot (E_2 \circ E_2)$ qui est un revêtement à trois feuilles de $X \cdot E_4 = E_5^*$.

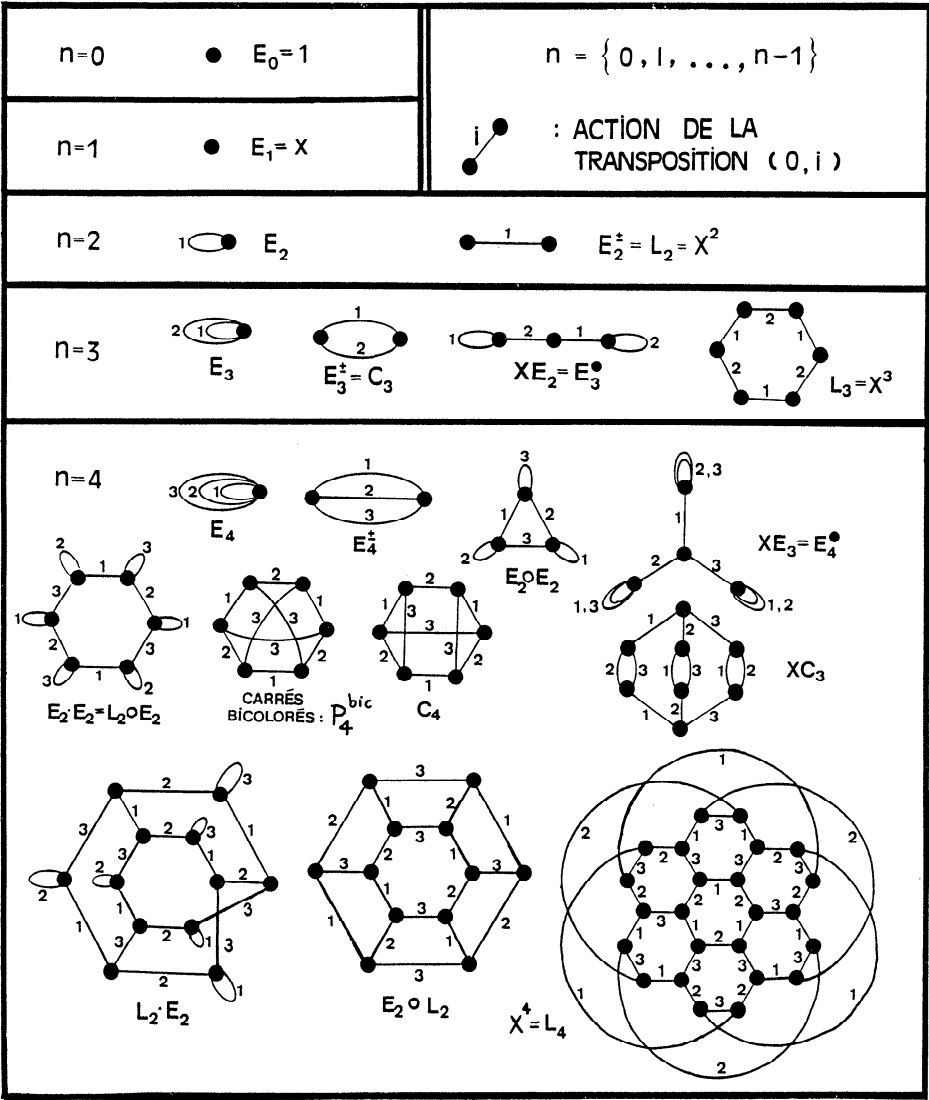


Figure 10

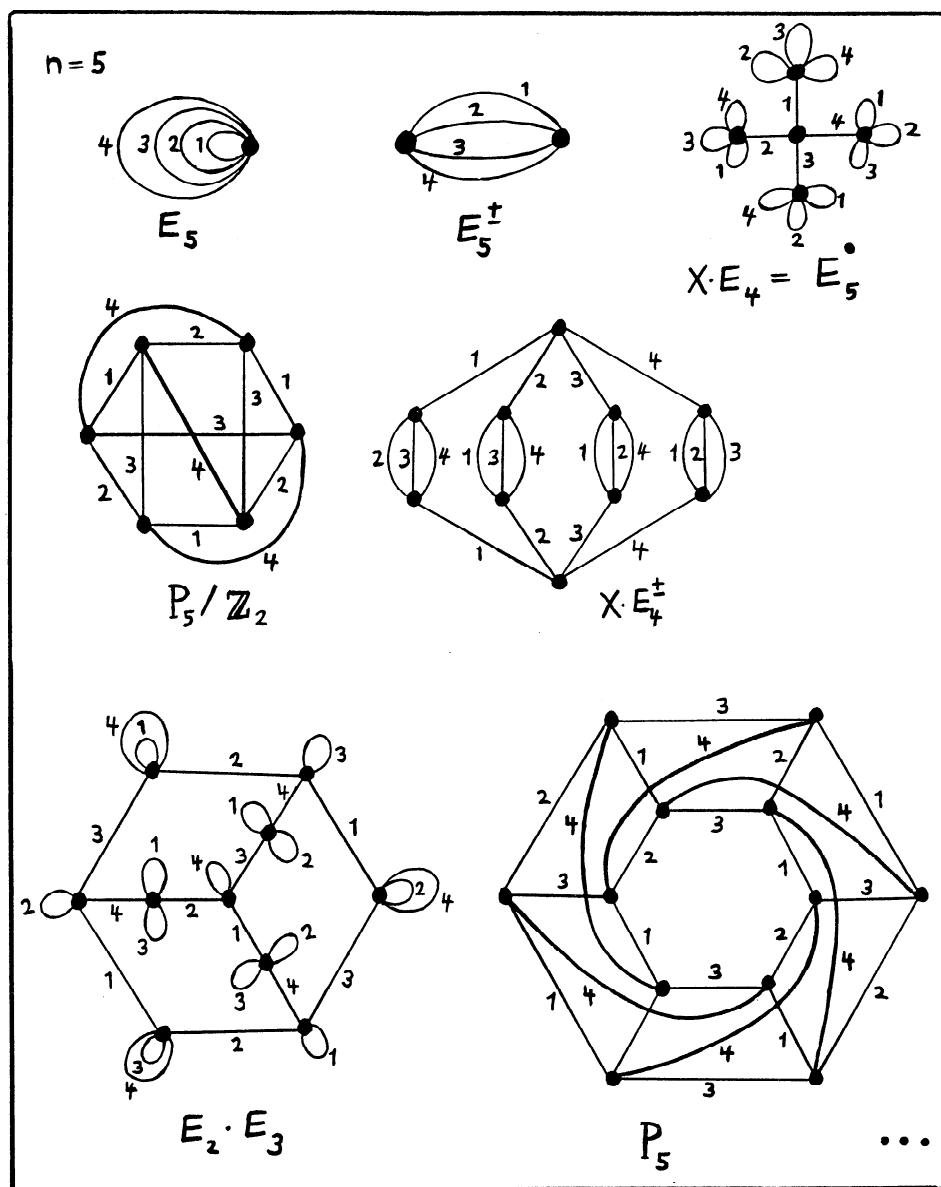


Figure 11

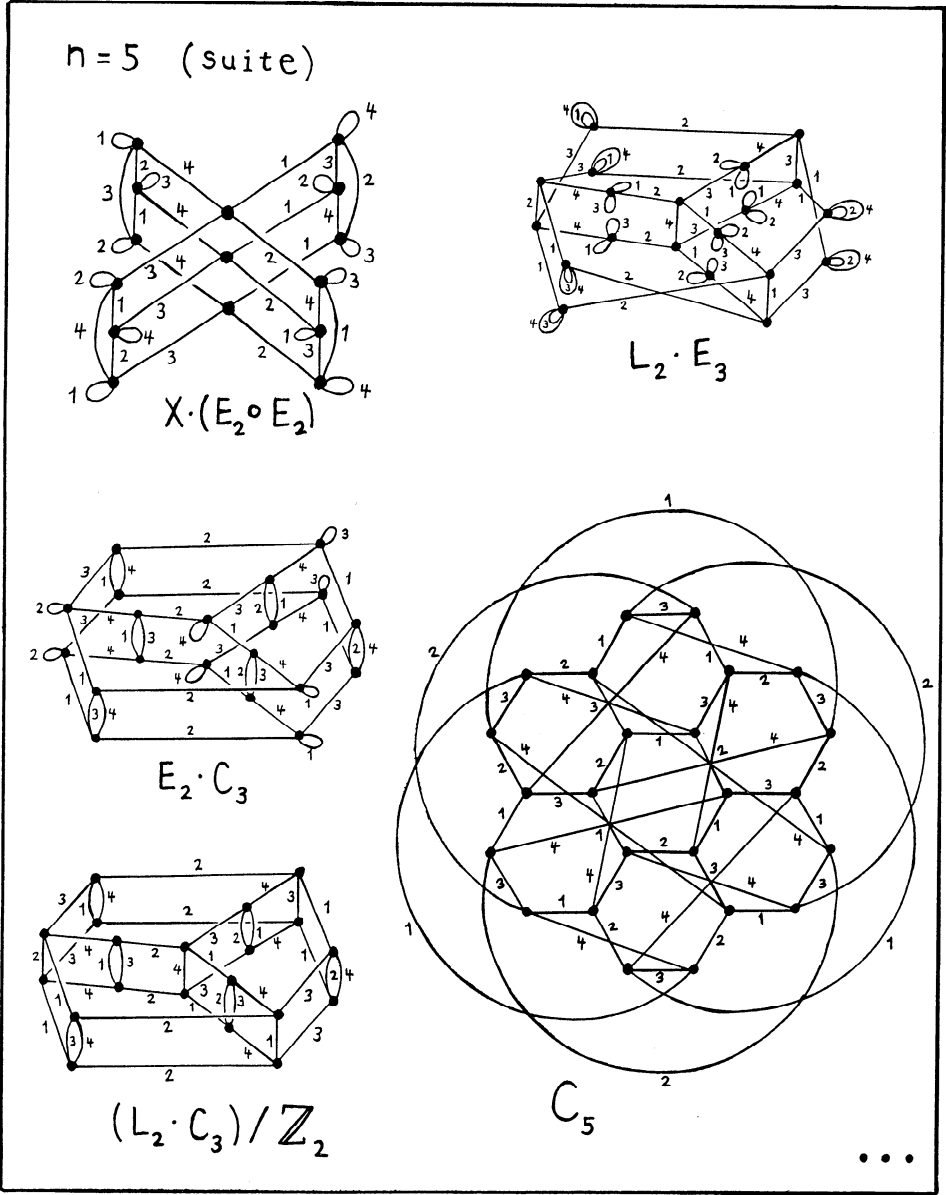


