

MODULE D'UNE FAMILLE DE MESURES ET APPLICATION AUX ENSEMBLES ALÉATOIRES

Dorin Ghisa et Marc Moore¹

1. Introduction et sommaire

Ce travail résulte de la jonction de travaux qui au départ étaient animés par des motivations très différentes. L'auteur sénior s'intéresse à la généralisation, à des classes de mesures, des travaux de Fuglede [3] et Ohtsuka [6] portant sur le module de classes de fonctions. Le deuxième auteur s'intéresse aux ensembles aléatoires et vit dans les travaux du premier la possibilité d'applications à ce domaine. Nous présentons ici le résultat de nos efforts conjoints pour rendre applicable, à l'étude des ensembles aléatoires, la notion de module attaché à une classe de mesures. Plus particulièrement nous avons à l'esprit la définition de certains paramètres définis à partir d'un processus aléatoire générant des ensembles.

A la section 2, nous donnons la définition du module, par rapport à une fonction Φ , associé à une classe de mesures; celui-ci est dénommé Φ -module. Cette définition est illustrée par un exemple simple. La section suivante est consacrée à certains rappels et considérations nouvelles à propos du support d'une famille de mesures. Le Φ -module étant en général difficile à obtenir exactement, nous étudions à la section 4 comment certains majorants peuvent être obtenus. Finalement, à la section 5, nous mentionnons une application possible aux ensembles aléatoires en définissant un indice de similitude entre les éléments d'un ensemble de mosaïques aléatoires générées par un certain processus.

¹ Les travaux de cet auteur furent subventionnés par le C.R.S.N.G., subvention A-8211.

Nous avons voulu respecter le plus possible la terminologie introduite lors des études sur le module de classes de fonctions tout en gardant à l'esprit nos motivations.

2. Définitions et exemple

Considérons une fonction Φ définie sur $[0, \infty]$, prenant ses valeurs dans $[0, \infty]$, non décroissante, continue à gauche et telle que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \Phi(u) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty.$$

Il s'en suit que Φ est Borel-mesurable et que $\Phi(0) = 0$. Considérons aussi un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, m)$ où X est un ensemble quelconque, $\mathcal{F}$ une σ -algèbre de parties de X et m une mesure positive définie sur $(X, \mathcal{F})$. Nous nous intéressons à une famille de mesures, M , telle que chaque $\mu \in M$ est définie sur $(X, \mathcal{G}_\mu)$ où $\mathcal{G}_\mu$ est une σ -algèbre incluant $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 1. Une fonction ρ définie sur X , prenant ses valeurs dans $[0, \infty]$, qui est m -mesurable et telle que

$$\int_X \rho \, d\mu \geq 1$$

pour chaque $\mu \in M$ est dite *admissible par rapport à M* . On dira que ρ est M -admissible et on écrira $\rho : M \text{ - ad}$.

Il est à remarquer que le seul cas où la famille des fonctions M -admissibles est vide est celui où M contient la mesure nulle μ_0 .

DÉFINITION 2. Le Φ -module de la famille M est donné par

$$M_\Phi(M) = \inf_{\rho: M \text{ - ad}} \int_X \Phi(\rho) \, dm.$$

Puisque les fonctions ρ et Φ sont non négatives, que Φ est Borel-mesurable et ρ est m -mesurable les intégrales apparaissant dans la Définition 2 existent.

Si la classe des fonctions M -admissibles est vide nous posons $M_\Phi(M) = \infty$.

Il est assez facile de vérifier que M_Φ est une mesure extérieure sur la classe des familles de mesures, M , telles que chaque $\mu \in M$ est définie sur (X, G_μ) .

DÉFINITION 3. Une fonction ρ qui est M -ad est dite *extrémale* pour la classe M si

$$\int_X \Phi(\rho) \, d\mu = M_\Phi(M) .$$

Fuglede [3] considère cette notion de Φ -module pour $\Phi(x) = x^p$, et se concentre principalement sur le cas où $X = \mathbb{R}^n$. Ohtsuka [6] considère le cas où $X = \mathbb{R}^3$ et Φ est une fonction croissante et continue sur $[0, \infty]$ pour se concentrer très tôt lui aussi sur la fonction $\Phi(x) = x^p$, $p > 0$.

