

LES DÉRIVÉES PAR RAPPORT AUX NOEUDS DES TRIANGULARISATIONS ET LEURS UTILISATIONS EN IDENTIFICATION DES DOMAINES

J.P. Zolésio

Résumé

Calcul des dérivées partielles par rapport aux noeuds d'une triangularisation du coût $J(\Omega_h) = h(\Omega_h, M_h)$ où M_h est l'approximation par éléments finis P_1 d'un problème variationnel d'ordre 2. Utilisation de ces dérivées, Ω_h n'étant paramétrisée que par les noeuds situés sur la frontière (discussion sur le mouvement des noeuds intérieurs).

Le but de ce travail est double:

a) Montrer comment, en identification de domaine, on obtient la dérivée par rapport aux noeuds de la triangularisation (lorsque l'équation d'état qui gouverne le problème est discrétisée par la méthode des éléments finis) comme cas particulier de la théorie générale du calcul des gradients développée dans [1], [4] et [5], par simple choix du champ V adapté à la situation.

b) Préciser l'utilisation des dérivées par rapport aux noeuds intérieurs, la géométrie discrétisée n'étant définie que par la frontière Γ_h , le mouvement des noeuds intérieurs apparaissant dans les travaux numériques de façon très injustifiée.

Revenons quelques instants sur les problèmes d'identification de domaines.

Le calcul des dérivées par rapport au domaine Ω pour les solutions des problèmes aux limites est réalisé en introduisant des déformations T_t construites par un champ (de vitesses particulières) V ; ce champ décrivant un espace fonctionnel

$$E = C^0([0, \varepsilon[, C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)) \quad , \quad k \geq 1 \quad .$$

Par cette méthode, on envisage les déformations générales $\Omega_t = T_t(\Omega)$ du domaine Ω , pour V donné dans E . Les propriétés de T_t et de Ω_t sont largement étudiées. Si u_t est la solution, dans la configuration Ω_t , Γ_t , d'un problème aux limites alors $J(\Omega_t) = h(\Omega_t, u_t)$ est une fonctionnelle coût à minimiser par rapport au domaine Ω .

La dérivée de J en Ω dans la direction du champ V est donnée par $dJ(\Omega, V) = \frac{d}{dt} J(\Omega_t) \big|_{t=0}$. On établit dans [4], [5], les propriétés de cette dérivée, disons en particulier que si Γ est régulière, $dJ(\Omega, V)$ ne dépend en fait que du germe de $V(0)$ au voisinage de Γ ; si de plus $V \mapsto dJ(\Omega, V)$ est linéaire, alors le théorème de structure (théorème de la formule d'Hadamard, voir [4] et [5]) dit qu'il existe, Γ étant assez régulière, une distribution g_n sur la surface Γ (g_n est unique) telle que le gradient G , distribution vectorielle sur $\mathbb{R}^n$, est donnée par $G = \tau_{\Gamma}(g_n)$ (τ_{Γ} est l'application trace ou restriction sur Γ) et la dérivée par rapport au domaine vérifie

$$(1) \quad dJ(\Omega; V) = \langle G, V(0) \rangle_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)' \times \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \quad .$$

Le calcul du gradient G se fait en général via le calcul de la dérivée eulérienne de l'équation d'état

$$\dot{u} = \frac{d}{dt} (u_t \circ T_t) \big|_{t=0} \quad (\text{dérivée dans un espace } H^m(\Omega)) \quad .$$

Par exemple, pour la fonctionnelle coût la plus simple,

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (u - y_d)^2 \, dx$$

(y_d est une fonction donnée sur $\mathbb{R}^n$) , on a

$$dJ(\Omega; V) = \int_{\Omega} (u - y_d)(\dot{u} - \nabla y_d \cdot V(0)) \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2}(u - y_d)^2 \operatorname{div} V(0) \, dx .$$

Cependant, en introduisant la dérivée u' de l'état u par rapport au domaine (dans la direction du champ V) définie par

$$(2) \quad u' = \dot{u} - \nabla u \cdot V(0)$$

on obtient (Γ étant assez régulière)

$$(3) \quad dJ(\Omega; V) = \int_{\Omega} (u - y_d)u' \, dx + \int_{\Gamma} \frac{1}{2}(u - y_d)^2 V(0) \cdot n \, d\gamma .$$

Cette seconde expression de dJ est plus intéressante car plus proche de la structure annoncée par le théorème, puisque le second terme du second membre dépend déjà explicitement de la restriction $V(0) \cdot n$ sur Γ . En fait, pour les problèmes aux limites classiques elliptiques et paraboliques, on caractérise u par utilisation du théorème des fonctions implicites et on obtient la linéarité et continuité de $V \mapsto \dot{u}$ et donc celle de $V \mapsto u'$. On prouve alors le résultat suivant:

La dérivée u' de l'état par rapport à Ω dans la direction du champ V ne dépend que de la restriction de $V(0) \cdot n$ à Γ (résultat qui est faux pour $\dot{u}$). Ce résultat signifie en particulier que u' est solution d'un problème aux limites avec conditions homogènes dans Ω (avec second membre nul) et en introduisant un état adjoint p classiquement dans (3), on obtient immédiatement l'expression du gradient G défini par (1).

1. Déformation des domaines

1.1. Le cas général

Il y a lieu de distinguer deux types de déformations: le premier adapté aux petites déformations, et le second adapté aux grandes déformations et aux déformations gouvernées par des paramètres.

Ω est une partie de $\mathbb{R}^n$ (pour simplifier les écritures, nous prendrons $n = 2$) , V est un champ défini au voisinage U de $\overline{\Omega}$ (resp. dans $[0, \varepsilon[xU$) , la transformation T_t est définie par

$$(4) \quad T_t : x \rightarrow x + tV(x) \quad (\text{resp. } x(t) = x + \int_0^t V(s, x(s)) \, ds) .$$

Les propriétés des transformations T_t se trouvent dans F. Murat et J. Simon [6] (resp. dans J.P. Zolésio [4], [5]).

