

UN CRITÈRE DE NON-ERGODICITÉ POUR LES CHAÎNES DE MARKOV HOMOGÈNES

Michel Blais

On donne une condition suffisante pour qu'une chaîne de Markov homogène et irréductible soit non ergodique (récurrente nulle ou transiente). Cette condition généralise celle donnée par Kaplan [2] et celle de Malyshev et Menshikov [3].

Soit $\{X_k\}_{k \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène et irréductible sur l'espace des états S ayant pour matrice de transition $(p(x,y))_{(x,y) \in S \times S}$.

On note par t_x le temps de retour à x . Rappelons qu'une chaîne irréductible est ergodique (récurrente positive) si, pour un $x \in S$, on a

$$(1) \quad \sum_{k \geq 0} k P_x(t_x = k) = \sum_{k \geq 0} P_x(t_x > k) < \infty,$$

et qu'elle est récurrente si, pour un $x \in S$, on a

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_x(t_x > k) = 0.$$

THÉOREME. Pour que la chaîne $\{X_k\}_{k \geq 0}$ soit non ergodique, il suffit qu'il existe une fonction non constante $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ et des constantes $a, b > 0$ et $c \in]0, 1[$ telles que $A = \{x \in S : \phi(x) \geq a\}$ est non vide et telles que les deux inégalités suivantes sont vérifiées,

$$(3) \quad \sum_{y \in S} [\phi(y) - \phi(x)] p(x,y) \geq 0, \quad x \in A;$$

$$(4) \quad d^{\phi(x)} - \sum_{y \in S} d^{\phi(y)} p(x,y) \geq -b(1-d), \quad x \in A \text{ et } d \in [c, 1[.$$

REMARQUE. Si on augmente la valeur de a , on réduit l'ensemble A et les inégalités (3) et (4) sont encore vérifiées. On peut donc considérer que $a = \phi(x_0)$ pour un $x_0 \in A$. On pose $A' = A \setminus \{x_0\}$. Comme ϕ n'est pas constante on peut supposer que $A^c \neq \emptyset$.

DÉMONSTRATION. On construit une nouvelle chaîne de Markov homogène et irréductible $\{X'_k\}_{k \geq 0}$ sur l'ensemble A en posant

$$p'(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & \text{si } x \in A, y \in A' \\ \sum_{z \in S \setminus A'} p(x, z) & \text{si } x \in A, y = x_0. \end{cases}$$

On note t_{x_0} et t'_{x_0} les temps de retour à x_0 pour les chaînes $\{X_k\}_{k \geq 0}$ et $\{X'_k\}_{k \geq 0}$ respectivement.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x_0}(t_{x_0} > k) &= \mathbb{P}\{X_1 \neq x_0, \dots, X_k \neq x_0 \mid X_0 = x_0\} \\ &\geq \mathbb{P}\{X_1 \in A', \dots, X_k \in A' \mid X_0 = x_0\} \\ &= \mathbb{P}\{X'_1 \neq x_0, \dots, X'_k \neq x_0 \mid X'_0 = x_0\} \\ &= \mathbb{P}_{x_0}(t'_{x_0} > k), \end{aligned}$$

ainsi on a

$$(5) \quad \mathbb{P}_{x_0}(t_{x_0} > k) \geq \mathbb{P}_{x_0}(t'_{x_0} > k), \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

On en déduit, en utilisant (1) et (2): si x_0 est P -ergodique, c.-à-d. ergodique pour la chaîne X , (respectivement P -récurrent) alors x_0 est P' -ergodique (respectivement P' -récurrent). Il suffit donc de montrer que $\{X'_k\}_{k \geq 0}$ est non ergodique.

Par la construction de $\{X'_k\}_{k \geq 0}$, les deux inégalités suivantes sont évidentes:

$$(6) \quad \sum_{y \in A} \phi(y) p'(x, y) \geq \sum_{y \in S} \phi(y) p(x, y), \quad x \in A;$$

$$(7) \quad \sum_{y \in A} d^{\phi(y)} p'(x, y) \leq \sum_{y \in S} d^{\phi(y)} p(x, y) , \quad x \in A \text{ et } d \in [0, 1[.$$