Dans ce qui suit, nous allons obtenir quelques résultats, principalement des majorants, à propos du Φ -module de certaines familles de mesures cela pour des fonctions Φ assez générales. A titre d'illustration, voyons d'abord le cas d'une famille de mesures pour laquelle le Φ -module peut être calculé exactement.

PROPOSITION 1. Soit A un élément non vide de F et M la famille des mesures de Dirac, χ_x , correspondant aux points de A c.-à-d. pour $x \in A$

$$\chi_x(B) = \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B . \end{cases}$$

Alors $M_\Phi(M) = \Phi(1)m(A)$ pour chaque fonction Φ telle que $\Phi(y) > 0$ pour tout $y > 0$.

DÉMONSTRATION. La fonction ρ est M -admissible si et seulement si $\rho(x) \geq 1$ pour chaque $x \in A$. Ainsi

$$M_\Phi(M) = \inf_{\rho: M\text{-ad}} \int_X \Phi(\rho) \, d\mu = \inf_{\{\rho: \rho(x) \geq 1, \forall x \in A\}} \int_X \Phi(\rho) \, d\mu .$$

La condition imposée sur Φ entraîne que cette dernière expression est

$$\int_X \Phi(\chi_A) \, dm = \int_A \Phi(1) \, dm = \Phi(1) \, m(A) .$$

La fonction caractéristique χ_A est donc extrémale pour la classe M considérée. $\square$

REMARQUE 1. La définition donnée pour le Φ -module de M fait intervenir la classe de toutes les fonctions M -admissibles. Dans certaines applications il peut être avantageux de se restreindre, dans la définition de $M_\Phi(M)$, à une certaine classe de fonctions M -admissibles; cela aura bien sûr l'effet d'accroître la valeur de $M_\Phi(M)$ mais souvent sans en altérer certaines propriétés fondamentales (eg. le fait d'être une mesure extérieure). La section 5 présente un exemple où une telle restriction est utile. A titre d'illustration, mentionnons que dans le cas où X est $\mathbb{R}^k$, m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$ et $\Phi(u) = u^p$, $p > 0$, la valeur de M_Φ n'est pas changée si dans sa définition on se restreint à la classe des fonctions M -admissibles et semi-continues inférieurement (voir Ohtsuka [6]).

3. Support d'une famille de mesures

Plusieurs des résultats que nous obtiendrons à propos du Φ -module d'une famille de mesures font intervenir le concept de support d'une famille de mesures. Nous rappellerons ici certains éléments importants au sujet de ce concept; pour plus de détails, le lecteur est référé, par exemple, au traité de Schwartz [9, p. 444].

Dans tout ce qui suit, nous supposons que X est un espace topologique localement compact et dénombrable à l'infini (c.-à-d. X est une réunion dénombrable de compacts), et que m est une mesure régulière sur (X, F) , F étant ici la σ -algèbre générée par les ouverts de X (c.-à-d. m est une mesure de Borel). La régularité entraîne que $m(K) < \infty$ pour chaque compact K dans X .

DÉFINITION 4. Une mesure μ s'annule sur un ouvert G si pour toute fonction μ -intégrable, f , dont le support est dans G ,

$$\int_X f \, d\mu = 0 .$$

Les démonstrations de la proposition suivante et de son corollaire sont essentiellement celles données pour le théorème 13 et son corollaire dans Schwartz [9, p. 444].

PROPOSITION 2. Soit $\{G_i\}_{i \in I}$ une famille d'ensembles ouverts de X et μ une mesure de Borel s'annulant sur chacun des éléments de cette famille. Alors la mesure μ s'annule sur $G = \bigcup_{i \in I} G_i$.

COROLLAIRE. Etant donnée une mesure μ sur (X, F) il existe un ouvert maximal sur lequel μ s'annule.

DÉFINITION 5. i) Etant donnée une mesure μ , soit O_μ l'ouvert maximal sur lequel μ s'annule, $S_\mu = O_\mu^c$ est appelé le support de μ .

ii) Si M est une famille de mesures, le support de M est la réunion des supports de ses éléments.

