

PLURALITÉ DES TOURNOIS HOMOGÈNES DE MÊME ORDRE

Claudette Tabid

1. Introduction

Un *tournoi* $T = (V(T), E(T))$ est un graphe fini orienté (sans boucle), complet et anti-symétrique. Par conséquent,

$$\forall u, v \in V(T) \quad , \quad u \neq v : (u, v) \in E(T) \iff (v, u) \notin E(T) \quad .$$

L'arête orientée $(u, v) \in E(T)$ est appelée un *arc* de u vers v .

L'*affluent* $Q(u)$ en un sommet u dans un tournoi T est le sous-tournoi de T engendré par $\{w \in V(T) : (w, u) \in E(T)\}$. L'*écoulement* $P(u)$ d'un sommet u dans un tournoi T est le sous-tournoi de T engendré par $\{v \in V(T) : (u, v) \in E(T)\}$. Le *degré d'affluence* $d_T^-(u)$ en un sommet u dans un tournoi T est le nombre de sommets dans $Q(u)$. Le *degré d'écoulement* $d_T^+(u)$ d'un sommet u dans un tournoi T est le nombre de sommets dans $P(u)$. Un tournoi T est *régulier* si, pour tout $u \in V(T)$,

$$d_T^-(u) = d_T^+(u) \quad .$$

Rappelons que Kotzig [3,4] a démontré ce qui suit:

(1.1) Tout tournoi régulier d'ordre 7 est isomorphe à exactement un des tournois G_1 , G_2 , G_3 , illustrés dans la Figure 1.

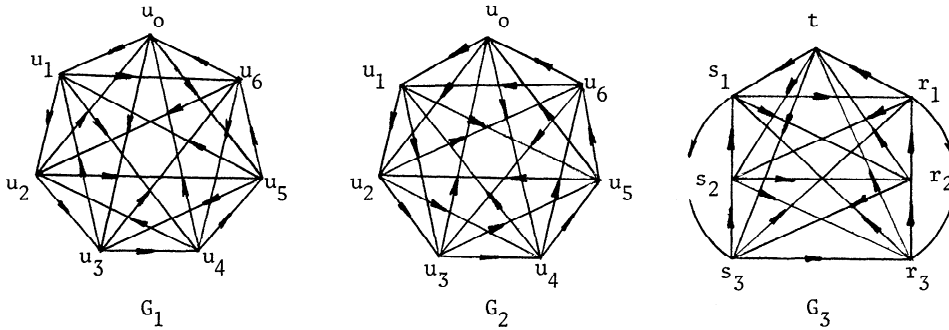


Figure 1. Les tournois réguliers non isomorphes d'ordre 7.

Un tournoi T d'ordre n est *rotatif* si l'on peut numéroté ses sommets par $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ de telle sorte que l'on ait :

$$(u_i, u_j) \in E(T) \Rightarrow (u_{i+1}, u_{j+1}) \in E(T) ,$$

pour toute paire d'indices i, j ; nous supposons que

$$u_s = u_t \Leftrightarrow s \equiv t \pmod{n} .$$

Remarquons qu'un tournoi rotatif est régulier, donc d'ordre impair. Les tournois G_1 et G_2 , illustrés dans la Figure 1, sont rotatifs, tandis que le tournoi G_3 ne l'est pas.

Nous entendons par *cycle*, un *circuit élémentaire* tel que défini dans Berge [1], et par *k-cycle*, un cycle de longueur k . Un tournoi *homogène* est, selon la définition de Kotzig [5], un tournoi muni d'au moins un cycle tel que tout arc appartient à un même nombre de 3-cycles. Kotzig a également établi le théorème suivant :

(1.2) Si tout arc (u, v) d'un tournoi homogène H appartient à k 3-cycles, $k \geq 1$, alors H est régulier d'ordre $4k - 1$.

Nous désignons par $\Gamma_T(u, v)$ le nombre de sommets dans $P(u) \cap P(v)$. Si les sommets u et v coïncident, alors $\Gamma_T(u, u)$ représente tout simplement le degré d'écoulement $d_T^+(u)$ de u dans T . Reid et Brown [6] ont obtenu la

caractérisation suivante des tournois homogènes:

(1.3) Un tournoi T d'ordre $4k - 1$, $k \geq 1$, est homogène si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- (1) $d_T^+(u) = 2k - 1$, pour tout sommet u de T ,
- (2) $\Gamma_T(u, v) = k - 1$, pour toute paire de sommets distincts u et v

de T .

(1.4) COROLLAIRE. Un tournoi régulier T d'ordre $4k - 1$, $k \geq 1$, est homogène si et seulement si l'écoulement $P(u)$ de u dans T est régulier, pour tout sommet u de T .