On s'intéressera plus aux secondes déformations qui, pour t petit, possèdent les mêmes propriétés que les premières, à savoir T_t et T_t^{-1} sont C^k , mais qui les conservent lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour peu que le champ soit dans l'espace E_∞ (voir [4]). De plus, pour des déformations de domaines définis par des paramètres, il est aisé en général de trouver le champ $V(t, x)$ qui construit la même variation de géométrie que la variation des paramètres. Ainsi, le calcul des dérivées des coûts et des états par rapport aux paramètres n'est plus qu'une question de choix du champ $V(t)$ particulier dans la dérivée générale; pour un exemple de telle situation, voir M. Delfour, G. Payre et J.P. Zolésio [2]. C'est la situation analogue que l'on va envisager pour le déplacement des noeuds d'une triangularisation, les noeuds étant des paramètres.

1.2. Le cas des champs V linéaires affines (resp. $V(t, \cdot)$ linéaires affines)

Supposons que

$$V(x) = (V_1(x), V_2(x)) \quad (\text{resp. } V(t, x) = (V_1(t, x), V_2(t, x)))$$

avec $x = (x_1, x_2)$ et

$$(5) \quad V_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + b_i \quad (\text{resp. } V_i(t, x) = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + b_i(t)) ,$$

les fonctions $a_{ij}(t)$ étant continues.

LEMME 1. Pour ces deux types de champs V , les applications T_t et T_t^{-1} sont linéaires affines.

DÉMONSTRATION (par les champs $V(t, x)$). Soient x et y dans R^2 et

$$x(t) = x + \int_0^t (a(s) \cdot x(s) + b(s)) \, ds ,$$

$$y(t) = y + \int_0^t (a(s) \cdot y(s) + b(s)) \, ds ,$$

les courbes intégrales du champ V issues de x et de y . Il est clair que

$$\alpha x(t) + \beta y(t) = \alpha x + \beta y + \int_0^t [a(s) \cdot (\alpha x(s) + \beta y(s)) + (\alpha + \beta)b(s)] \, ds$$

est la courbe intégrale du champ V issue de $\alpha x + \beta y$ si $\alpha + \beta = 1$, soit

$$T_t(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha T_t(x) + (1 - \alpha)T_t(y)$$

donc

$$T_t(\alpha x) - T_t(0) = \alpha(T_t(x) - T_t(0)) ,$$

et enfin

$$\begin{aligned} T_t(\mu x + \lambda y) - T_t(0) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} (T_t((\lambda + \mu)x) - T_t(0)) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (T_t((\lambda + \mu)y) - T_t(0)) \\ &= \mu(T_t(x) - T_t(0)) + \lambda(T_t(y) - T_t(0)) \end{aligned}$$

et $x \mapsto T_t(x) - T_t(0)$ est donc linéaire. $\square$

On obtient immédiatement le

LEMME 2. (1) Si K est un triangle dans R^2 , $K^t = T_t(K)$ est un triangle dans R^2 . (2) Si v est une fonction linéaire affine sur R^2 , $v \circ T_t^{-1}$ et $v \circ T_t$ le sont également.

1.3. Le cas des champs $V(t)$ linéaires affines par morceaux et la déformation des triangularisations

Ω_h est un ouvert polygonal triangularisé. On note $M_1, M_2, \dots, M_p$ les noeuds situés sur la frontière Γ_h , $M_{p+1}, M_{p+2}, \dots, M_{p+q}$ les noeuds intérieurs. τ_h la triangularisation de Ω_h , soient $K_1, K_2, \dots, K_r$ les triangles composant τ_h ; $M_i = (x_i, y_i)$ les coordonnées des noeuds.

Déformations paramétrées: Pour tout $(r, s) = (r_i, s_i) \in \mathbb{R}^{2q}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|t| < \varepsilon$ implique que les points

$$M_i^t = (x_i + tr_i, y_i + ts_i)$$

sont les sommets d'une triangularisation τ_h^t (ayant même table topologique que τ_h) du domaine polygonal Ω_h^t ayant pour noeuds frontières les points M_i^t , $1 \leq i \leq p$.

$\mathcal{V}_h^t$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur Ω_h^t , linéaires affines sur chaque triangle K_k^t , avec sa base canonique (d'espace vectoriel):

$$1 \leq i \leq p + q, \quad e_i^t \in \mathcal{V}_h^t, \quad e_i^t(M_j^t) = \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker}).$$

Considérons les champs définis par

$$(6) \quad V(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{p+q} r_i e_i(x, y), \sum_{i=1}^{p+q} s_i e_i(x, y) \right)$$

$$(\text{resp. } V(t, x, y) = \left(\sum_{i=1}^{p+q} r_i e_i^t(x, y), \sum_{i=1}^{p+q} s_i e_i^t(x, y) \right)).$$

LEMME 3. Les transformations T_t et T_t^{-1} (associées à ces champs) sont continues et linéaires affines par morceaux (c'est-à-dire sur chaque triangle K_k de τ_h).

DÉMONSTRATION pour les champs $V(t, x, y)$. Considérons un triangle K_k de τ_h . On lui associe le champ linéaire affine $V_k(t, \cdot)$ défini sur $\mathbb{R}^2$ par

$$V_k(t, \cdot) \big|_{K_k^t} = V(t, \cdot) \big|_{K_k^t}.$$

Ce champ V_k définit une transformation T_t^k de R^2 qui est linéaire affine d'après le Lemme 1; avec le Lemme 2, on vérifie que $T_t^k(K_k) = K_k^t$. Ainsi, les applications T_t^k , pour $i \leq k \leq r$, sont linéaires affines et coïncident sur les noeuds M_i et donc sur les côtés des triangles K_k . Il en résulte que la transformation T_t (associée au champ $V(t, \cdot)$) et son inverse T_t^{-1} sont définies simplement par leurs restrictions à chaque triangle:

$$T_t \big|_{K_k} = T_t^k \big|_{K_k} \quad \text{et} \quad T_t^{-1} \big|_{K_k^t} = (T_t^k)^{-1} \big|_{K_k^t}. \quad \square$$

COROLLAIRE 4. Les champs V étant tels qu'en (6), on a

$$T_t(\Omega_h) = \Omega_h^t, \quad T_t(K_j) = K_j^t, \quad T_t(M_j) = M_j^t,$$

$$v^t \in \mathcal{V}_h^t \iff v^t \circ T_t \in \mathcal{V}_h.$$

2. Dérivation par rapport aux noeuds

2.1. Dérivation de l'état u

V étant un champ tel qu'en (6), si u_t est un élément de $\mathcal{V}_h^t$, par le Corollaire 4, on a:

$$(7) \quad u^t = u_t \circ T_t$$

est un élément de $\mathcal{V}_h$ (sous-espace de $H^1(\Omega_h)$) donc s'écrit

$$u^t = \sum_{i=1}^{p+q} u_i(t) e_i$$

et on note la dérivée, si elle existe,

$$(8) \quad \dot{u} = \frac{d}{dt} u^t \big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{p+q} u_i'(0) e_i$$

élément de $\mathcal{V}_h$.