REMARQUE 2. Dans le cas où X est un espace métrique séparable et que μ est une mesure bornée ($\mu(X) < M < \infty$), la définition qui vient d'être donnée du support de μ est équivalente à celle du spectre d'une mesure, c'est-à-dire l'ensemble C_μ de tous les points x tel que $\mu(U) > 0$ pour chaque ouvert U contenant x [7, p. 27].

Considérons certaines propriétés du support d'une mesure. Il est facile de démontrer la proposition qui suit:

PROPOSITION 3. Soit $A \subset X$ un ensemble quelconque et B un élément de F . Si le support de μ est dans A , alors le support de la contraction de μ à B est dans $A \cap B$.

De la définition du support d'une mesure il découle immédiatement que si une fonction f et une mesure μ ont leur support disjoints, alors

$$\int_X f d\mu = 0.$$

Que peut-on dire si le support de f et celui de μ ne sont pas disjoints? La proposition suivante apporte une réponse partielle.

PROPOSITION 4. Si X est métrisable et f s'annule sur le support de μ alors

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

DÉMONSTRATION. Dans un premier temps, supposons que le support S_μ de μ est compact. Le fait que X soit métrisable entraîne qu'il existe une famille d'ensembles ouverts, $\langle V_n \rangle$, tels que pour chaque n

$$S_\mu \subset V_n, \quad V_{n+1} \subset V_n$$

et

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = S_\mu.$$

D'autre part, le théorème "sandwich" de Baire [1, p. 176] assure l'existence pour chaque V_n d'un ensemble ouvert G'_n et d'un ensemble Ω'_n de type G_δ et compact tels que $S_\mu \subset G'_n \subset \Omega'_n \subset V_n$. En définissant $\Omega_1 = \Omega'_1$, $\Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega'_2$, ..., $\Omega_n = \Omega'_n \cap \Omega_{n-1}$, nous obtenons des ensembles Ω_n qui sont encore de type G_δ et compacts. De plus, pour chaque n , nous avons $S_\mu \subset G_n \subset \Omega_n \subset V_n$ où $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ et G_n est l'ouvert $\bigcap_{i=1}^n G_i$.

Soit $f_n = f \cdot \chi_{\Omega_n^c}$. Le support de la fonction f_n est inclus dans G_n^c et par construction $G_n^c \cap S_\mu = \emptyset$, ainsi les supports de f_n et μ sont disjoints et alors

$$\int_X f_n \, d\mu = 0.$$

Les ensembles Ω_n sont tels que pour chaque $x \notin S_\mu$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

et $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ pour chaque n . Si f est une fonction non négative, le théorème de convergence monotone entraîne que

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = 0 .$$

Si f a une composante négative, le même résultat s'obtient en effectuant la division habituelle $f = f^+ - f^-$ et en faisant le raisonnement qui précède pour chacune des parties non négatives f^+ et f^- .

Passons maintenant au cas où S_μ ne serait pas compact. Puisque par hypothèse X est dénombrable à l'infini, il existe une suite croissante de compacts K_n telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$. Dénotons par μ_n la restriction de μ à K_n . D'après la Proposition 3, le support de μ_n est dans $S_\mu \cap K_n$ et est donc compact. Alors d'après l'étape précédente,

$$\int_X f \, d\mu_n = 0 .$$

La suite des mesures μ_n est croissante, c.-à-d. $\mu_n(A) \geq \mu_{n-1}(A)$ et $\sup_n \mu_n(A) = \mu(A)$ pour chaque $A \in \mathcal{F}$, de là nous obtenons

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f \, d\mu_n = 0 . \quad \square$$

4. Majorants pour le Φ -module

Comme le calcul du Φ -module d'une famille de mesures n'est pas toujours aussi simple que celui effectué à la Proposition 1, nous tenterons d'en trouver une borne supérieure.

Toutefois, avant d'entreprendre ce travail, considérons une situation où le Φ -module vérifie une égalité importante.