Figure 12

REMARQUE. Il n'y a pas une façon mécanique et canonique de tracer le type d'une espèce. Par exemple, il n'est pas évident que les deux multigraphes apparaissant dans la Figure 13 représentent tous deux le type de l'espèce $(L_2 \cdot C_3)/\mathbb{Z}_2$.

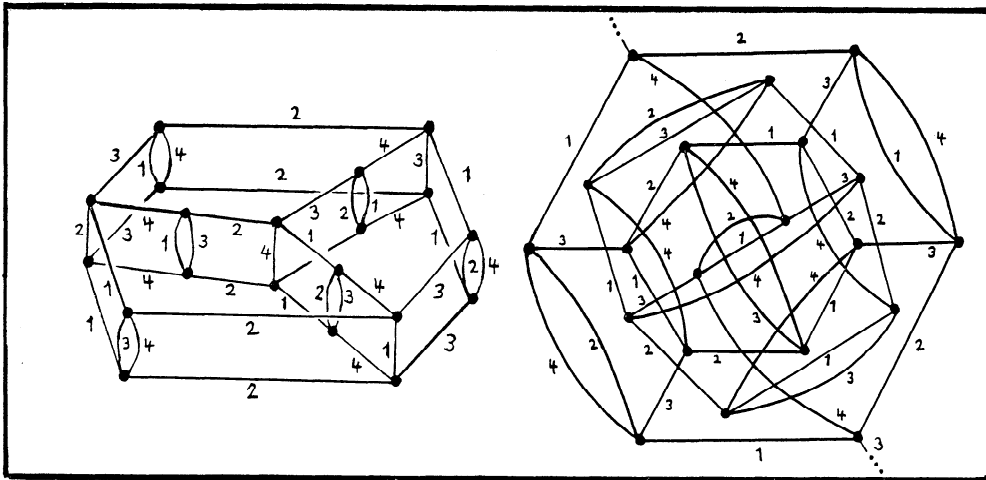


Figure 13

Un critère important dans la façon de dessiner le type d'une espèce (Figures 10, 11 et 12) a été la beauté de la figure.