(1.5) PROPOSITION. Dans un tournoi régulier T d'ordre $4k - 1$, $k \geq 1$, les énoncés suivants sont équivalents:

- (1) l'affluent $Q(u)$ en un sommet quelconque u de T est régulier,
- (2) l'écoulement $P(u)$ d'un sommet quelconque u de T est régulier.

DÉMONSTRATION. Considérons un tournoi régulier T d'ordre $4k - 1$, $k \geq 1$.

Soit u un sommet quelconque de T . L'affluent en u dans T est régulier si et seulement si l'écoulement de u dans le complémentaire $\bar{T}$ de T est régulier. Ce dernier énoncé équivaut à dire que $\bar{T}$ est homogène, d'après (1.4), ou encore que T est homogène. Cet énoncé est équivalent à l'énoncé (2), selon (1.4). $\square$

Reid et Brown [6] ont démontré ce qui suit:

(1.6) Soit n un nombre naturel. Alors il n'existe aucun tournoi T d'ordre $8n + 7$ qui satisfait aux trois conditions suivantes:

- (1) $d_T^+(u) = 4n + 3$, pour tout sommet u de T ,
- (2) $\Gamma_T(u, v) = 2n + 1$, pour toute paire de sommets distincts u et v

de T ,

- (3) $\Gamma_T(u, v, w) = n$, pour tout triplet de sommets distincts u , v et

w de T .

(1.7) PROPOSITION. Soit T un tournoi homogène. Alors il existe un sommet u de T tel que l'écoulement $P(u)$ de u dans T ne soit pas homogène.

DÉMONSTRATION. Soit T un tournoi homogène. Supposons que $P(u)$ soit aussi homogène, pour tout sommet u de T . D'après (1.2), le nombre de sommets de $P(u)$ est congru à -1 modulo 4 ; soit $4k - 1$, $k \geq 1$, ce nombre. Le tournoi T est donc d'ordre $8k - 1$. Comme T et $P(u)$ sont homogènes, pour tout $u \in V(T)$, nous avons :

$$(1) \quad d_T^+(u) = 4k - 1,$$

$$(2) \quad \Gamma_T(u, v) = d_{P(u)}^+(v) = 2k - 1, \quad \forall v \in V(P(u)),$$

$$(3) \quad \Gamma_{P(u)}(v, w) = \Gamma_T(u, v, w) = k - 1, \quad \forall v, w \in V(P(u)), \quad v \neq w,$$

selon (1.3). Mais ceci est impossible, d'après (1.6). Il existe donc un sommet u de T tel que $P(u)$ ne soit pas homogène. $\square$

Comme l'affluent en un sommet quelconque u d'un tournoi T est homogène si et seulement si l'écoulement de u dans le complémentaire $\bar{T}$ de T est homogène, il suit immédiatement de (1.7) le corollaire suivant :

(1.8) COROLLAIRE. Soit T un tournoi homogène. Alors il existe un sommet v de T tel que l'affluent $Q(v)$ en v dans T ne soit pas homogène.

Kotzig [5] a établi le théorème d'existence suivant :

(1.9) Pour tout nombre premier p congru à -1 modulo 4, il existe un tournoi rotatif homogène d'ordre p .

(1.10) REMARQUE. Pour $p = 3, 7, 11$, il existe un et un seul tournoi rotatif homogène d'ordre p (à un isomorphisme près, bien entendu). Le tournoi G_2 illustré dans la Figure 1 est un exemple d'un tel tournoi, pour $p = 7$. En outre, nous pouvons voir facilement que tout tournoi homogène d'ordre 7 est isomorphe à G_2 , les tournois réguliers G_1 et G_3 n'étant pas homogènes (voir (1.1) et (1.2)).

2. Les tournois homogènes d'ordre 15

Pour un entier positif n , on connaissait au maximum un tournoi homogène d'ordre n , à un isomorphisme près, bien entendu. Ceci amena Erdős à poser la question suivante : "Existerait-il une paire de tournois homogènes non isomorphes

ayant un même nombre de sommets donné n ?" Nous donnons une réponse affirmative à cette question pour $n = 15$ et démontrons, de plus, qu'il existe exactement deux tournois homogènes non isomorphes d'ordre 15 .

(2.1) LEMME. Soit H un tournoi homogène d'ordre 15. Alors l'affluent $Q(v)$ en un sommet quelconque v de H n'est pas isomorphe au tournoi G_1 illustré dans la Figure 1.

DÉMONSTRATION. Soit H un tournoi homogène d'ordre 15 . Supposons qu'il existe un sommet v_0 de H tel que $Q(v_0) \simeq G_1$. Posons $V(P(v_0)) = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ et numérotions les sommets de $Q(v_0)$ dans le même ordre que dans la Figure 1, c'est-à-dire que nous posons $V(Q(v_0)) = \{v_8, v_9, \dots, v_{14}\}$ où $v_i = u_{i-8}$, pour tout $i = 8, 9, \dots, 14$.