PROPOSITION 5. Supposons que X est un espace métrisable et que $\langle M_n \rangle$ est une suite de familles de mesures telle que pour chaque n il existe un ensemble $B_n \in \mathcal{F}$ incluant le support de M_n , ces ensembles étant tels que $m(B_i \cap B_j) = 0$ si $i \neq j$. Alors

$$M_{\Phi} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{\Phi}(M_n) .$$

DEMONSTRATION. Posons $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Dans le cas où $M_{\Phi}(M) = \infty$, l'égalité désirée découle de la sous-additivité dénombrable de M_{Φ} . Supposons donc que $M_{\Phi}(M) < \infty$.

Cette dernière hypothèse entraîne que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\int_X \Phi(\rho) \, d\mu < M_{\Phi}(M) + \varepsilon .$$

Soit $\rho_n = \rho \cdot \chi_{B_n}$. Puisque les fonctions ρ_n et ρ coïncident sur le support de chaque $\mu \in M_n$, de la Proposition 4 il découle que

$$\int_X \rho_n \, d\mu = \int_X \rho \, d\mu \geq 1$$

pour chaque $\mu \in M_n$ et ainsi ρ_n est M_n -admissible. De plus, comme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\rho_n(x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\rho(x)) \chi_{B_n}(x) \\ &= \Phi(\rho(x)) \chi_{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)}(x) \quad \text{pour presque chaque } x(m) , \end{aligned}$$

nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \Phi(\rho_n) \, d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \Phi(\rho) \, d\mu \leq \int_X \Phi(\rho) \, d\mu < M_{\Phi}(M) + \varepsilon$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{\Phi}(M_n) < M_{\Phi}(M) + \varepsilon$$

et puisque ε est arbitraire,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{\Phi}(M_n) \leq M_{\Phi}(M) .$$

La conclusion découle de la sous-additivité dénombrable de M_{Φ} . $\square$

Afin de parvenir à établir une borne supérieure pour le Φ -module, nous démontrerons d'abord deux lemmes.

Dans le reste de cette section, nous supposons que la mesure m a tout l'espace X comme support.

LEMME 1. Etant donné un recouvrement $\{G_i\}_{i \in I}$ de X où chaque G_i est ouvert et relativement compact, il existe une famille de mesures de Borel

$M_I = \{m_i\}_{i \in I}$ telle que:

- a) chaque m_i est non nulle et finie,
- b) m_i a son support dans G_i ,
- c) $\sum_{i \in I} m_i = m$.

DÉMONSTRATION. Puisque X est localement compact et dénombrable à l'infini, il est normal. Ainsi d'après le théorème T.2, XXII, 4;2 de Schwartz [9, p. 355], le recouvrement $\{G_i\}_{i \in I}$ admet une partition de l'unité subordonnée $(\alpha_i)_{i \in I}$. Les fonctions α_i étant continues et non identiquement nulles, la mesure m étant régulière et les ensembles G_i étant relativement compacts, nous avons

$$0 < \int_X \alpha_i \, dm = \int_{G_i} \alpha_i \, dm \leq m(G_i) < \infty .$$

Soit m_i la mesure de Borel définie par

$$m_i(B) = \int_B \alpha_i \, dm , \quad i \in I , \quad B \in \mathcal{F} .$$

Puisque

$$m_i(G_i) = \int_{G_i} \alpha_i \, dm > 0 ,$$

m_i est non nulle; d'autre part α_i ayant son support dans G_i

$$m_i(B) = \int_B \alpha_i \, dm = \int_{B \cap G_i} \alpha_i \, dm \leq \int_{G_i} \alpha_i \, dm < \infty$$

et alors m_i est finie.

Soit G un ouvert tel que $G \cap G_i = \emptyset$. Pour toute fonction mesurable f dont le support est dans G , nous avons $f \cdot \alpha_i \equiv 0$ et alors

$$\int_X f \, dm_i = \int_X f \cdot \alpha_i \, dm = 0$$

ainsi m_i a son support dans G_i .