$\dot{u}$ est la dérivée eulérienne, par rapport au champ V défini par (6).

Notons que la dérivée u' analogue à (2) n'est pas un élément de V_h car

$$u' = \dot{u} - \nabla u \cdot V(0) ,$$

$V(0) \in V_h$, mais u n'est pas continue, ainsi u' est linéaire affine par triangle mais pas continue.

2.2. Transport et dérivation des formes bilinéaires

Comme dans la situation des déformations générales, on a le champ V étant défini par (6), u_t et v_t dans V_h^t :

$$\begin{aligned} \int_{K_k^t} \nabla u_t \nabla v_t \, dx &= \int_{K_k} \langle A_k(t) \nabla u^t, \nabla (v_t \circ T_t^k) \rangle \, dx , \\ \int_{K_k^t} F v_t \, dx &= \int_{K_k} F \circ T_t^k J_t^k v^t \, dx , \end{aligned}$$

où $A(t)$ est la matrice 2×2 définie par

$$(9) \quad \begin{cases} A_k(t) = J_t^k (DT_t^k)^{-1} \cdot (DT_t^k)^{-1} , & \text{avec } A_k(0) = I_d , \\ J_t^k = (\det DT_t^k) . \end{cases}$$

Enfin, en définissant la matrice $A(t)$ et J_t par

$$\begin{aligned} A(t)|_{K_k} &= A_k(t) , \\ J_t|_{K_k} &= J_t^k , \end{aligned}$$

on obtient

$$(10) \quad \begin{cases} \int_{\Omega_h^t} \nabla u_t \nabla v_t \, dx = \int_{\Omega_h} \langle A(t) \nabla u^t, \nabla (v_t \circ T_t) \rangle \, dx \\ \int_{\Omega_h^t} F v_t \, dx = \int_{\Omega_h} F \circ T_t J_t v^t \, dx . \end{cases}$$

La fonction matricielle $x \rightarrow A(t, x)$ est continue sur Ω_h^t et C^∞ sur K_k^t (ainsi

que T_t et J_t) et chaque matrice A_k est dérivable par rapport à t dans $C^\infty(\Omega_h)$ (et de même pour J_k). Donc, $t \rightarrow A(t)$ et $t \rightarrow J(t)$ sont dérivables dans $L^\infty(\Omega_h)$ et en $t = 0$ on a

$$A' = \frac{d}{dt} A(t) \Big|_{t=0} = \operatorname{div} V(0) - (DV(0) + {}^*DV(0)) ,$$

et donc la dérivation des formes bilinéaires est donnée par,

$$\forall v \in H^1(\Omega_h) , \quad u^t \in C^1([0, \epsilon], V_h) ,$$

$$(10') \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_h} \langle A(t) \nabla u^t, \nabla v \rangle \, dx \Big|_{t=0} &= \int_{\Omega_h} (\langle A' \nabla u, \nabla v \rangle + \langle \nabla \dot{u}, \nabla v \rangle) \, dx \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_h} F \circ T_t J_t v^t \, dx \Big|_{t=0} &= \int_{\Omega_h} \operatorname{div}(FV(0)) v \, dx . \end{aligned}$$

2.3. Dérivées partielles par rapport aux noeuds

Le but est de calculer le gradient des fonctions coût par rapport aux noeuds de la triangularisation, c'est-à-dire les dérivées partielles par rapport aux variables x_i et y_i . Pour cela, il suffira de caractériser la *dérivée eulérienne partielle* $\dot{u}_{x_i}$ (resp. $\dot{u}_{y_i}$) qui sont les valeurs de $\dot{u}$ pour les choix:

$$V(t) = (e_i^t, 0) \quad (\text{resp.} \quad V(t) = (0, e_i^t)) .$$

La matrice A' prend alors une forme simple:

$$(11) \quad A' = - \begin{pmatrix} \partial_1 e_i & \partial_2 e_i \\ \partial_2 e_i & -\partial_1 e_i \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \quad A' = - \begin{pmatrix} -\partial_2 e_i & \partial_1 e_i \\ \partial_1 e_i & \partial_2 e_i \end{pmatrix})$$

2.4. Le cas d'un problème de Dirichlet

$u_t \in V_h^t$ (sous-espace de $H_0^1(\Omega_h^t)$) est solution du système linéaire suivant:

$$(12) \quad \int_{\Omega_h^t} \nabla u_t \nabla v_t \, dx = \int_{\Omega_h^t} F v_t \, dx , \quad \forall v_t \in V_h^t ,$$

F étant donnée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.4.1. Dérivée eulérienne $\dot{u}$

Avec (10), on obtient

$$(13) \quad \begin{cases} u^t = u_t \circ T_t \in V_h, \text{ sous-espace de } H_0^1(\Omega_h) \\ \int_{\Omega_h} \langle A(t) \nabla u^t, \nabla w \rangle dx = \int_{\Omega_h} F \circ T_t J_t w dx, \quad \forall w \in V_h. \end{cases}$$

La fonction u^t se décompose dans la base canonique de l'espace vectoriel V_h :
 $u^t = \sum u_i(t) e_i$ et $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ s'écrit comme solution du système linéaire $a(t) \cdot u(t) = f$, où $a(t)$ est la matrice

$$a(t)_{ij} = \int_{\Omega_h} \langle A(t) \nabla e_j, \nabla e_i \rangle dx$$

et f , le vecteur de composante

$$f_i = \int_{\Omega_h} F \circ T_t J_t e_i dx.$$

En posant $\phi(t, u) = a(t) \cdot u - f$, application définie de $R \times R^r$ dans R^r , on vérifie que le théorème des fonctions implicites s'applique (plus aisément que dans le cas général), la seule vérification étant le calcul de la dérivée $\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, u)$ qui est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, u) = a'(0) \cdot u - f.$$