Considérons les sommets v_8 , v_9 et v_{10} de $Q(v_0)$. Comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_8, v_9) = 0$ et $\Gamma_H(v_8, v_9) = 3$ (puisque H est homogène d'ordre 15 ; voir (1.3)), alors il existe exactement deux indices j_1 et $j_2 \in \{1, 2, \dots, 7\}$ tels que $(v_8, v_{j_1}), (v_9, v_{j_1}), (v_8, v_{j_2})$ et $(v_9, v_{j_2}) \in E(H)$. De même, $\Gamma_{Q(v_0)}(v_8, v_{10}) = 2$ entraîne que (v_{j_1}, v_{10}) et $(v_{j_2}, v_{10}) \in E(H)$. D'autre part, $d_H^+(v_9) = 7$, d'après (1.3); comme v_9 est un sommet du sous-tournoi régulier $Q(v_0)$ de H , alors il existe un seul sommet v_j de $P(v_0)$, qui est distinct des sommets v_{j_1} et v_{j_2} , tel que $(v_9, v_j) \in E(H)$. Mais $\Gamma_{Q(v_0)}(v_9, v_{10}) = 0$; il s'ensuit que $\Gamma_H(v_9, v_{10})$ égale 2 ou 1 selon que (v_{10}, v_{j_1}) ou (v_{j_2}, v_{10}) est un arc de H . Or, dans un cas comme dans l'autre, nous obtenons une contradiction avec le fait que $\Gamma_H(v_9, v_{10}) = 3$. Donc $Q(v) \not\simeq G_1$, pour tout sommet v de H . $\square$

(2.2) REMARQUE. Il suit immédiatement du lemme précédent que $P(v) \not\simeq G_1$, pour tout sommet v d'un tournoi homogène H d'ordre 15 . En effet, si nous supposons qu'il existe un sommet v_0 de H tel que $P(v_0) \simeq G_1$, alors $Q(v_0) \simeq \overline{G}_1 \simeq G_1$ dans le complémentaire $\overline{H}$ de H qui est aussi homogène; ce qui est en contradiction avec (2.1).

(2.3) REMARQUE. Considérons le tournoi régulier G_3 d'ordre 7 et illustré dans la Figure 1. Nous remarquons que:

(a) t est l'unique sommet de G_3 tel que $\Gamma_{G_3}(t, v) = 1$, pour tout sommet v de G_3 distinct de t .

(b) $\Gamma_{G_3}(r_i, s_j) = 1$ si et seulement si $(r_i, s_j) \in E(G_3)$, pour toute paire de sommets r_i de $Q(t)$ et s_j de $P(t)$, où $i, j = 1, 2, 3$.

(2.4) REMARQUE. Soit T un tournoi isomorphe au tournoi G_3 illustré dans la Figure 1 et soit $\phi : V(T) \rightarrow V(G_3)$ cet isomorphisme. Notons q le sommet de T tel que $\phi(q) = t$ et posons $V(Q(q)) = \{m_1, m_2, m_3\}$ et $V(P(q)) = \{n_1, n_2, n_3\}$. Si $(m_1, m_3), (m_1, n_2)$ et $(m_3, n_1) \in E(T)$, alors $\phi(m_1) = r_1$ et $\phi(n_1) = s_1$, pour tout $i = 1, 2, 3$. En effet, comme les sommets r_1, r_2 et r_3 de $Q(t)$ forment un 3-cycle dans le tournoi régulier G_3 , alors il n'y a aucune différence entre eux et nous pouvons supposer que $\phi(m_1) = r_1$; mais $(m_1, m_3) \in E(T)$ et $(r_1, r_3) \in E(G_3)$ entraînent $\phi(m_3) = r_3$ et $\phi(m_2) = r_2$. De plus, comme $(m_1, n_2) \in E(T)$ et s_2 est le seul sommet de $P(t)$ tel que $(r_1, s_2) \in E(G_3)$, alors $\phi(n_2) = s_2$. De même, $(m_3, n_1) \in E(T)$ et $(r_3, s_1) \in E(G_3)$ impliquent $\phi(n_1) = s_1$ et $\phi(n_3) = s_3$.

(2.5) THÉOREME. Il existe au plus deux tournois homogènes non isomorphes d'ordre 15.