La famille de fonctions $(\alpha_i)_{i \in I}$ étant localement finie

$$\sum_{i \in I} m_i(B) = \sum_{i \in I} \int_{B \cap G_i} \alpha_i \, dm \quad (1)$$

a un nombre fini de termes non nuls pour chaque $B \in \mathcal{F}$ qui est relativement compact.

Si $B \in \mathcal{F}$ n'est pas relativement compact, il est possible de l'écrire comme une réunion dénombrable de boréliens relativement compacts et ainsi donner un sens à

(1). D'autre part, pour chaque $B \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} m_i(B) &= \sum_{i \in I} \int_{B \cap G_i} \alpha_i \, dm = \sum_{i \in I} \int_B \alpha_i \, dm \\ &= \int_B \sum_{i \in I} \alpha_i \, dm = \int_B dm = m(B) . \quad \square \end{aligned}$$

Pour le reste de cette section, nous imposerons la condition supplémentaire suivante sur la fonction Φ : il existe deux constantes positives α et a telles que

$$\Phi(t) > at \quad \text{pour chaque } t > \alpha .$$

LEMME 2. Quel que soit $h > 0$, il existe un recouvrement $\{G_i\}_{i \in I}$ de X par des ensembles ouverts relativement compacts, tel que si M_I dénote la famille de mesures construite au Lemme 1, alors pour chaque fonction ρ qui est M_I -admissible et s'annule à l'extérieur d'un compact $K \subset X$, on a

$$\int_X \Phi(\rho) \, dm \geq h .$$

DÉMONSTRATION. La construction du recouvrement cherché s'effectue par des raffinements successifs d'un recouvrement initial. Nous considérons d'abord un recouvrement de X , du type désiré, qui est tel que la partie recouvrant K , $\{G_{i_1}\}_{i_1 \in I_1}$, est finie. La deuxième étape consiste à partitionner chaque G_{i_1} . En continuant, nous aurons à la n -ième étape une partition de K de la forme

$$\{G_{i_1, \dots, i_n}\}_{(i_1, \dots, i_n) \in I_n} ,$$

telle que $G_{i_1, \dots, i_k} \subset G_{i_1, \dots, i_{k-1}}$ pour chaque $(i_1, \dots, i_k) \in I_k$, $k = 2, \dots, n$ (à chaque étape, le recouvrement de K est étendu d'une façon arbitraire à un recouvrement approprié de X).

A l'étape n , dénotons par M_{I_n} la famille de mesures construite au Lemme 1. Pour chaque fonction ρ , M_{I_n} -admissible, considérons

$$E_n = E_n(\rho) = \{x \in X : \rho(x) > \alpha\} ,$$

$$F_n = F_n(\rho) = \{x \in X : \rho(x) \leq \alpha\} .$$

Remarquons que $x \in E_n$ entraîne que $\Phi(\rho(x)) > \alpha \rho(x)$. Nous avons

$$\int_X \rho \, dm_i \geq 1$$

pour chaque $i = (i_1, \dots, i_n) \in I_n$ et alors

$$\begin{aligned} \text{card } I_n &\leq \sum_{i \in I_n} \int_X \rho \, dm_i = \int_X \rho \, dm = \int_{E_n} \rho \, dm + \int_{F_n} \rho \, dm \\ &\leq \int_{E_n} \frac{\Phi(\rho)}{\alpha} \, dm + \int_K \alpha \, dm \leq \frac{1}{\alpha} \int_X \Phi(\rho) \, dm + \alpha m(K) . \end{aligned}$$

Pour que l'inégalité de l'énoncé soit vérifiée, il suffit donc de s'arrêter à une étape n telle que $\text{card } I_n \geq \alpha m(K) + h/\alpha$. $\square$

DÉFINITION 6. Une classe de familles de mesures $\{M_I\}_{I \in J}$ est M_Φ -absorbante pour une famille de mesures M si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $I \in J$ tel que

$$M_\Phi(M_I) \leq M_\Phi(M \cup M_I) \leq M_\Phi(M_I) + \varepsilon. \quad (4)$$

La construction d'une classe très simple de familles de courbes M_Φ -absorbante pour chaque famille de courbes à support borné dans R^2 a été donnée par Renggli [8] dans le cas où $\Phi(t) = t^2$.