Il suffit donc, pour un champ V donné, de calculer $a'(0)$ en utilisant A' donné par (11). On a donc

PROPOSITION 7. L'application $t \rightarrow u^t$ est dans $C^1([0, \varepsilon], V_h)$. Sa dérivée $\dot{u}$ en $t = 0$ est caractérisée par le système linéaire

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{u} \in V_h, \quad \forall v \in V_h \\ \int_{\Omega_h} \nabla \dot{u} \nabla v dx = - \int_{\Omega_h} \langle A' \nabla u, \nabla v \rangle + \int_{\Omega_h} \text{div}(FV(0)) v dx. \end{cases}$$

2.4.2. Dérivée partielle $\dot{u}_{x_i}$ eulérienne

On fait dans (14) le choix des vitesses indiquées en 2.3 et ainsi la matrice A' prend la forme simple indiquée en (11) et on obtient la

PROPOSITION 8. u étant la solution du problème de Dirichlet (12), $M_i = (x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq p + q$, les noeuds de la triangularisation de Ω_h ; la dérivée eulérienne $\dot{u}_{x_i}$ est solution du système linéaire suivant:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{x_i} &\in V_h, \quad \forall v \in V_h, \\ \int_{\Omega_h} \nabla \dot{u}_{x_i} \nabla v \, dx &= - \int_{\Omega_h} [\partial_1 e_i (\partial_1 u \partial_1 v - \partial_2 u \partial_2 v) + \partial_2 e_i (\partial_1 u \partial_2 v + \partial_2 u \partial_1 v)] \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega_h} \partial_1 (Fe_i) v \, dx. \end{aligned}$$

La dérivée partielle eulérienne $\dot{u}_{y_i}$ est la solution du système

$$\begin{aligned} \dot{u}_{y_i} &\in V_h, \quad \forall v \in V_h \\ \int_{\Omega_h} \nabla \dot{u}_{y_i} \nabla v \, dx &= - \int_{\Omega_h} [\partial_1 e_i (\partial_1 u \partial_2 v + \partial_2 u \partial_1 v) + \partial_2 e_i (\partial_2 u \partial_2 v - \partial_1 u \partial_1 v)] \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega_h} \partial_2 (Fe_i) v \, dx. \end{aligned}$$

3. Dérivée des fonctions coût par rapport aux noeuds de la triangularisation

Considérons l'exemple simple de l'observation répartie de l'état:

$$(15) \quad J(\Omega_h) = \int_{\Omega_h} \frac{1}{2} (u - Z)^2 \, dx, \quad u \in V_h,$$

u étant la solution de (12). Z est donnée dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Le champ V étant tel qu'en (6) et les transformations T_t étant définies par le Lemme 3, on a avec (7):

$$J(\Omega_h^t) = \int_{\Omega_h} \frac{1}{2} (u^t - Z \circ T_t) J_t \, dx .$$

Cette intégrale se décompose en intégrales sur les triangles K_k où T_t et J_t peuvent être remplacés par T_t^k et J_t^k . On obtient alors les dérivées en t , à $t = 0$, et on a :

$$(15') \quad dJ(\Omega_h, V) = \int_{\Omega_h} [(\dot{u} - \nabla Z \cdot V(0))(u - Z) + \frac{1}{2}(u - Z)^2 \operatorname{div} V(0)] \, dx .$$

On introduit alors l'état adjoint défini par le système linéaire

$$p \in V_h, \quad \forall v \in V_h ,$$

$$(16) \quad \int_{\Omega_h} \nabla p \nabla v \, dx = \int_{\Omega_h} (u - Z) v \, dx .$$

En utilisant (16) dans (15') :

$$(17) \quad dJ(\Omega_h, V) = \int_{\Omega_h} \nabla \dot{u} \nabla p \, dx + \int_{\Omega_h} [-\nabla Z V(0)(u - Z) + \frac{1}{2}(u - Z)^2 \operatorname{div} V(0)] \, dx .$$

Ceci étant pour un champ général V tel qu'en (6), mais lorsque l'on calcule les dérivées partielles du coût J par rapport aux coordonnées x_i et y_i des noeuds M_i de la triangularisation de Ω_h , on fait les choix indiqués en 2.3 pour la vitesse V . L'expression (17) se simplifie et l'on a, avec 2.4.2, le

THÉORÈME. u et p sont les solutions des systèmes linéaires (12) et (16), $J(\Omega_h)$ est le coût associé à l'observation répartie définie en (15), x_i et y_i sont les coordonnées du noeud M_i de la triangularisation du domaine polygonal Ω_h . Les dérivées partielles du coût par rapport aux x_i et y_i sont données par:

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} J(\Omega_h) = & \int_{\Omega_h} [\partial_1 e_i (\partial_1 u \partial_1 p - \partial_2 u \partial_2 p) + \partial_2 e_i (\partial_1 u \partial_1 p + \partial_2 u \partial_2 p)] \, dx \\ & + \int_{\Omega_h} \partial_1 (F e_i) p \, dx - \int_{\Omega_h} e_i \partial_1 Z (u - Z) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} (u - Z)^2 \partial_1 e_i \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} J(\Omega_h) = & - \int_{\Omega_h} [\partial_2 e_i (\partial_1 u \partial_1 p - \partial_2 u \partial_2 p) - \partial_1 e_i (\partial_1 u \partial_2 p + \partial_2 u \partial_1 p)] dx \\ & + \int_{\Omega_h} \partial_2 (Fe_i) p dx - \int_{\Omega_h} e_i \partial_2 Z(u - Z) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} (u - Z)^2 \partial_2 e_i dx . \end{aligned}$$

REMARQUE. Dans les expressions (18), les intégrales ne portent en fait que sur le support de la fonction e_i . Supposons que $I_i \subset \mathbb{N}$ est l'ensemble des numéros des triangles composant le support de la fonction de base e_i , alors chacune des intégrales de (18) peut s'écrire comme une intégrale sur l'ensemble