Signalons qu'une équipe d'informaticiens de l'Université de Montpellier a mis sur pied un programme d'ordinateur, nommé CABRI, permettant de "manipuler", par exemple sur écran digital, la figure planaire représentant un graphe [1]. Ce programme, s'il avait été connu et accessible plus tôt à l'auteur lui aurait sauvé beaucoup d'heures de travail et de papier brouillon.

6. Intégration des espèces

En observant le Tableau C, on constate qu'aucune espèce n'admet $E_4^\bullet$ comme dérivée. De plus, l'espèce L_3 admet deux intégrales non isomorphes: soit p_4^{bic} et C_4 . C'est dire que l'équation différentielle $Y' = M$, même sous la condition initiale $Y[\emptyset] = \emptyset$, peut tout aussi bien admettre zéro que deux solutions

combinatoires. Gilbert Labelle [6] a plus généralement étudié les systèmes différentiels dans la catégorie des espèces. Il obtient en particulier le résultat suivant:

THÉORÈME. La cardinalité de l'ensemble des solutions non isomorphes de l'équation $Y' = M$, sous la condition initiale $Y[\emptyset] = \emptyset$, peut, suivant l'espèce M , être 0, 1, 2, ... ou ∞ (la cardinalité de $\mathbb{R}$), mais ne peut être $\aleph_0$ (la cardinalité de $\mathbb{N}$).

De plus, parmi les onze espèces moléculaires concentrées sur quatre points, on observe que seules E_4 , $E_4^\perp$, C_4 , $E_2 \circ L_2$ et L_4 sont "intégrables". On a $\int E_4 = E_5$, $\int E_4^\perp = E_5$, $\int C_4 = P_5/Z_2$, $\int E_2 \circ L_2 = P_5$ et $\int L_4 = C_5$. André Joyal [4] a récemment démontré que dans l'anneau de $R = R(E)$ des espèces (c.-à-d. la complétion du semi-anneau des classes d'isomorphie d'espèces) toute espèce est intégrable. En d'autres mots, quelle que soit l'espèce F , il existe deux espèces S et T telles que $F = (S - T)'$. Il démontre l'élégante formule:

$$\int F = E_1 \cdot F - E_2 \cdot F' + E_3 \cdot F'' + \dots + (-1)^n E_{n+1} \cdot F^{(n)} + \dots$$

Dans le Tableau D, le lecteur trouvera une liste d'intégrales (les plus simples trouvées parmi une multitude) pour chacune des espèces moléculaires sur les cardinalités ≤ 4 . Lorsque l'espèce n'est pas intégrable, on y donne une intégrale virtuelle (c.-à-d. un élément de R qui n'est pas une espèce) qui ne coïncide que rarement avec celle canonique donnée par la formule de Joyal. Notons que tout élément T de R admet une décomposition moléculaire unique

$$T = \sum_{n \geq 0} T_n = \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^{\mu_n} c_{n,i} M_n^{(i)}$$

où, contrairement à la section 2, les entiers $c_{n,i}$ sont maintenant dans $\mathbb{Z}$. De plus, une conséquence du théorème de Yeh [13], cité plus tôt, est que R est un anneau factoriel.

Tableau D

n	i	$M_n^{(i)}$	$\int M_n^{(i)}$
0	1	E_0	E_1
1	1	E_1	E_2
2	1	E_2	E_3
	2	L_2	C_3
3	1	E_3	E_4
	2	C_3	(virtuelle) $X \cdot C_3 - C_4$ ou $X \cdot C_3 - P_4^{bic}$
	3	E_3^+	$E_2 \circ E_2$
	4	L_3	C_4 ou P_4^{bic}
4	1	E_4	E_5
	2	E_4^+	E_5^+
	3	$E_2 \circ E_2$	(virtuelle) $X \cdot (E_2 \circ E_2) + 2E_5^+ - L_2 \cdot E_3 - 2E_5$
	4	E_4^+	(virtuelle) $E_5^+ - E_5$
	5	$E_2 \cdot E_2$	(virtuelle) $E_2 \cdot E_3 + E_5 - E_5^+$
	6	P_4^{bic}	(virtuelle) $X \cdot P_4^{bic} - C_5$
	7	C_4	P_5 / Z_2
	8	$X \cdot C_3$	(virtuelle) $M_5^{(11)} - P_5$
	9	$L_2 \cdot E_2$	(virtuelle) $L_2 \cdot E_3 + 2E_5 - 2E_5^+$
	10	$E_2 \circ L_2$	P_5
	11	L_4	C_5