DÉMONSTRATION. Soit H un tournoi homogène quelconque d'ordre 15. D'après (1.8) et (1.10), il existe un sommet v_0 de H tel que $Q(v_0) \not\perp G_2$; de plus, $Q(v_0) \not\perp G_1$, selon (2.1). Comme $Q(v_0)$ est régulier d'ordre 7 (voir (1.4) et (1.5)), alors $Q(v_0) \simeq G_3$ (par (1.1)). Posons $V(P(v_0)) = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ et $V(Q(v_0)) = \{v_8, v_9, \dots, v_{14}\}$ et supposons que les sommets de $Q(v_0)$ soient numérotés comme dans la Figure 1, c'est-à-dire que nous posons $v_8 = t$, $v_9 = r_1$, $v_{10} = r_2$, $v_{11} = r_3$, $v_{12} = s_1$, $v_{13} = s_2$ et $v_{14} = s_3$.

D'après (1.3), $d_H^+(v_{12}) = 7$; comme v_{12} est un sommet du sous-tournoi régulier $Q(v_0)$ de H , alors nous pouvons supposer, sans aucune perte de généralité, que $(v_{12}, v_1), (v_{12}, v_2), (v_{12}, v_5), (v_3, v_{12}), (v_4, v_{12}), (v_6, v_{12})$ et (v_7, v_{12}) soient des arcs de H . Comme $\Gamma_H(v_{10}, v_{12}) = 3$ (par (1.3)) et $\Gamma_{Q(v_0)}(v_{10}, v_{12}) = 2$, alors $(v_1, v_{10}), (v_2, v_{10})$ et $(v_5, v_{10}) \in E(H)$; supposons que $(v_6, v_{10}), (v_{10}, v_3), (v_{10}, v_4)$ et $(v_{10}, v_7) \in E(H)$. Comme $\Gamma_H(v_{10}, v_{13}) = 3$ et

$\Gamma_{Q(v_0)}(v_{10}, v_{13}) = 0$, alors nous pouvons supposer que (v_{13}, v_4) , (v_{13}, v_7) et (v_3, v_{13}) soient des arcs de H , puisqu'aucune différence n'existait encore entre les sommets v_3 , v_4 et v_7 . De même $\Gamma_{Q(v_0)}(v_{12}, v_{13}) = 1$ entraîne qu'un seul sommet parmi v_1 , v_2 et v_3 appartient à $V(P(v_{13}))$; supposons donc (v_{13}, v_1) , (v_2, v_{13}) et $(v_5, v_{13}) \in E(H)$; nous avons aussi $(v_6, v_{13}) \in E(H)$. Comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_{11}, v_{13}) = 2$, alors (v_1, v_{11}) , (v_4, v_{11}) et $(v_7, v_{11}) \in E(H)$. Or $\Gamma_{Q(v_0)}(v_{11}, v_{12}) = 1$ entraîne qu'un seul des deux sommets v_2 et v_5 appartient à $V(P(v_{11}))$; comme aucune différence n'existe encore entre ces deux sommets, nous supposons (v_{11}, v_2) et $(v_5, v_{11}) \in E(H)$; il s'ensuit aussi que (v_{11}, v_3) et $(v_{11}, v_6) \in E(H)$.

D'autre part, comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_8, v_{12}) = 1$, alors un seul sommet parmi v_1 , v_2 et v_5 appartient à $V(P(v_8))$. Nous allons démontrer que $(v_8, v_5) \in E(H)$. Supposons d'abord que (v_8, v_1) , (v_2, v_8) et $(v_5, v_8) \in E(H)$. Comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_8, v_{13}) = 1$ et $(v_{13}, v_1) \in E(H)$, alors (v_4, v_8) et $(v_7, v_8) \in E(H)$; de plus, (v_8, v_3) et $(v_8, v_6) \in E(H)$. Il s'ensuit que $\Gamma_H(v_8, v_{11}) = 4$; contradiction avec (1.3). Supposons ensuite que (v_8, v_2) , (v_1, v_8) et $(v_5, v_8) \in E(H)$. Comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_8, v_{11}) = 1$ et $(v_{11}, v_2) \in E(H)$, alors (v_3, v_8) et $(v_6, v_8) \in E(H)$; de plus, (v_8, v_4) et $(v_8, v_7) \in E(H)$. D'où $\Gamma_H(v_8, v_{13}) = 4$; ce qui contredit aussi (1.3). Il s'ensuit que $\{v_1, v_2, v_5\} \cap V(P(v_8)) = \{v_5\}$.

Comme $V(P(v_{13})) \cap V(P(v_0)) = \{v_1, v_4, v_7\}$, $\Gamma_{Q(v_0)}(v_8, v_{13}) = 1$ et $v_1 \notin V(P(v_8))$, alors un seul des sommets v_4 et v_7 (qui ne diffèrent pas encore) appartient à $V(P(v_8))$; soit v_7 ce sommet. Mais $\Gamma_{Q(v_0)}(v_8, v_{10}) = 1$, d'où $(v_3, v_8) \in E(H)$ et, par suite, $(v_8, v_6) \in E(H)$.