PROPOSITION 6. Considérons une classe de familles de mesures, $\{M_I\}_{I \in J}$, construites comme dans le Lemme 1 et supposons que pour chaque $h > 0$, $\delta > 0$, et $\ell > 0$, il existe une famille M_I dans cette classe qui soit telle que pour chaque fonction ρ qui est M_I -admissible, on ait

- i) $m(\{x : \rho(x) < \ell\}) \leq \delta$,
- ii) $\int_X \Phi(\rho) \, dm \geq h$ (Lemme 2).

Alors $\{M_I\}_{I \in J}$ est M_Φ -absorbante pour chaque famille de mesures M dont le support est relativement compact et telle que $M_\Phi(M) < \infty$.

DÉMONSTRATION. Le support de M étant relativement compact, il est inclus dans un compact K et alors nous pouvons supposer que toutes les fonctions ρ considérées s'annulent à l'extérieur de K .

Si pour la famille M_I , dont l'existence est supposée dans l'énoncé, $M_\Phi(M_I) = \infty$ la suite d'inégalités en (4) est triviale, supposons donc que $M_\Phi(M_I) < \infty$. Etant donné un $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\rho : M$ -ad telle que

$$\int_X \Phi(\rho) \, dm < M_\Phi(M) + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5)$$

Cette fonction ρ peut s'écrire comme la limite d'une suite croissante de fonctions en escalier $\langle \rho_n \rangle$, $\rho_n \leq \rho$. La suite $\langle \Phi(\rho_n) \rangle$ est alors non décroissante et la continuité à gauche de Φ entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\rho_n) = \Phi(\rho)$$

et alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \Phi(\rho_n) \, dm = \int_X \Phi(\rho) \, dm .$$

Il existe donc un n_0 tel que pour chaque $n \geq n_0$

$$\int_X \Phi(\rho) \, dm - \frac{\varepsilon}{4} < \int_X \Phi(\rho_n) \, dm . \quad (6)$$

Pour un $n \geq n_0$, posons

$$\int_X \Phi(\rho_n) \, dm = h .$$

D'après les hypothèses du théorème, pour le ε choisi plus haut et pour $\delta = \frac{\varepsilon}{4\Phi(n)}$ il existe une fonction $\rho_\varepsilon : M_I$ - ad telle que $m(\{x : \rho_\varepsilon(x) < n\}) = m(X_\delta) \leq \delta$ et

$$\int_X \Phi(\rho_n) \, dm \leq \int_X \Phi(\rho_\varepsilon) \, dm \leq M_\Phi(M_I) + \frac{\varepsilon}{4} . \quad (7)$$

Soient

$$\rho^*(x) = \max\{\rho(x), \rho_\varepsilon(x)\} ,$$

$$\rho_*(x) = \min\{\rho(x), \rho_\varepsilon(x)\} .$$

Il est clair que

$$\rho_*(x) \geq \rho_n(x) \quad \text{pour } x \in X - X_\delta \quad (8)$$

aussi

$$\int_X \rho^* \, d\mu \geq 1$$

pour chaque $\mu \in M \cup M_I$ et alors

$$M_\Phi(M \cup M_I) \leq \int_X \Phi(\rho^*) \, dm .$$

D'autre part, $\Phi(\rho_*) = \Phi(\rho) + \Phi(\rho_\varepsilon) - \Phi(\rho^*)$ ce qui permet d'écrire à partir de (5),

(6), (7) et (8):

$$\begin{aligned}
M_{\Phi}(M) &\leq \int_X \Phi(\rho) \, dm < \int_X \Phi(\rho_n) \, dm + \frac{\varepsilon}{4} \leq \int_{X-X_{\delta}} \Phi(\rho_n) \, dm + \int_{X_{\delta}} \Phi(\rho_n) \, dm + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leq \int_{X-X_{\delta}} \Phi(\rho_*) \, dm + \Phi(n)m(X_{\delta}) + \frac{\varepsilon}{4} \leq \int_X \Phi(\rho_*) \, dm + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \int_X \Phi(\rho) \, dm + \int_X \Phi(\rho_{\varepsilon}) \, dm - \int_X \Phi(\rho_*) \, dm + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq M_{\Phi}(M) + \frac{\varepsilon}{4} + M_{\Phi}(M_I) + \frac{\varepsilon}{4} - M_{\Phi}(M \cup M_I) + \frac{\varepsilon}{2} .
\end{aligned}$$