Comme $A^c \neq \emptyset$ et la chaîne $\{X_k\}_{k \geq 0}$ est irréductible, l'inégalité (6) est stricte pour au moins un $x \in A$. Si $\{X_k\}_{k \geq 0}$ satisfait (3) et (4) alors, par (6) et (7), $\{X'_k\}_{k \geq 0}$ les satisfait aussi (en remplaçant p par p' et S par A), de plus l'inégalité (3) est stricte pour au moins un $x \in A$:

$$(8) \quad \sum_{y \in A} [\phi(y) - \phi(x)] p'(x, y) > 0 , \quad \text{pour au moins un } x \in A .$$

Si $\{X'_k\}_{k \geq 0}$ était ergodique, alors il existerait une mesure de probabilité stationnaire π et les deux égalités suivantes seraient vérifiées:

$$\pi(y) = \sum_{x \in A} \pi(x) p'(x, y) , \quad y \in A ;$$

$$\sum_{x \in A} \pi(x) \left[\frac{d^{\phi(x)} - \sum_{y \in A} p'(x, y) d^{\phi(y)}}{(1 - d)} \right] = 0 , \quad 0 \leq d < 1 .$$

De cette dernière égalité on peut alors déduire une contradiction, ce qui prouve la non-ergodicité de $\{X'_k\}_{k \geq 0}$ et donc de $\{X_k\}_{k \geq 0}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{d \uparrow 1} \sum_{x \in A} \frac{\pi(x)}{(1 - d)} \left[d^{\phi(x)} - \sum_{y \in A} d^{\phi(y)} p'(x, y) \right] \\ &\geq \sum_{x \in A} \pi(x) \lim_{d \uparrow 1} \frac{1}{(1 - d)} \left[d^{\phi(x)} - \sum_{y \in A} d^{\phi(y)} p'(x, y) \right] \\ &= \sum_{x \in A} \pi(x) \sum_{y \in A} p'(x, y) \lim_{d \uparrow 1} \left[\frac{d^{\phi(x)} - d^{\phi(y)}}{1 - d} \right] \\ &= \sum_{x \in A} \pi(x) \sum_{y \in A} [\phi(y) - \phi(x)] p'(x, y) \\ &> 0 , \end{aligned}$$

où la deuxième ligne vient du lemme de Fatou, puisque (4) et (7) donnent

$$\sum_{y \in A} \frac{d^{\phi(x)} - d^{\phi(y)}}{1 - d} \cdot p'(x, y) \geq -b .$$

La troisième ligne est due au théorème de convergence monotone pour la partie $\{y \in A : \phi(y) > \phi(x) + 1\}$ et au théorème de convergence bornée pour la partie $\{y \in A : \phi(y) \leq \phi(x) + 1\}$: par la proposition technique de l'Appendice en posant $u = \phi(x)$ et $v = \phi(y)$. La dernière ligne est due à (8). $\square$

Le critère de Kaplan [2] est le cas particulier de cette proposition pour $S = \mathbb{Z}_+$, ϕ égal à la fonction identité.

Le critère de Malyshev et Menshikov ([3], théorème 1.7) s'énonce comme suit: une chaîne de Markov homogène et irréductible $\{X_k\}_{k \geq 0}$ est non ergodique s'il existe des constantes $a \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, et une fonction non constante $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que $A = \{x \in S : \phi(x) > a\}$ est non vide, pour lesquelles les deux conditions suivantes sont vérifiées:

$$(9) \quad \sum_{y \in S} \phi(y) p(x, y) \geq \phi(x) , \quad x \in A ;$$

$$(10) \quad p(x, y) = 0 \text{ si } |\phi(x) - \phi(y)| > \varepsilon , \quad x, y \in S .$$

Ce critère est un cas particulier de la proposition puisque la condition (9) est la même que la condition (3) et la condition (10) implique la condition (4), comme le montre ce qui suit:

On suppose que ε est un entier et soit c tel que $0 < c < 1$. Si la condition (10) est vérifiée, alors pour $x \in A$ et $d \in [c, 1[$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} [d^{\phi(y)} - d^{\phi(x)}] p(x, y) &\leq \sum_{y \in S} [d^{\phi(x) - \varepsilon} - d^{\phi(x)}] p(x, y) \\ &= d^{\phi(x)} (d^{-\varepsilon} - 1) \\ &\leq d^{-\varepsilon} - 1 \\ &= \frac{1 - d}{d^{\varepsilon}} \cdot \frac{1 - d^{\varepsilon}}{1 - d} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-d}{d^e} \sum_{i=0}^{e-1} d^i \leq \frac{1-d}{c^e} \cdot e = b(1-d)$$

où $b = \frac{e}{c^e}$. Donc l'inégalité (4) est vérifiée pour $d \in [c, 1[$.

