

VARIATIONS SUR L'APPROXIMATION RATIONNELLE EN MOYENNE

André Giroux et Pierre Patry

1. Résultat principal

Dans le but de concilier les avantages de l'approximation en moyenne avec ceux de l'approximation au sens de Tchebychev, Pinkus et Shisha [1] ont mesuré l'écart entre deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ au moyen de la notation suivante:

$$||| f ||| = \max \left\{ \left(\int_a^b |f(x)|^\delta dx \right)^{1/\delta} ; |f(x)| > 0 \text{ si } 0 \leq a < x < b \leq 1 \right\} .$$

Ils ont en effet montré que cette mesure, à priori assez semblable à la norme de l'espace L^δ , se comporte du point de vue de la théorie de l'approximation comme celle de L^∞ en caractérisant le polynôme de meilleure approximation d'une fonction continue (relativement à $||| \cdot |||$) par la présence d'alternances tout comme dans la théorie classique de Tchebychev. Nous nous proposons dans cet article de considérer l'approximation rationnelle des fonctions continues relativement à la jauge $||| \cdot |||$. Notez que c'est à dessein que nous utilisons le mot jauge (plutôt que norme) car il est facile de voir que l'inégalité du triangle

$$||| f + g ||| \leq ||| f ||| + ||| g |||$$

n'est pas satisfaite. Avant d'énoncer notre résultat, rappelons quelques notations: $C[0,1]$ désigne les fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, P_n les polynômes de degré au plus n et $R_{n,m}$ les fonctions r de la forme suivante:

$r = p/q$ où $p \in P_n$, $q \in P_m$ et $q(x) > 0$ si $0 \leq x \leq 1$ (toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles). Nous voulons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. Soit $\varphi \in C[0,1]$, $\varphi(x) > 0$ si $0 \leq x \leq 1$. Soient n, m des entiers ≥ 0 . A chaque $f \in C[0,1]$ correspond une et une seule fonction rationnelle $p^*/q^* \in R_{n,m}$ telle que

$$\inf_{p/q \in R_{n,m}} \|f - \varphi \frac{p}{q}\| = \|f - \varphi \frac{p^*}{q^*}\|.$$

Elle est caractérisée par la condition suivante: soient $n = \nu$ et $m = \mu$ les degrés de p^* et q^* respectivement et posons $d = \min(\nu, \mu)$. Il existe au moins $N = n + m + 2 - d$ intervalles ouverts disjoints consécutifs $I_1, I_2, \dots, I_N$ et $\sigma = \pm 1$ fixé tels que

- i) $(-1)^{\sigma} (f - \varphi \frac{p^*}{q^*})(x) \geq 0$ si $x \in I_k$
- ii) $(\int_{I_k} |(f - \varphi \frac{p^*}{q^*})(x)|^{\delta} dx)^{1/\delta} = \|f - \varphi \frac{p^*}{q^*}\|$.

Afin de simplifier l'écriture, nous n'écrirons la démonstration que pour le cas $\delta = 1$, $\varphi \equiv 1$. Quelques résultats préliminaires seront utiles.

2. Lemmes

LEMME A. Soient $g_\nu \in C[0,1]$ pour $\nu = 1, 2, 3, \dots$ des fonctions convergeant uniformément sur $[0,1]$. Alors $\|\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu\| \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \|g_\nu\|$.

DÉMONSTRATION. Voir [1], page 152.

LEMME B. Soient $p \in P_n$ et $M \geq \|p\| := \max_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|$. Alors, quel que soit $0 \leq y \leq 1$, on a

$$|p(x)| \geq |p(y)| - 2Mn^2|x - y|.$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité proposée découle directement de celle de Markov, d'après laquelle

$$|p'(x)| \leq 2n^2 \|p\|$$

lorsque $0 \leq x \leq 1$ (voir, par exemple, Rahman et Schmeisser [2]). En intégrant, on obtient en effet

$$|p(x) - p(y)| \leq \int_x^y |p'(t)| dt$$

d'où

$$|p(x) - p(y)| \leq 2Mn^2 |x - y|.$$

LEMME C. Soient $f \in C[0,1]$, $p_\nu/q_\nu \in R_{n,m}$ et K une constante positive telles que

$$\|f - p_\nu/q_\nu\| \leq K$$

pour $\nu = 1, 2, \dots$. Supposons de plus que les dénominateurs q_ν convergent uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction q . S'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $q(x_0) = 0$, alors $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p_\nu(x_0) = 0$.