$\bigcup_{k \in U_i} K_k$. Les fonctions $\partial_j e_i$, $\partial_i u \partial_j p$, etc., sont constantes sur chaque triangle K_k , donc (18) peut s'écrire simplement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} J(\Omega_h) = & \sum_{k \in I_i} [\partial_1 e_i (\partial_1 u \partial_1 p - \partial_2 u \partial_2 p) + \partial_2 e_i (\partial_1 u \partial_2 p + \partial_2 u \partial_1 p)](k) \text{mes}(K_k) \\ (18') \quad & + \frac{1}{2} \sum_{k \in I_i} \partial_1 e_i(k) \int_{K_k} (u - Z) dx + \sum_{k \in I_i} \int_{K_k} \partial_1 (Fe_i) p - e_i \partial_1 Z(u - Z) dx \end{aligned}$$

et de même, pour la dérivée partielle par rapport à y_i . Notons qu'un seul état adjoint suffit pour toutes les dérivées partielles.

Ces dérivées partielles ont été obtenues différemment par O. Pironneau dès 1977, voir par exemple [3]. Cependant, la technique utilisée ici est systématique et recopie la démarche des déformations générales abordées dans [1], [4], [5], [6] et d'autres problèmes tels que l'élasticité, Navier-Stokes, etc., sans aucune difficulté; faisant apparaître ces dérivées partielles comme des cas particuliers de la situation générale (de la même façon que les domaines paramétrés considérés en [2]).

4. Dérivée du coût par rapport aux (seuls) noeuds situés sur la frontière

4.1. Utilisation des dérivées par rapport aux noeuds intérieurs en optimisation de domaines

Dès le paragraphe 1.3, nous avons distingué les noeuds frontières $M_1, \dots, M_p$ situés sur la frontière Γ_h de Ω_h et les noeuds intérieurs

$M_{p+1}, \dots, M_q$ situés à l'intérieur.

La géométrie du domaine polygonal Ω_h est définie par les seuls paramètres $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_p, y_p$, c'est-à-dire les coordonnées des noeuds situés sur la frontière (il est clair qu'une perturbation des seuls noeuds intérieurs $M_{p+1}, \dots, M_q$ n'affecte pas la géométrie du domaine Ω_h).

Le mouvement des noeuds intérieurs doit donc se déduire du mouvement des noeuds situés sur la frontière. Ceci est un choix, choix pouvant être réalisé de diverses façons. Soulignons bien que le mouvement des noeuds intérieurs ne doit pas avoir lieu en vue de minimiser la fonction coût J du problème mais simplement de satisfaire à la bonne approximation de la méthode des éléments finis utilisée sur le domaine Ω_h . En pratique, ce choix est souvent réalisé par la donnée d'une application $\theta : \mathbb{R}^{2p} \rightarrow \mathbb{R}^{2q}$, application qui positionne les noeuds intérieurs en fonction des noeuds situés sur la frontière Γ_h . (En général, ce choix est fait de façon très "implicite" par les utilisateurs.) C'est-à-dire que

$$(x_{p+1}, y_{p+1}, \dots, x_{p+q}, y_{p+q}) = \theta(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p)$$

et on suppose l'application θ dérivable, et on note

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i}, \frac{\partial x_j}{\partial y_i}, \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \frac{\partial y_j}{\partial y_i}, \quad 1 \leq i \leq p, \quad p+1 \leq j \leq p+q,$$

les éléments qui composent la matrice jacobienne $D\theta$.

La fonction coût à minimiser est alors

$$(19) \quad j_\theta = j_\theta(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p) = J(\Omega_h(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p, \theta(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p))) .$$

Ce coût dépend du choix de θ . Il est donc normal que son gradient en dépende; en fait, il n'en dépend que par la matrice jacobienne $D\theta$:

$$1 \leq i \leq p,$$

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} j_\theta(x_1, \dots, y_p) &= \frac{\partial}{\partial x_i} J(\Omega_h) + \sum_{\ell=p+1}^{p+q} \frac{\partial}{\partial x_\ell} J(\Omega_h) \frac{\partial x_\ell}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_\ell} J(\Omega_h) \frac{\partial y_\ell}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} j(x_1, \dots, x_p) &= \frac{\partial}{\partial y_i} J(\Omega_h) + \sum_{\ell=p+1}^{p+q} \frac{\partial}{\partial x_\ell} J(\Omega_h) \frac{\partial x_\ell}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_\ell} J(\Omega_h) \frac{\partial y_\ell}{\partial y_i} . \end{aligned}$$

Les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_\ell} J$, $\frac{\partial}{\partial y_\ell} J$, $\frac{\partial}{\partial x_i} J$, $\frac{\partial}{\partial y_i} J$ se calculent comme en (18), (18') à l'aide d'un seul état adjoint p .

REMARQUE. Le gradient du coût j ne dépend en fait que de la matrice jacobienne $D\theta$. Il n'est donc pas nécessaire, pour utiliser les expressions (2) des dérivées du coût j , d'avoir une expression explicite de l'application θ .

ORIENTATION. Nous donnons deux exemples de calculs de gradients par rapport aux seuls noeuds situés sur la frontière: dans le premier, on envisage la situation assez fréquente où θ est une application explicite, elle définit la position des noeuds à partir de la position des noeuds situés sur une partie de la frontière. Dans le deuxième exemple, seule $D\theta$ est explicitable.

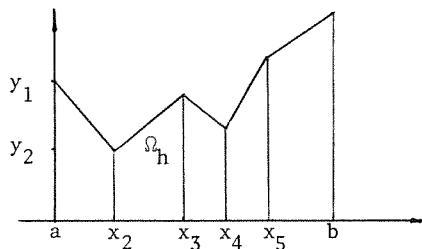
4.2. Premier exemple: θ et $D\theta$ sont explicites

Ω_h est un hypographe:

$$\Omega_h = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq g(x)\},$$

g étant une fonction positive continue, linéaire affine par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire que le graphe de g est une ligne brisée de sommets (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$, x_i étant une subdivision de l'intervalle (a, b) ,

$$x_1 = a < x_2 < \dots < x_n = b.$$



On décide de diviser chaque segment vertical en $m + 1$ segments égaux (cette décision réside dans le choix de l'application θ) . Les noeuds sont alors les points

$$(x_{ij}, y_{ij}) = (x_i, j \frac{1}{m+1} y_i) , \quad 1 \leq i \leq n , \quad 0 \leq j \leq m + 1 ,$$

les noeuds intérieurs étant ceux pour lesquels $2 \leq i \leq n - 1$, et $1 \leq j \leq m$.