7. Lien entre $(\mu_n)_{n \geq 0}$ et $(\pi_n)_{n \geq 0}$

Soit μ_n et π_n le nombre d'espèces moléculaires et atomiques respectivement, concentrées sur la cardinalité n . Le Tableau E donne les premiers termes de ces deux suites.

Tableau E

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
μ_n	1	1	2	4	11	19	56	96	296	554	1593	3093
π_n	0	1	1	2	6	6	27	20	130	124	598	640

Les premières valeurs des μ_n ont été citées à la section 1. Pour trouver les premières valeurs des π_n , on peut procéder comme suit: à partir de la Figure 10, on trouve facilement les espèces atomiques sur quatre points ou moins. A partir de celles-ci, on construit les espèces non atomiques (il y en a 13) sur cinq points: d'où $\pi_5 = 6$. Et ainsi de suite. Notez que la suite (π_n) n'apparaît pas dans le livre de N.J.A. Sloane [14] et qu'elle n'est pas monotone. Le lien entre les deux suites se traduit par la formule suivante à partir de laquelle il est également facile de calculer π_n ($0 \leq n \leq 11$) connaissant μ_n ($0 \leq n \leq 11$).

REMARQUE (G. Labelle). On a

$$\sum_{n \geq 0} \mu_n t^n = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-t^m} \right)^{\pi_m}.$$

DÉMONSTRATION. Soit M_n et P_n les ensembles de types d'espèces moléculaires et atomiques, respectivement, concentrées sur n points. Soit $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n id_i = n$. Si pour tout i , on choisit une combinaison avec répétitions de d_i éléments de P_i et que l'on multiplie toutes ces espèces atomiques, on obtient bien sûr un élément de M_n . Le théorème de Yeh [15] (voir section 6) implique que les μ_n éléments de M_n sont obtenus une et une seule fois par un tel produit.

On a donc $\mu_n = \sum \prod_{i=1}^n \binom{\pi_i}{d_i}$ où la somme s'étend sur les $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ où $d_i \geq 0$, $\sum id_i = n$. En effet, il est bien connu que le nombre de combinaisons avec répétitions de j objets pris parmi k est donné par

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} = \frac{k(k+1)\dots(k+j-1)}{j!}.$$

Comme de plus on a $(1-t^i)^{-\pi} i = \sum_{d=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \pi i \\ d \end{matrix} \right\} t^{\text{id}}$, la formule s'ensuit.

8. Espèces multisortes

Dans cette dernière section, nous ne ferons qu'aborder l'étude des espèces à plusieurs sortes, du point de vue de leur décomposition (moléculaire ou atomique) en espèces multisortes plus simples.

Soit T une espèce à k sortes, $k \geq 1$. C'est-à-dire ([3], [8]) que T associe à tout k -tuple, $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ d'ensembles finis, un ensemble fini $T[U_1, U_2, \dots, U_k]$ et à tout k -tuple $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ de bijections $(f_i : U_i \rightarrow V_i)$ une bijection

$$T[f_1, f_2, \dots, f_k] : T[U_1, U_2, \dots, U_k] \rightarrow T[V_1, V_2, \dots, V_k].$$

Si $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ est une multichiffre, alors $T_{(n_1, n_2, \dots, n_k)}$ est l'espèce à k sortes définie par

$$T_{(n_1, \dots, n_k)}[U_1, U_2, \dots, U_k] = \begin{cases} T[U_1, \dots, U_k] & \text{si } \forall i, |U_i| = n_i \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous dirons que T est concentrée sur un multichiffre $(n_1, \dots, n_k)$ si $T = T_{(n_1, \dots, n_k)}$. Si $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ est de multichiffre $(n_1, \dots, n_k)$, on a alors une action de $S_{U_1} \times S_{U_2} \times \dots \times S_{U_k}$ sur $T[U_1, \dots, U_k]$. Plus spécifiquement, prenons $U_i = n_i = \{0, 1, \dots, n_i-1\}$ et représentons T par un "multigraphe" ayant k sortes d'arêtes.