DÉMONSTRATION. Démontrons tout d'abord l'existence d'une constante positive T telle que

$$(1) \quad \|p_\nu\| \leq T, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Posons $A = \|f\|$ et $B = \max_{\nu} \|q_\nu\|$ et soit $y_\nu \in [0,1]$ tel que

$M_\nu = \|p_\nu\| = \|p_\nu(y_\nu)\|$ pour $\nu = 1, 2, \dots$. Supposons que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} M_\nu = \infty$. En vertu du Lemme B,

$$|p_\nu(x)| \geq M_\nu(1 - 2n^2|x - y_\nu|) > M_\nu/2$$

dès que $|x - y_\nu| < 1/4n^2$. Par suite, pour ν assez grand, on aura

$$\left| f(x) - \frac{p_\nu(x)}{q_\nu(x)} \right| > 0$$

lorsque $|x - y_v| < 1/4n^2$. Alors

$$\begin{aligned} ||| f - p_v/q_v ||| &\geq \int_{y_v}^{y_v + 1/4n^2} \left| f(x) - \frac{p_v(x)}{q_v(x)} \right| dx \\ &\geq \frac{1}{4n^2} \left(\frac{M_v}{2B} - A \right) > K \end{aligned}$$

pour v suffisamment grand. Ceci démontre (1).

Supposons maintenant que $q(x_0) = 0$ et que $\lim_{v \rightarrow \infty} p_v(x_0) = d > 0$ (par exemple). La fonction $q(x)$ étant un polynôme de degré au plus m qui est non négatif sur l'intervalle $[0,1]$, trois cas sont possibles: considérons celui où $0 < x_0 < 1$, c'est-à-dire que, par exemple,

$$q_v(x) = ((x - x_0 - \eta_v)^2 + \xi_v^2) r_v(x)$$

avec $\lim_{v \rightarrow \infty} \eta_v = 0$, $\lim_{v \rightarrow \infty} \xi_v = 0$ ($\xi_v > 0$) et $r_v \in P_{m-2}$, $(r_v(x) > 0$ si $x \in [0,1]$). Les cas où $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$ se traitent en effet de façon similaire. En vertu du Lemme B et de (1),

$$|p_v(x)| \geq |p_v(x_0)| - 2Tn^2|x - x_0| > d/4$$

pourvu que $|x - x_0| < d/8Tn^2$ dès que v est assez grand. Puisque q_v converge uniformément vers q sur $[0,1]$ et que $q(x_0) = 0$, on aura que, pour v assez grand,

$$|f(x) - p_v(x)/q_v(x)| > 0$$

lorsque $|x - x_0| < \theta d/8Tn^2$ où $0 < \theta < 1$ ne dépend que de q . Alors

$$\begin{aligned} ||| f - p_v/q_v ||| &\geq \int_{x_0}^{x_0 + \theta d/8Tn^2} \left| f(x) - \frac{p_v(x)}{q_v(x)} \right| dx \\ &\geq \frac{d}{4} \int_{x_0}^{x_0 + \theta d/8Tn^2} \frac{dx}{((x - x_0 - \eta_v)^2 + \xi_v^2) r_v(x)} - \frac{A\theta d}{8Tn^2} \\ &\geq \frac{d}{4c} \int_0^{\theta d/8Tn^2} \frac{dt}{(t - \eta_v)^2 + \xi_v^2} - \frac{A\theta d}{8Tn^2} > K \end{aligned}$$

si v est assez grand puisque $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ diverge. Ici $c = \max_v \|r_v\|$. Ceci démontre le lemme. (Dans les cas $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$, on utilisera la divergence de $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ pour conclure.)