Appendice

PROPOSITION. Pour a et u des constantes telles que $u \geq a \geq 0$, on considère la famille des fonctions indexées par $d \in [c, 1[$, $c > 0$, et définies pour $v \geq a$ par

$$f_d(v) = \frac{d^u - d^v}{1-d}.$$

On a alors les deux résultats suivants:

1° $f_d(v)$ est uniformément bornée en d sur l'ensemble

$$\{v \geq a : v \leq u + 1\},$$

2° $f_d(v)$ est croissante en d sur l'ensemble

$$\{v \geq a : v > u + 1\}.$$

DÉMONSTRATION. On montre d'abord que pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la fonction $g(d) = \frac{1-d^\alpha}{1-d}$ est bornée, plus précisément que:

$$1 < g(d) < \alpha, \quad \text{si } \alpha > 1$$

et

$$\alpha \leq g(d) \leq 1, \quad \text{si } \alpha \leq 1.$$

En effet

$$g'(d) = \frac{(\alpha-1)d^\alpha - \alpha d^{\alpha-1} + 1}{(1-d)^2} = \frac{h(d)}{(1-d)^2},$$

$$h'(d) = -\alpha(\alpha-1)(1-d)d^{\alpha-2}.$$

Pour $\alpha > 1$, $h'(d) < 0$, $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$; ainsi h est décroissante, $h(d) > 0$, $g'(d) > 0$ et g est croissante; on peut donc conclure que

$$1 = g(0) < g(d) < \lim_{d \rightarrow 1} g(d) = \alpha.$$

Pour $\alpha < 1$, $h'(d) \geq 0$, $h(0) = -\infty$ et $h(1) = 0$; ainsi h est croissante, $h(d) \leq 0$, $g'(d) \leq 0$ et g est décroissante; on peut donc conclure que

$$\alpha = \lim_{d \rightarrow 1} g(d) \leq g(d) \leq g(0) = 1.$$

Pour montrer 1^0 , on divise le domaine en deux parties. Pour $u \geq v$,

$$-f_d(v) = [f_d(v)]^- = d^v \cdot \frac{1 - d^\alpha}{1 - d},$$

où on a posé $\alpha = u - v$. Par ce qui précède, on a $[f_d(v)]^- \leq d^v \cdot \max\{1, \alpha\} \leq d^a(1 + u - a) \leq 1 + u - a$. Pour $u < v$, $f_d(v) = [f_d(v)]^+ = d^u \cdot \frac{1 - d^\alpha}{1 - d}$, où on a posé $\alpha = v - u$. Mais sur $\{v \geq a : v \leq u + 1\}$ on a $\alpha \leq 1$ et alors $[f_d(v)]^+ \leq d^u \cdot 1 \leq 1$. Donc, sur l'ensemble $\{v \geq a : v \leq u + 1\}$, on a

$$-(1 + u - a) \leq f_d(v) \leq 1.$$

Pour montrer 2^0 , comme alors $v > u + 1$, $\alpha = v - u > 1$, on a vu que g est alors croissante, et comme la fonction d^u est également croissante en d on a $f_d(v) = d^u \cdot \frac{1 - d^\alpha}{1 - d}$ est croissante en d sur l'ensemble $\{v \geq a : v > u + 1\}$. $\square$

Références

- [1] FOSTER, F.G., *On the stochastic matrices associated with certain queuing processes*, Ann. Math. Statistics, 24 (1953), 355-360.
- [2] KAPLAN, M., *A sufficient condition for nonergodicity of a Markov chain*, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 1T-25, No. 4, July 1979, No. 470-471.

- [3] MALYSHEV, V.A. et MENSNIKOV, M.V., *Ergodicity, continuity and analyticity of countable Markov chains*, Trans. Moscow Math. Soc. (1981), 1-48.

Département de mathématiques et
d'informatique
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Qué.
J1K 2R1

Manuscrit reçu le 26 septembre 1984.
Révisé le 29 novembre 1984.