En chaque sommet $x \in T[n_1, n_2, \dots, n_k]$, on place, pour tout $1 \leq i \leq k$, n_i-1 arêtes d'indices (i, j) , $1 \leq j \leq n_i-1$, correspondant à l'action de la

transposition s_j de 0 et j dans la $i^{\text{ième}}$ sorte de points. Plus précisément l'arête d'indice (i,j) joint le sommet x au sommet

$$T[id_{n_1}, id_{n_2}, \dots, s_j, id_{n_{j+1}}, \dots, id_{n_k}](x) .$$

Lorsque $n_i = 1$, pour une raison technique qui deviendra claire plus tard, il est préférable de placer en x une boucle d'indice $(i,0)$. Le multigraphe obtenu, lorsqu'on oublie la nature de ces sommets, s'appelle le *type* de l'espèce à k sortes T .

A titre d'exemple, la Figure 14 donne le type de deux espèces à deux sortes sur la multcardinalité $(3,3)$. Ce sont les espèces $L_3(X) \cdot C_3(Y)$ et $C_{3,3}^{\text{alt}}$ définies par:

$$(L_3(X) \cdot C_3(Y))[U,V] = L_3[U] \times C_3[V]$$

et

$$C_{3,3}^{\text{alt}}[U,V] = \{\delta \in C[U+V] \mid \delta(U) = V \text{ et } \delta(V) = U\}$$

où $|U| = 3$ et $|V| = 3$.

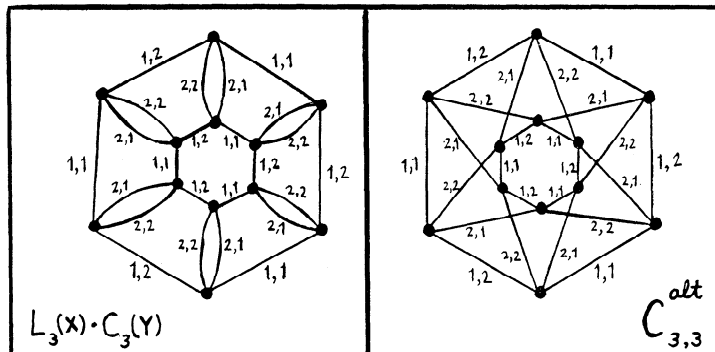


Figure 14

Dans la Figure 15, les mêmes types sont redessinés en représentant les arêtes de la première (seconde) sorte par un trait gras (fin).

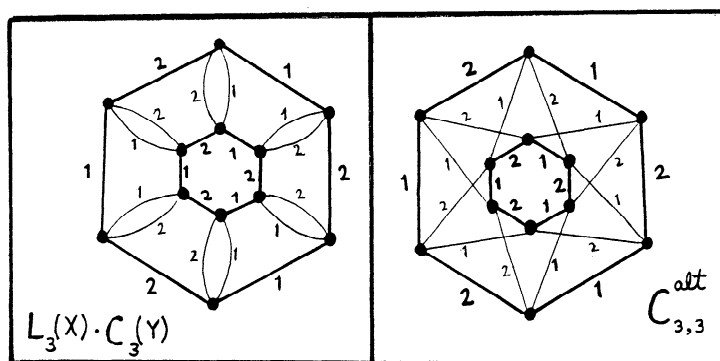


Figure 15

Connaissant le type de T , on trouve le type de $\frac{\partial}{\partial X_i} T$ en enlevant toutes les arêtes d'indice $(i, n_i - 1)$. S'il n'y a aucune arête de la $i^{\text{ème}}$ sorte (même pas d'indice $(i, 0)$), alors $n_i = 0$ et $\frac{\partial}{\partial X_i} T$ est l'espèce vide.