LEMME D. Soient n, m, v et μ des entiers tels que $0 \leq v \leq n$, $0 \leq \mu \leq m$ et p, q et F des polynômes tels que $\deg p = n - v$, $\deg q = m - \mu$ et $\deg F \leq n + m - \min(v, \mu)$. Supposons que p et q soient relativement premiers entre eux. Alors il existe $\phi_m \in P_m$ et $\psi_n \in P_n$ tels que $F = p\phi_m + q\psi_n$.

DÉMONSTRATION. Voir Van der Waerden [3], page 99.

3. Démonstration du théorème

Nous allons d'abord nous assurer de l'existence d'au moins une fonction $p^*/q^* \in R_{n,m}$ telle que

$$\|f - p^*/q^*\| = E_{n,m}(f) := \inf_{p/q \in R_{n,m}} \|f - p/q\|.$$

Soient $p_v/q_v \in R_{n,m}$ tels que $\lim_{v \rightarrow \infty} \|f - p_v/q_v\| = E_{n,m}(f)$. Ecrivant

$$p_v(x) = \sum_{k=0}^n p_k^{(v)} x^k, \quad q_v(x) = \sum_{k=0}^m q_k^{(v)} x^k,$$

nous pouvons supposer que

$$(2) \quad \sum_{k=0}^m (q_k^{(v)})^2 = 1, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

Posons $\mu_v = \max\{|p_k^{(v)}| : k = 0, 1, \dots, n\}$ et vérifions que sous la condition (2), on peut trouver une constante positive L telle que

$$(3) \quad \mu_v \leq L, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

Si en effet on avait $\lim_{v \rightarrow \infty} \mu_v = \infty$ avec $\lim_{v \rightarrow \infty} q_k^{(v)} = q_k$ pour $k = 0, 1, \dots, m$ (ce que l'on peut supposer en extrayant une sous-suite convenable en vue de (2)) et aussi

$\mu_\nu = |p_{k_0}^{(\nu)}|$ pour $\nu = 1, 2, 3, \dots$ où $0 \leq k_0 \leq n$, avec $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p_k^{(\nu)} / \mu_\nu := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{p}_k^{(\nu)} = \tilde{p}_k$ pour $k = 0, 1, \dots, n$ (toujours en considérant une sous-suite appropriée), on pourrait introduire les limites $q(x) = \sum_{k=0}^m q_k x^k$ et $\tilde{p}(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{p}_k x^k$. Considérons maintenant les fonctions

$$g_\nu(x) = \left(f(x) - \frac{p_\nu(x)}{q_\nu(x)} \right) \frac{1}{\mu_\nu}$$

qui convergent vers la fonction rationnelle

$$- \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}.$$

La convergence est uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. En effet, en vertu du Lemme C, nous pouvons supposer que $q(x)$ ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Utilisons maintenant le Lemme A pour obtenir l'inégalité

$$\left\| \frac{\tilde{p}}{q} \right\| \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \left\| g_\nu \right\|.$$

Puisque $|\tilde{p}_{k_0}| = 1$, on en déduit la contradiction suivante:

$$0 < \left\| \frac{\tilde{p}}{q} \right\| < E_{n,m}(f) / \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu_\nu = 0.$$

Ceci démontre (3). En vertu de (2) et de (3), nous pouvons maintenant supposer que les limites $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p_\nu = p^*$ et $\lim_{\nu \rightarrow \infty} q_\nu = q^*$ existent. Le Lemme C appliqué une seconde fois nous permet de supposer que la limite $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p_\nu / q_\nu = p^* / q^*$ est uniforme sur $[0, 1]$ et le Lemme A nous permet de conclure que

$$E_{n,m}(f) \geq \left\| f - p^* / q^* \right\|$$

d'où, puisque $p^* / q^* \in R_{n,m}$, que

$$(4) \quad E_{n,m}(f) = \left\| f - p^* / q^* \right\|.$$

Nous allons maintenant démontrer l'unicité de la fonction de meilleure approximation. A cet effet, nous allons montrer que si une fonction $p^*/q^* \in R_{n,m}$ satisfait les relations i) et ii) du théorème, on a