D'autre part, $\Gamma_{Q(v_0)}(v_9, v_{12}) = 0$ entraîne qu'un seul sommet parmi v_1 , v_2 et v_5 appartient à $V(Q(v_9))$. Nous allons démontrer que v_5 n'est pas ce sommet. Supposons le contraire; comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_9, v_{13}) = 1$ et $v_1 \in V(P(v_9))$, alors (v_4, v_9) et $(v_7, v_9) \in E(H)$ et, de plus, $\Gamma_{Q(v_0)}(v_9, v_{11}) = 1$ et $v_2 \in V(P(v_9))$ impliquent (v_3, v_9) et $(v_6, v_9) \in E(H)$; d'où $d_H^+(v_9) = 6$; contradiction avec (1.3). Il s'ensuit que $(v_9, v_5) \in E(H)$ et, comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_8, v_9) = 1$,

alors nous avons aussi $(v_6, v_9) \in E(H)$ et $(v_7, v_9) \in E(H)$. De même, $\Gamma_{Q(v_0)}(v_9, v_{14}) = 2$ implique $(v_5, v_{14}) \in E(H)$. Comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_{11}, v_{14}) = 0$, alors il existe un seul sommet parmi v_2, v_3 et v_6 qui appartient à $V(Q(v_{14}))$. Nous allons démontrer que v_6 n'est pas ce sommet. Supposons que $(v_6, v_{14}) \in E(H)$; comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_8, v_{14}) = 1$, alors $(v_{14}, v_7) \in E(H)$; d'où $\Gamma_H(v_{10}, v_{14}) = 4$; ce qui contredit (1.3). Il s'ensuit que $v_6 \in V(P(v_{14}))$ et, par suite, $(v_7, v_{14}) \in E(H)$.

Comme un seul des sommets v_2 et v_3 appartient à $V(Q(v_{14}))$, alors nous allons analyser successivement les deux cas suivants:

- (1) $v_2 \in V(Q(v_{14}))$ et $v_3 \in V(P(v_{14}))$;
- (2) $v_3 \in V(Q(v_{14}))$ et $v_2 \in V(P(v_{14}))$.

CAS (1). Comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_{10}, v_{14}) = 1$, alors $(v_4, v_{14}) \in E(H)$; d'où $(v_{14}, v_1) \in E(H)$. De plus, $\Gamma_{Q(v_0)}(v_9, v_{14}) = 2$ entraîne $(v_1, v_9) \in E(H)$ et $(v_3, v_9) \in E(H)$ et, par suite, $(v_9, v_2) \in E(H)$ et $(v_9, v_4) \in E(H)$.

CAS (2). Comme $\Gamma_{Q(v_0)}(v_{12}, v_{14}) = 1$, alors $(v_1, v_{14}) \in E(H)$; d'où $(v_{14}, v_4) \in E(H)$. Il s'ensuit que $(v_2, v_9) \in E(H)$, $(v_4, v_9) \in E(H)$, $(v_9, v_1) \in E(H)$ et $(v_9, v_3) \in E(H)$, par un raisonnement analogue au cas (1).

Jusqu'à maintenant, nous avons obtenu au maximum deux possibilités pour orienter toutes les arêtes liant les sommets de $Q(v_0)$ avec ceux de $P(v_0)$ dans un tournoi homogène d'ordre 15. Dans chacun des deux cas mentionnés, rappelons que v_0 est un sommet tel que $Q(v_0) \simeq G_3$; nous allons démontrer maintenant que $P(v_0)$ est également isomorphe à G_3 et nous préciserons cet isomorphisme.

CAS (1). Rappelons que v_{10}, v_{13} et v_{14} sont des sommets de $P(v_2) \cap P(v_5)$; comme $\Gamma_H(v_2, v_5) = 3$, par (1.3), alors $\Gamma_{P(v_0)}(v_2, v_5) = 0$. Il s'ensuit que $P(v_0) \not\cong G_2$ (puisque G_2 est homogène d'ordre 7; voir (1.3) et (1.10)). De plus, $P(v_0) \not\cong G_1$, selon (2.2). Il suit immédiatement de (1.4) et (1.1) que $P(v_0) \simeq G_3$; soit $\phi : V(P(v_0)) \rightarrow V(G_3)$ cet isomorphisme. Comme $\Gamma_{P(v_0)}(v_1, v_i) = 1$, pour tout $i = 2, 3, \dots, 7$, alors $\phi(v_1) = t$, selon (2.3). De plus, $\Gamma_H(v_1, v_8) = 3$ entraîne