Les paramètres qui définissent la géométrie sont les coordonnées des noeuds placés sur le graphe de g (la ligne brisée), c'est-à-dire les (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$; tous les autres noeuds, intérieurs ou pas, sont définis en fonction de ceux-ci. Notons que

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} y_{ij} &= 0 , \quad \frac{\partial}{\partial y_k} y_{ij} = \frac{j}{m+1} \delta_{kj} , \\ \frac{\partial}{\partial x_k} x_{ij} &= \delta_{ki} , \quad \frac{\partial}{\partial y_k} x_{ij} = 0 . \end{aligned}$$

(21) est la donnée de la matrice $D\theta$; les dérivées partielles (2) s'écrivent alors:

$$1 \leq i \leq n ,$$

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} j_\theta(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) &= \frac{\partial}{\partial x_i} J(\Omega_n) + \sum_{j=0}^{m+1} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} J(\Omega_n) \\ \frac{\partial}{\partial y_i} j_\theta(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) &= \frac{\partial}{\partial y_i} J(\Omega_n) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial y_{ij}} J(\Omega_n) \frac{j}{m+1} \end{aligned}$$

où les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i} J$, $\frac{\partial}{\partial x_{ij}} J$, ... , se calculent comme en (18) avec un seul état adjoint p et sont des intégrales portant sur le support de la fonction de base $e_i, e_{ij}, \dots$ attachée aux noeuds $(x_i, y_i), (x_{ij}, y_{ij}), \dots$

4.3. Deuxième exemple: θ est implicite mais $D\theta$ est explicitable

Ω_h est un domaine polygonal triangularisé, M_i , $1 \leq i \leq p$, sont les noeuds placés sur la frontière Γ_h , M_j , $p + 1 \leq j \leq p + q$, les noeuds à l'intérieur. La donnée de la matrice jacobienne $D\theta$ est la donnée des dérivées partielles $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$, $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$, $\frac{\partial y_j}{\partial y_i}$.

Un procédé est de considérer une fonction π positive sur Ω_h dont la courbe de niveau zéro soit Γ_h et dont les courbes de niveau $\pi^{-1}(t)$, $0 \leq t \leq \max \pi$, soient le plus régulières possible, et de déplacer les noeuds intérieurs de façon à conserver globalement les courbes de niveau de π :

Supposons que x_i (resp. y_i) soit déplacé en $x_i + t$ (resp. $y_i + t$), les autres noeuds étant fixes; le domaine Ω_h est transformé en Ω_h^t (la déformation n'agissant en fait que sur les triangles dont M_i est sommet).

Faisons par exemple le choix de

$$\pi_t \in V_h^t \subset H_0^1(\Omega_h^t),$$

la solution du système linéaire suivant:

$$(23) \quad \forall v_t \in V_h^t, \quad \int_{\Omega_h^t} \nabla \pi_t \cdot \nabla v_t \, dx = \int_{\Omega_h^t} v_h \, dx.$$

π_t est l'approximation par éléments finis du problème de Dirichlet

$$-\Delta \pi_t = 1 \quad \text{dans } \Omega_t, \quad \pi_t = 0 \quad \text{sur } \Gamma_t$$

par le principe du maximum, π_t est strictement positive dans Ω_h^t et réalise son maximum en un noeud intérieur M_{j*} (puisque π_t est linéaire affine par triangle). Soit

$$\pi_\infty^t = \max_{x \in \Omega_h^t} \pi_t(x) = \pi_t(M_{j*}),$$

la dérivée de ce maximum.

$$\pi_\infty' = \frac{d}{dt} \pi_t(M_{j*}) \big|_{t=0}$$

est donnée par

$$\pi_\infty' = \dot{\pi}_{x_i}(M_{j*}) \quad (\text{resp.} \quad \pi_\infty' = \dot{\pi}_{y_i}(M_{j*})),$$

où $\dot{\pi}_{x_i}$ (resp. $\dot{\pi}_{y_i}$) est la dérivée eulérienne partielle décrite en 2.3 et

caractérisée par la Proposition 8.

Les courbes de niveau de la fonction π_t sont les ensembles:

$$\pi_t^{-1}(s), \quad 0 \leq s \leq \pi_\infty^t = \pi_\infty + t\pi_\infty' + o(t).$$

Les courbes de niveau de la fonction π sont les ensembles:

$$\pi^{-1}(r), \quad 0 \leq r \leq \pi_\infty.$$

La déformation intérieure du domaine Ω_h (c'est-à-dire le mouvement des noeuds intérieurs) doit être telle que la courbe de niveau $\pi^{-1}(r)$ se déforme en la courbe de niveau $\pi_t^{-1}(r_t)$ avec

$$\frac{r}{\pi_\infty} = \frac{r_t}{\pi_\infty + t\pi_\infty'}.$$

Soit

$$r_t = r \left(1 + \frac{\pi_\infty'}{\pi_\infty} t \right)$$

c'est-à-dire que le noeud intérieur M_j se déforme en M_j^t tel que:

$$\pi_t(M_j^t) = \pi(M_j) \left(1 + t \frac{\pi_\infty'}{\pi_\infty} \right).$$

En prenant la dérivée par rapport à t , en $t = 0$, de cette expression on obtient:

(notons que $\pi_t(M_j^t) = \pi_t((T_t^i)^{-1}(M_j^t))$, puisque la déformation T_t^i , linéaire affine par morceaux, associée au déplacement du noeud frontière M_i , ne fait pas bouger le noeud intérieur M_j)

$$\dot{\pi}_{x_i}(M_j) + \nabla \pi(M_j) (-V_i(M_j) - M_j') = \pi(M_j) \frac{\pi_\infty'}{\pi_\infty} = 0$$

et la dérivée du noeud intérieur M_j par rapport à x_i (resp. y_i) est

$$M_j' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \\ \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \quad M_j' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_j}{\partial y_i} \end{pmatrix})$$

doit vérifier la condition

$$M_j' \cdot \nabla \pi(M_j) = \dot{\pi}_{x_i}(M_j) - \pi(M_j) \frac{\pi_\infty'}{\pi_\infty} \quad (\text{resp.} \quad \dot{\pi}_{y_i}(M_j) - r(M_j) \frac{\pi_\infty'}{\pi_\infty}) .$$

Par exemple, pour $j \neq j_*$.

$$(24)_1 \quad M_j' = (\dot{\pi}_{x_i}(M_j) - r(M_j) \frac{\pi_\infty'}{\pi_\infty}) |\nabla \pi(M_j)|^{-2} \nabla \pi(M_j) ,$$

c'est-à-dire que le point M_j se déplacera toujours le long des courbes de gradient de π . Notons que π ne possède pas de gradient au point M_j (on a supposé π continument dérivable aux noeuds dans la dérivation en $t = 0$). On prendra par exemple une valeur moyenne de $\nabla \pi(M_j)$ sur chaque triangle dont M_j est sommet, et pour $j = j_*$

$$(24)_2 \quad M_{j_*}' \text{ sera par exemple la moyenne des } M_k', \quad k \text{ décrivant les voisins de } j_* .$$

Ce choix (24) détermine la matrice jacobienne $D\theta$ et permet donc le calcul du gradient du coût j_θ par rapport aux coordonnées (x_i, y_i) des noeuds situés sur la frontière. Un tel calcul est lourd à mettre en oeuvre, nécessitant le calcul des fonctions π_{x_i} et π_{y_i} de Ω_h , les dérivées partielles eulériennes que l'on a caractérisées à la Proposition 8.

5. Dérivée partielle eulérienne pour un problème non linéaire

Comme précédemment, Ω_h est l'ouvert polygonal triangularisé, M_j les noeuds intérieurs, M_i ceux situés sur la frontière Γ_h ; V_h le sous-espace de $W_0^{1,p}(\Omega_h)$ des fonctions continues linéaires affines sur chaque triangle. Avec $4 \leq p < +\infty$, $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$, u est la solution du problème

$$(25) \quad u \in V_h, \quad \forall v \in V_h, \quad \int_{\Omega_h} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_h} Fv \, dx .$$

Ce problème variationnel bien connu possède une solution unique. Si U est la solution dans $W_0^{1,p}(\Omega_h)$ de

$$\operatorname{div}(\|\nabla U\|^{p-2} \nabla U) = F ,$$

alors on trouve dans Ph. Ciarlet [7] les majorations, lorsque U est dans $W^{2,p}(\Omega_h)$

$$(26) \quad \|U - u\|_{W_o^{1,p}(\Omega_h)} \leq C(\|F\|, \|U\|_{W^{2,p}}) h^{1/p-1} ,$$

V étant un champ continu linéaire affine par triangle tel qu'en (6), T_t la transformation (linéaire affine par triangle associée, Ω_h est déformé en Ω_h^t et si $u_t \in V_h^t$ est la solution de

$$(27) \quad \forall v_t \in V_h^t, \quad \int_{\Omega_h^t} \|\nabla u_t\|^{p-2} \nabla u_t \cdot \nabla v_t \, dx = \int_{\Omega_h^t} F v_t \, dx .$$

Par le Corollaire 4, on a $u^t = u_t \circ T_t$ est un élément de V_h (sous-espace de $W_o^{1,p}(\Omega_h)$). Posons

$$(28) \quad \phi_k(t, u) = \int_{\Omega_h} \|*(DT_t)^{-1} \cdot \nabla u\|^{p-2} \langle A(t) \nabla u, \nabla e_k \rangle \, dx - \int_{\Omega_h} J_t F \circ T_t \, dx$$

où $A(t)$ est la matrice définie (triangle par triangle) en (9) ainsi que J_t . Par changement de variable dans (27), il vient

$$p+1 \leq k \leq p+q, \quad \phi_k(t, u^t) = 0, \quad \text{soit} \quad \phi(t, u^t) = 0 .$$

On utilise alors le théorème des fonctions implicites. Pour cela, on calcule les dérivées de ϕ . Pour u et v dans V_h , on a:

$$D_u \phi_k(0, u) \cdot v = \int_{\Omega_h} (\|\nabla u\|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla e_k + (p-2) \|\nabla u\|^{p-4} (\nabla u \cdot \nabla v) (\nabla u \cdot \nabla e_k)) \, dx .$$

La matrice de coefficients $b_{k,\ell} = D_u \phi_k(0, u) \cdot e_\ell$ est coercitive sous l'hypothèse

$$(29) \quad \nabla u \text{ ne s'annule sur aucun triangle de } \Omega_h .$$

Sous cette hypothèse, il en résulte que $D_u \phi(0, u)$ est un isomorphisme de R^q . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_k(0, u) = & \int_{\Omega_h} (\|\nabla u\|^{p-2} \langle A' \cdot \nabla u, \nabla e_k \rangle - (p-2) \|\nabla u\|^{p-4} \langle *DV(0) \cdot \nabla u, \nabla u \rangle \langle \nabla u, \nabla e_k \rangle) dx \\ & - \int_{\Omega_h} \operatorname{div}(FV(0)) dx, \end{aligned}$$

où A' est définie en 2.2. On a alors la

PROPOSITION 9. *Posons*

$$R_u(y, v) = \int_{\Omega_h} \{ \|\nabla u\|^{p-2} \nabla y \nabla v + (p-2) \|\nabla u\|^{p-4} (\nabla u \nabla y) (\nabla u \nabla v) \} dx.$$

V étant un champ tel qu'en (6), sous l'hypothèse (29) l'application $t \rightarrow u^t = u_t \circ T_t$ est dérivable dans V_h . En $t = 0$, sa valeur $\dot{u}$ est la solution du système linéaire suivant:

$$R_u(\dot{u}, v) = \int_{\Omega_h} \{ (p-2) \|\nabla u\|^{p-4} \langle *DV(0) \cdot \nabla u, \nabla u \rangle \langle \nabla u, \nabla v \rangle, \|\nabla u\|^{p-2} \langle A' \cdot \nabla u, \nabla v \rangle \} dx$$

où u est la solution de (2.5).