$$|||f - p/q||| > |||f - p^*/q^*|||$$

pour toute autre fonction $p/q \in R_{n,m}$. Procédons par contradiction en supposant

$$(5) \quad |||f - p/q||| \leq |||f - p^*/q^*|||.$$

Alors, on devra aussi avoir, pour $k = 1, 2, \dots, N$ qu'il existe un point $x_k \in I_k$ tel que

$$(6) \quad (-1)^k \sigma(p/q - p^*/q^*)(x_k) \geq 0.$$

Autrement, il y aurait un intervalle I_j pour lequel on aurait

$$(-1)^j \sigma(p/q - p^*/q^*) < 0 \quad \text{sur } I_j$$

et alors on aurait aussi, en vertu de i), que $0 \leq (-1)^j \sigma(f - p^*/q^*) < (-1)^j \sigma(f - p/q)$ sur I_j d'où, en vertu de ii), l'inégalité

$$|||f - p/q||| > |||f - p^*/q^*|||$$

ce qui contredit notre hypothèse (5). En vertu de (6), la fonction rationnelle $p/q - p^*/q^*$ possède $N - 1 = n + m + 1 - d$ zéros et il en est de même du polynôme $pq^* - p^*q$ dont le degré n'excède pourtant pas $n + m - d$. Ainsi (5) conduit à la relation $p/q \equiv p^*/q^*$.

Nous terminons finalement la démonstration du théorème en montrant que si p^*/q^* satisfait (4), on peut effectivement trouver les N intervalles annoncés. Nous supposons naturellement p^* et q^* relativement premiers. Un intervalle $I =]\alpha, \beta[$ (où $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$) sera dit maximal s'il existe $\sigma = \pm 1$ tel que

$$1) \quad \sigma(f - p^*/q^*) \geq 0 \quad \text{sur } I;$$

$$2) \quad \sigma \int_I (f - p^*/q^*)(x) dx \geq |||f - p^*/q^*|||;$$

3) si J est un intervalle tel que $I \subseteq J \subseteq [0,1]$ et que $\sigma(f-p^*/q^*) \geq 0$ sur J , alors $(f-p^*/q^*) = 0$ sur $J \setminus I$;

4) il n'existe pas d'intervalle $K \subseteq I$ admettant α ou β pour extrémité et pour lequel on ait $(f-p^*/q^*) = 0$ sur $I \setminus K$.

Il est clair qu'un nombre fini de tels intervalles existe. Enumérons-les consécutivement (l'extrémité droite de I_k étant plus petite que l'extrémité gauche de I_{k+1}) de telle sorte que $I_1, \dots, I_{m_1}$ aient le signe σ puis $I_{m_1+1}, \dots, I_{m_2}$ le signe $-\sigma$, etc., $I_{m_{s-1}+1}, \dots, I_{m_s}$ ayant le signe $(-1)^{s-1}\sigma$. Pour fixer les idées nous prendrons $\sigma = 1$. Nous voulons montrer que $s \geq n + m + 2 - d$. Supposons que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que $s < n + m + 2 - d$. Choisissons un point x_j entre I_{m_j} et I_{m_j+1} tel que $(f-p^*/q^*)(x_j) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, s-1$ et posons

$$F(x) = -\prod_{j=1}^{s-1} (x_j - x)$$

(si $s = 1$, on pose $F(x) = -1$). Alors $F \in P_{n+m-d}$ et en vertu du Lemme D, il existe $\varphi_m \in P_m$ et $\psi_n \in P_n$ tels que $F = \varphi_m p^* + \psi_n q^*$. Considérons la fonction