$$V(Q(v_1)) \cap V(P(v_0)) = \{v_2, v_3, v_4\}$$

et

$$V(P(v_1)) \cap V(P(v_0)) = \{v_5, v_6, v_7\} .$$

Comme $\Gamma_{P(v_0)}(v_4, v_5) = 1$, alors $(v_4, v_5) \in E(H)$, d'après (2.3) . De même, $\Gamma_{P(v_0)}(v_2, v_6) = 1$ implique $(v_2, v_6) \in E(H)$. Mais v_5 , v_8 et v_{11} sont des sommets de $P(v_4) \cap P(v_9)$ et $(v_9, v_2) \in E(H)$; donc $(v_2, v_4) \in E(H)$. Il suit immédiatement de (2.4) que $\phi(v_2) = r_1$, $\phi(v_3) = r_2$, $\phi(v_4) = r_3$, $\phi(v_5) = s_1$, $\phi(v_6) = s_2$ et $\phi(v_7) = s_3$.

CAS (2). Comme v_{10} , v_{11} et v_{14} sont des sommets de $P(v_1) \cap P(v_5)$, alors $\Gamma_{P(v_0)}(v_1, v_5) = 0$ et, par un raisonnement analogue au cas (1), $P(v_0) \simeq G_3$; soit $\Psi : V(P(v_0)) \rightarrow V(G_3)$ cet isomorphisme. Comme $\Gamma_{P(v_0)}(v_3, v_i) = 1$, pour tout $i = 2, 3, \dots, 7$, alors $\Psi(v_3) = t$, d'après (2.3) . De plus, $\Gamma_H(v_3, v_8) = 3$ implique

$$V(Q(v_3)) \cap V(P(v_0)) = \{v_5, v_6, v_7\}$$

et

$$V(P(v_3)) \cap V(P(v_0)) = \{v_1, v_2, v_4\} .$$

Mais $\Gamma_{P(v_0)}(v_7, v_1) = 1$ et $\Gamma_{P(v_0)}(v_5, v_2) = 1$ entraînent respectivement $(v_7, v_1) \in E(H)$, selon (2.3) . Comme v_1 , v_9 et v_{14} sont des sommets de $P(v_7) \cap P(v_{12})$ et $(v_{12}, v_5) \in E(H)$, alors $(v_5, v_7) \in E(H)$. Il suit immédiatement de (2.4) que $\psi(v_5) = r_1$, $\psi(v_6) = r_2$, $\psi(v_7) = r_3$, $\psi(v_1) = s_1$, $\psi(v_2) = s_2$ et $\psi(v_4) = s_3$.

Comme, dans chacun des deux cas ci-dessus, les orientations des arêtes de $P(v_0)$ sont uniquement déterminées, alors le théorème est démontré. $\square$

Notons par H_1 et H_2 les tournois homogènes d'ordre 15 construits respectivement dans les cas (1) et (2) du théorème précédent.

Rappelons que Kotzig [5] a découvert un tournoi homogène K d'ordre 15 . Posons $V(K) = \{a_1, a_2, \dots, a_{15}\}$ et supposons que les sommets de K soient numérotés de telle sorte que la matrice booléenne suivante M soit la matrice associée (voir [1]) à K .

$$M = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

(2.6) REMARQUE. Le tournoi homogène H_1 d'ordre 15, construit dans le cas (1) du théorème précédent, est isomorphe à K . En effet, si nous considérons une nouvelle numérotation

$$\{a_8, a_4, a_7, a_5, a_2, a_6, a_3, a_1, a_{12}, a_{10}, a_{15}, a_{13}, a_9, a_{14}, a_{11}\}$$

des sommets de K et si nous effectuons simultanément les permutations appropriées sur les colonnes et sur les lignes de la matrice M , nous obtenons alors précisément la matrice associée à H_1 qui a été spécifiée dans le cas (1) de (2.5).

Considérons le complémentaire $\bar{K}$ de K et soit $\bar{M}$ la matrice associée à $\bar{K}$. Comme $\bar{M}$ est la matrice transposée de M , nous supposons que les sommets de $\bar{K}$ soient numérotés dans le même ordre que ceux de K ; soit $V(\bar{K}) = \{b_1, b_2, \dots, b_{15}\}$ cette numérotation.

(2.7) REMARQUE. Le tournoi homogène H_2 d'ordre 15, construit dans le cas (2) de (2.5), est isomorphe à $\bar{K}$. En effet, la nouvelle numérotation

$$\{b_{14}, b_{12}, b_3, b_6, b_{10}, b_5, b_7, b_{11}, b_4, b_1, b_{13}, b_{15}, b_9, b_8, b_2\}$$

des sommets de $\bar{K}$ induit précisément la matrice associée à H_2 .