En particulier, lorsque le champ V est de la forme $(e_i^t, 0)$ (resp. $(0, e_i^t)$), la matrice A' prend la forme indiquée en (11) et

$$*DV(0) = \begin{pmatrix} \partial_1 e_i & 0 \\ \partial_2 e_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 e_i \\ 0 & \partial_2 e_i \end{pmatrix}).$$

On obtient alors les dérivées partielles eulériennes par rapport aux coordonnées des noeuds (intérieurs ou bien frontaliers) $\dot{u}_{x_i}$ (resp. $\dot{u}_{y_i}$):

PROPOSITION 10. *Sous l'hypothèse (29), les dérivées $\dot{u}_{x_i}$, $\dot{u}_{y_i}$ existent et sont caractérisées par:*

$$\dot{u}_{x_i} \quad \text{et} \quad \dot{u}_{y_i} \in V_h, \quad \forall v \in V_h,$$

$$\begin{aligned}
R_u(\dot{u}_{x_i}, v) &= \int_{\Omega_h} [(p-2)\|\nabla u\|^{p-4}(\partial_1 e_i(\partial_1 u)^2 + \partial_2 e_i \partial_1 u \partial_2 u)(\nabla u \cdot \nabla v) \\
&\quad - \|\nabla u\|^{p-2} \langle A' \cdot \nabla u, \nabla v \rangle + \partial_1(Fe_i)] v \, dx \\
R_u(\dot{u}_{y_i}, v) &= \int_{\Omega_h} [(p-2)\|\nabla u\|^{p-4}(\partial_1 e_i \partial_1 u \partial_2 u + \partial_2 e_i(\partial_2 u)^2)(\nabla u \cdot \nabla v) \\
&\quad - \|\nabla u\|^{p-2} \langle A' \cdot \nabla u, \nabla v \rangle + \partial_2(Fe_i)] v \, dx ,
\end{aligned}$$

où le terme $\langle A' \cdot \nabla u, \nabla v \rangle$ est déjà explicité à la Proposition 8.

On voit donc que si $J(\Omega_h)$ est une observation répartie de u sur Ω_h ou bien une observation frontière de u sur Γ_h , on obtient les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_k} J(\Omega_h)$ et $\frac{\partial}{\partial y_k} J(\Omega_h)$.

Conclusion

Le problème d'identification de domaine associé au problème de Dirichlet et à l'observation répartie utilise trois données:

F , le second membre de l'équation d'état;

Z , la fonction désirée intervenant dans le coût;

θ , (ou simplement $D\theta$) qui détermine, à priori, le mouvement des noeuds intérieurs en fonction de ceux qui définissent (paramétrisent) la géométrie $x_1, y_1, \dots, x_p, y_p$.

On obtient alors une fonction coût $j_\theta(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p)$ dépendant des seuls paramètres de la géométrie et modulo le calcul d'un état adjoint p , on a calculé le gradient de la fonctionnelle j_θ qui fait intervenir explicitement $D\theta$ et les dérivées par rapport à tous les noeuds (intérieurs ou pas) du coût $J(\Omega_h)$.

GÉNÉRALISATION. Nous avons envisagé la situation où le domaine Ω_h dépend d'un nombre fini de paramètres qui sont certaines coordonnées de certains noeuds frontaliers. Les résultats s'étendent de façon évidente à la situation générale où Ω_h dépend d'un nombre fini de paramètres $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$ et l'application θ fournit les coordonnées des noeuds (de tous les noeuds, intérieurs et frontaliers), $D\theta$

fournit toutes les données $\frac{\partial x_i}{\partial \ell_k}$ et $\frac{\partial y_i}{\partial \ell_k}$. Le coût à minimiser s'écrit alors

$j = j_\theta(\ell_1, \dots, \ell_p)$ et de façon analogue à (20), on obtient

$$(20') \quad \frac{\partial}{\partial \ell_k} j_\theta(\ell_1, \dots, \ell_p) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} J(\Omega_h) \frac{\partial x_i}{\partial \ell_k} + \frac{\partial}{\partial y_i} J(\Omega_h) \frac{\partial y_i}{\partial \ell_k}$$

si tous les noeuds M_i de la triangularisation sont numérotés de 1 à N.

Par ailleurs, nous avons envisagé la situation des éléments finis P_1 , mais cette technique est générale et s'étend aux éléments finis isoparamétriques en particulier.

Références

- [1] CÉA, J., *Problems of shape optimal design*, dans "Optimization of Distributed Parameter Structures", Vol. II, J. Céa et Ed. Haug, eds., Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan der Rijn, The Netherlands, 1981, 1005-1088.
- [2] DELFOUR, M., PAYRE, G., ZOLELIO, J.P., *Optimal and suboptimal design of thermal diffusers for communication satellites*, dans les Comptes-rendus du 3^{ième} symposium "Control of Distributed Parameter Systems", Juin 1982, Toulouse (Ed.: J.P. Babary et L. LeLetty).
- [3] PIRONNEAU, O., *Optimal shape design for elliptic systems*, dans "System Modeling and Optimization", R.F. Drenick et F. Kozin, eds., Springer-Verlag, 42-66.
- [4] ZOLÉLIO, J.P., *Identification de domaines par déformations*, Thèse de doctorat d'état, Nice, 1979.
- [5] ZOLÉLIO, J.P., *The material derivatives*, dans "Optimization of Distributed Parameter Structures", Vol. II, J. Céa et E.J. Haug, eds., Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan der Rijn, 1981, 1089-1195.

- [6] MURAT, F. et SIMON, J., *Contrôle par un domaine géométrique*, Publication no 189 de l'Université de Paris VI.
- [7] CIARLET, Ph. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, 1978.

Département de mathématiques
Université de Nice
06034, Nice, Cédex
France

Manuscrit reçu le 20 août 1982.
Révisé le 6 octobre 1983.