REMARQUE. Si $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont k espèces (à une sorte) concentrées respectivement sur les cardinalités $n_1, n_2, \dots, n_k$, alors il est facile de construire une espèce T à k sortes, notée $A_1(X_1) \cdot A_2(X_2) \cdot \dots \cdot A_k(X_k)$, sur la multicharactéristique $(n_1, n_2, \dots, n_k)$; il suffit de poser

$$T[U_1, U_2, \dots, U_k] = A_1[U_1] \times A_2[U_2] \times \dots \times A_k[U_k].$$

Le lecteur ne devrait surtout pas croire qu'on obtient ainsi toutes les espèces à k sortes. Par exemple, $C_{3,3}^{\text{alt}}$ n'est pas une telle espèce à deux sortes.

A partir des opérations de somme et de produit d'espèces à k sortes, on définit de la façon évidente les notions d'espèces moléculaires et atomiques à k sortes.

Puisque les types d'espèces à k sortes sur la multicharactéristique $(n_1, \dots, n_k)$ correspondent aux types actions connexes du groupe $S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k}$ (ou encore aux classes de conjugaison de sous-groupes de ce groupe), on sait qu'il n'y en a qu'un nombre fini. Soit $\mu_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ce nombre; de plus, soit $\pi_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ le nombre de celles qui sont primaires.

REMARQUE (G. Labelle, 1984). On a

$$\sum_n \mu_{n_1, n_2, \dots, n_k} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_k^{n_k} = \prod_m \left(\frac{1}{1 - t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_k^{m_k}} \right)^{\pi_{m_1, \dots, m_k}}$$

où $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ et $m = (m_1, m_2, \dots, m_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

DÉMONSTRATION. Le cas $k = 1$ a été prouvé à la section 7. Le cas $k > 1$ n'est guère plus difficile. Cependant plutôt que de considérer un partage de l'entier n , on doit maintenant parler d'un multipartage de la multiscardinalité

$(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Un multipartage de $(n_1, \dots, n_k)$ étant une combinaison avec répétitions de multiscardinalités dont la somme terme à terme donne $(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Le reste de la preuve est laissé au lecteur.

L'auteur tient à remercier François Bergeron, Hélène Décoste, André Joyal, Gilbert Labelle, Pierre Leroux et Volker Strehl, tous membres du groupe de recherche combinatoire de l'UQAM, et plus particulièrement François Bergeron et Gilbert Labelle, ainsi que Steve Schanuel et Yeong Nan Yeh, de l'Université de New York à Buffalo, pour de nombreuses discussions fort instructives.

Bibliographie

- [1] BORDAT, J.P., CAZES, A., CHEIN, M., COGIS, O. et GUIDO, Y., C.A.B.R.I.:
Un cahier de brouillon informatisé pour l'étude des ensembles ordonnés,
Centre de recherche en informatique de Montpellier (1983).
- [2] HARARY, F., *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1968.
- [3] JOYAL, A., *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math.,
42 (1981), 1-82.
- [4] JOYAL, A., *Communication verbale*, Février 1984.

- [5] LABELLE, G., *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange*, Adv. in Math., 42 (1981), 217-247.
- [6] LABELLE, G., *A propos des équations différentielles combinatoires*, J. of Mathematical Analysis and Applications, Acad. Press, N.Y.
- [7] LABELLE, J., *Théorie des graphes*, Modulo Editeur, Outremont, Québec, 1981.
- [8] LABELLE, J., *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Ann. sc. math. du Québec, Vol. 7, No 1, 1983, 59-94.
- [9] LUNN, A.C. and SENIOR, J.K., *Isomerism and Configurations*, J. of Physical Chemistry, Vol. 33, 1929, 1026-1079.
- [10] MacLANE, S., *Categories for the Working Mathematician*, GTM 5, Springer-Verlag, N.Y., 1971.
- [11] PASSMAN, D.S., *Permutation Groups*, Benjamin, 1968.
- [12] SCHANUEL, S., *Communication verbale*, Avril 1984.
- [13] SCHANUEL, S., *Yeh's proof of the factoriality of Joyal's ring of species*, Conférence par S. Schanuel au Séminaire de combinatoire de l'UQAM le 13 avril 1984.
- [14] SLOANE, N.J.A., *A Handbook of Integer Sequences*, Acad. Press, N.Y., 1973.
- [15] YEH, Yeong Nan, — à paraître.

Département de mathématiques
et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. "A"
Montréal, Qué.
H3C 3P8

Manuscrit reçu le 18 avril 1984.
Révisé le 19 juillet 1984.