Des Remarques (2.6) et (2.7), il suit immédiatement le théorème suivant:

(2.8) THÉORÈME. Les tournois homogènes H_1 et H_2 d'ordre 15, construits respectivement dans les cas (1) et (2) de (2.5), sont complémentaires.

Nous allons démontrer maintenant que les tournois H_1 et H_2 ne sont pas isomorphes.

(2.9) THÉORÈME. Il existe exactement deux tournois homogènes non isomorphes d'ordre 15.

DÉMONSTRATION. Il suit immédiatement de (2.5), (2.6) et (2.7) que tout tournoi homogène d'ordre 15 est isomorphe à K ou à $\bar{K}$. Il reste à montrer que $\bar{K} \not\cong K$.

Nous spécifions dans le tableau suivant le tournoi régulier d'ordre 7 auquel chacun des sous-tournois $P(a_i)$ de K et $P(b_i)$ de $\bar{K}$ est isomorphe, et cela pour tout $i = 1, 2, \dots, 15$; nous constatons que chaque $P(a_i)$ ou $P(b_i)$ est isomorphe à G_2 ou G_3 (voir Fig. 1).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(a_i)$	G_2	G_3	G_2	G_2	G_3	G_2	G_3	G_3	G_3	G_2	G_3	G_2	G_2	G_3	G_2
$P(b_i)$	G_2	G_3	G_2	G_2	G_3	G_2	G_3	G_3	G_3	G_2	G_3	G_2	G_2	G_3	G_2

Remarquons que

$$V(P(b_4)) = \{b_2, b_5, b_7, b_8, b_9, b_{11}, b_{14}\} = \{b \in V(\bar{K}) : B(b) \simeq G_3\},$$

alors qu'il n'existe aucun sommet $\hat{a}$ de K tel que

$$V(P(\hat{a})) = \{a \in V(K) : P(a) \simeq G_3\} = \{a_2, a_5, a_7, a_8, a_9, a_{11}, a_{14}\}.$$

Il s'ensuit que $\bar{K} \not\cong K$. $\square$

Malgré l'existence d'une infinité de tournois homogènes auto-complémentaires (tout tournoi rotatif étant auto-complémentaire; voir (1.9)), l'homogénéité n'est pas une condition suffisante pour l'auto-complémentarité:

(2.10) COROLLAIRE. *Les deux tournois homogènes d'ordre 15 ne sont pas auto-complémentaires.*

3. Les matrices d'Hadamard d'ordre 16

Une matrice d'Hadamard A d'ordre n est une matrice carrée, de dimension $n \times n$, dont tout coefficient appartient à $\{+1, -1\}$, et qui satisfait l'équation matricielle suivante:

$$A A^t = n I ,$$

où I est la matrice identité, de dimension $n \times n$, et A^t est la matrice transposée de A .

L'ordre d'une matrice d'Hadamard est un nombre qui, s'il est strictement plus grand que 2, est nécessairement divisible par 4.

Une matrice d'Hadamard A est dite *anti-symétrique* si elle satisfait:

$$A + A^t = 2 I .$$

Un lien très étroit entre les tournois homogènes et les matrices d'Hadamard anti-symétriques a été établi à la fois par Szekeres [7] et Reid et Brown [6]:

(3.1) *Il existe un tournoi homogène d'ordre n si et seulement s'il existe une matrice d'Hadamard anti-symétrique d'ordre $n + 1$.*

Dans (3.1), le nombre n est nécessairement positif et congru à -1 modulo 4 ; voir (1.2).

Des Théorèmes (2.9) et (3.1), il découle le résultat suivant (voir Berman [2]):

(3.2) *Il existe exactement deux matrices d'Hadamard anti-symétriques d'ordre 16 et aucune d'elles n'est équivalente à une matrice symétrique.*

4. Existence d'une infinité de paires de tournois homogènes non complémentaires

Dans la section 2, la pluralité des tournois homogènes non isomorphes d'ordre n a été établie pour $n = 15$ (2.9); dans ce cas, les deux tournois trouvés sont complémentaires (2.8). Nous généralisons ici notre résultat en démontrant l'existence d'une infinité de paires de tournois homogènes non isomorphes de même ordre et qui sont, en outre, non complémentaires.

(4.1) REMARQUE. Soit T un tournoi homogène d'ordre $4k - 1$, $k \geq 1$. Alors nous pouvons toujours construire un tournoi homogène H d'ordre $8k - 1$ de telle sorte que l'écoulement $P(v_0)$ d'un certain sommet v_0 de H soit isomorphe à T (la construction détaillée de H est décrite dans [8, chap. 7]; voir aussi [6]).

Ainsi, pour tout nombre premier p congru à -1 modulo 8 (p est donc également congru à -1 modulo 4), s'il existe un tournoi homogène d'ordre $\frac{1}{2}(p-1)$, alors nous pouvons construire deux tournois homogènes d'ordre p en utilisant, d'une part, (1.9) et, d'autre part, (4.1).