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p^*(x) - \omega \psi_n(x)}{q^*(x) - \omega \varphi_m(x)}$$

où $\omega > 0$ est d'abord choisi assez petit pour que $p/q \in R_{n,m}$. On a

$$f - \frac{p}{q} = f - \frac{p^*}{q^*} + \frac{\omega F}{q^*(q^* + \omega \varphi_m)}$$

et aussi

$$\|f - \frac{p}{q}\| = \max_{1 \leq j \leq s} \|f - \frac{p}{q}\|_{[x_{j-1}, x_j]}$$

(où $x_0 = 0$, $x_s = 1$; $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{[0,1]}$ avec cette notation) puisque $(f - \frac{p}{q})(x_j) = 0$. Vérifions que si ω est assez petit, p/q fournit une meilleure approximation à f que ne le fait p^*/q^* , c'est-à-dire que

$$(7) \quad ||| f - p/q |||_{[x_{j-1}, x_j]} < ||| f - p^*/q^* |||$$

pour $j = 1, 2, \dots, s$. Si cela n'était pas vrai, on pourrait choisir j et une suite ω_k décroissante vers 0 tels que

$$||| f - \frac{p^*}{q^*} + \frac{\omega_k^F}{q^*(q^* + \omega_k^{\varphi_m})} |||_{[x_{j-1}, x_j]} \geq ||| f - \frac{p^*}{q^*} |||$$

pour $k = 1, 2, \dots$. Pour chaque k , on pourra alors trouver un intervalle $J_k \subset [x_{j-1}, x_j]$ et un signe $\sigma_k = \pm 1$ tels que

$$\sigma_k \left(f - \frac{p^*}{q^*} + \frac{\omega_k^F}{q^*(q^* + \omega_k^{\varphi_m})} \right)(x) > 0 \quad \text{si } x \in J_k$$

$$\sigma_k \int_{J_k} \left(f - \frac{p^*}{q^*} + \frac{\omega_k^F}{q^*(q^* + \omega_k^{\varphi_m})} \right)(x) dx \geq ||| f - \frac{p^*}{q^*} |||.$$

En fait, on doit avoir $\sigma_k = (-1)^j$ pour tout k puisque si l'on avait $\sigma_k = (-1)^{j-1}$ pour un indice k , on en déduirait que, pour tout $x \in J_k$,

$$0 < (-1)^{j-1} \left(f - \frac{p^*}{q^*} + \frac{\omega_k^F}{q^*(q^* + \omega_k^{\varphi_m})} \right)(x)$$

$$< (-1)^{j-1} \left(f - \frac{p^*}{q^*} \right)(x)$$

et donc

$$||| f - \frac{p^*}{q^*} ||| < (-1)^{j-1} \int_{J_k} \left(f - \frac{p^*}{q^*} \right)(x) dx \leq ||| f - \frac{p^*}{q^*} |||.$$

Ecrivant que $J_k =]a_k, b_k[$, on peut supposer que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$ existent. On aura donc

$$(-1)^j \left(f - \frac{p^*}{q^*} \right)(x) \geq 0 \quad \text{si } x \in]a, b[$$

$$(-1)^j \int_a^b \left(f - \frac{p^*}{q^*} \right)(x) dx \geq ||| f - \frac{p^*}{q^*} |||.$$

L'intervalle $]a, b[$ serait-il maximal? Alors il coïnciderait avec l'un des intervalles I_k où $m_{j-1} + 1 \leq k \leq m_j$ et son signe serait $(-1)^{j-1}$. Il doit donc être proprement inclus dans l'un de ces intervalles I_k de mauvais signe, ce qui est aussi absurde. L'hypothèse suivant laquelle (7) est fausse est donc contradictoire. Ceci détermine la démonstration.

Bibliographie

- [1] PINKUS, A. et SHISHA, O., *Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation*, J. Approx. Theory 35 (1982), 148-168.
- [2] RAHMAN, Q.I. et SCHMEISSER, E., *Les inégalités de Markoff et de Bernstein*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1983.
- [3] Van der Waerden, B.L., *Algebra I*, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

Département de mathématiques
et de statistique
Université de Montréal
Montréal, Qué.
H3C 3J7

Manuscrit reçu le 4 mai 1984.
Révisé le 6 septembre 1984.