(4.2) PROPOSITION. Soit R un tournoi rotatif homogène. Alors l'écoulement $P(u)$ d'un sommet quelconque u de R n'est pas homogène.

DÉMONSTRATION. Ceci découle immédiatement de (1.7) et du fait que, dans un tournoi rotatif, tous les écoulements sont isomorphes entre eux. $\square$

(4.3) THÉORÈME. Pour tout nombre premier $p = 2q + 1$, où q est un nombre premier congru à -1 modulo 4, il existe une paire de tournois homogènes d'ordre p qui ne sont ni isomorphes ni complémentaires.

DÉMONSTRATION. Soient R et T les tournois rotatifs homogènes d'ordre p et q respectivement, obtenus en utilisant (1.9). Considérons le tournoi homogène H d'ordre $p = 2q + 1$ construit à partir de T (voir (4.1)); soit v_0 le sommet de H tel que $P(v_0) \simeq T$. L'écoulement $P(v_0)$ de v_0 dans H est donc homogène, tandis que l'écoulement $P(u)$ d'un sommet quelconque u de R n'est pas homogène, d'après (4.2), il s'ensuit que $H \not\sim R$.

Comme tout tournoi rotatif est auto-complémentaire, $R \simeq \bar{R}$. Or $H \not\perp R$ entraîne $H \not\perp \bar{R}$. Les tournois H et R ne sont donc pas complémentaires. $\square$

(4.4) REMARQUE. Pour tout nombre premier p congru à -1 modulo 8 , le théorème précédent nous assure donc de l'existence d'une paire de tournois homogènes non isomorphes d'ordre p qui ne sont pas complémentaires, à condition que le nombre $q = \frac{1}{2}(p-1)$ soit aussi un nombre premier. Toutefois, pour $p = 31$ et malgré que $q = 15$ n'est pas premier, il existe quand même une telle paire de tournois. En effet, les deux différentes constructions (1.9) et (4.1) nous donnent respectivement un tournoi rotatif homogène R d'ordre 31 et un tournoi homogène H (de même ordre) construit à partir du tournoi homogène K d'ordre 15 (voir la section 2). D'après (4.2), $R \not\perp H$; comme R est auto-complémentaire, les tournois R et H ne sont pas complémentaires.

Conclusion

Notre Théorème (2.9) répond définitivement à la question posée par Erdős à propos de l'existence d'une paire de tournois homogènes non isomorphes et de même ordre. En fait, nous avons construit deux tournois homogènes d'ordre 15 qui ne sont pas isomorphes et, par la même occasion, nous avons démontré que tout tournoi homogène d'ordre 15 est isomorphe à un de ces deux-là; en outre, nous avons vu que ces deux tournois sont complémentaires (2.8). Ce résultat apporte aussi une contribution à la théorie des matrices d'Hadamard, puisqu'il permet, par exemple, d'obtenir des applications à propos des matrices d'Hadamard anti-symétriques d'ordre 16 (3.2). Finalement, nous avons établi l'existence d'une infinité de paires de tournois homogènes non isomorphes possédant un même nombre de sommets sans être complémentaires (4.3).

Bibliographie

- [1] BERGE, C., *Théorie des graphes et ses applications*, 2^{ième} éd., Dunod, Paris, 1963.

- [2] BERMAN, A., *Skew Hadamard matrices of order 16*, Ann. of Discrete Math., 12 (1982), 45-47.
- [3] KOTZIG, A., *Cycles in a complete graph oriented in equilibrium*, Mat. - Fyz. Časopis, 16 (1966), 175-182.
- [4] KOTZIG, A., *Des cycles dans les tournois*, Théorie des graphes (Journées internationales d'étude à Rome en juillet 1966), Dunod, Paris (1967), 203-208.
- [5] KOTZIG, A., *Sur les tournois avec des 3-cycles régulièrement placés*, Mat. Časopis, 19 (1969), 126-134.
- [6] REID, K.B., BROWN, E., *Doubly regular tournaments are equivalent to skew Hadamard matrices*, J. Combin. Theory, 12 (1972), 332-338.
- [7] SZEKERES, G., *Tournaments and Hadamard matrices*, Enseign. Math., 15 (1969), 269-278.
- [8] TABIB, C., *La théorie des tournois réguliers pourvus de symétries supplémentaires*, Thèse de doctorat, Université de Montréal, 1978.

Département de mathématiques
 Collège Edouard-Montpetit
 945, Ch. de Chambly
 Longueuil, Qué.
 J4H 3M6

Manuscrit reçu le 28 mars 1983.
 Révisé le 23 juin 1983.