Le fait que $M(\cdot)$ soit monotone et que $M_{\Phi}(M) < \infty$ entraînent le résultat désiré. $\square$

REMARQUE 3. Si $M_{\Phi}(M) < \infty$, la construction d'une famille M_I telle que $M_{\Phi}(M_I) < \infty$ est possible dans le cas où le support de M est relativement compact et Φ est finie sur $[0, \infty)$. En effet, dans le contexte considéré, on peut se restreindre à l'espace compact K muni de la topologie relative. Ainsi $\{G_i\}_{i \in I}$ sera un recouvrement ouvert de K , alors on peut supposer que $\text{card } I < \infty$ et, se reportant au Lemme 1, on a

$$c = \inf_{i \in I} \int_K \alpha_i \, dm > 0 .$$

La fonction égale à $1/c$ sur K et 0 en dehors est M_I -admissible car pour chaque $i \in I$,

$$\int_K \frac{1}{c} \, dm_i = \frac{1}{c} \int_K \alpha_i \, dm \geq 1 .$$

Il en résulte que

$$M_{\Phi}(M_I) \leq \int_K \Phi(1/c) \, dm = \Phi(1/c)m(K) < \infty .$$

PROPOSITION 7. Soit M une famille de mesures dont le support est relativement compact, telle que $M_{\Phi}(M) < \infty$ et qui est M_{Φ} -mesurable. Si une classe $\{M_I\}_{I \in J}$ est M_{Φ} -absorbante pour M , alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une famille de mesures M_I telle que

$$M_{\Phi}(M) \leq M_{\Phi}(M_I \cap M) + \varepsilon .$$

DÉMONSTRATION. La famille M étant M_{Φ} -mesurable, nous avons pour chaque famille de mesures N

$$M_{\Phi}(N) = M_{\Phi}(N \cap M) + M_{\Phi}(N \sim M) .$$

En prenant successivement $N = M_I$ et $N = M_I \cup M$, M_I étant la famille dont il est question à la Définition 6 (pour le $\varepsilon > 0$ considéré), nous obtenons

$$M_{\Phi}(M_I) = M_{\Phi}(M_I \cap M) + M_{\Phi}(M_I \sim M) ,$$

$$M_{\Phi}(M_I \cup M) = M_{\Phi}(M) + M_{\Phi}(M_I \sim M) .$$

Puisque

$$M_{\Phi}(M_I \sim M) \leq M_{\Phi}(M_I) < \infty \quad (\text{Remarque 3})$$

il en résulte de la Définition 6 que

$$\begin{aligned} M_{\Phi}(M_I) + M_{\Phi}(M) &= M_{\Phi}(M_I \cup M) + M_{\Phi}(M_I \cap M) \\ &\leq M_{\Phi}(M_I) + M_{\Phi}(M_I \cap M) + \varepsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat convoité. $\square$

COROLLAIRE. Dans le contexte de la Proposition 7 on a

$$M_{\Phi}(M) \leq \Phi(1/c)m(K) + \varepsilon .$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat découle de la Remarque 3 et du fait que la fonction

$$\rho(x) = \begin{cases} 1/c & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

est $M \cap M_I$ -admissible. $\square$

5. Degré de similitude dans une classe de mosaïques aléatoires

Dans cette section, nous voulons montrer comment la terminologie introduite plus haut peut servir à définir une notion de similitude entre les éléments d'une classe de mosaïques aléatoires. Précisons d'abord ce que nous entendons par mosaïque aléatoire (la définition qui suit est inspirée de celle de Cowan [2]).

Dénotons par C la classe des polygones convexes bornés et fermés dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ la collection des sous-classes E de C qui sont telles que

$$i) \quad \bigcup_{c \in E} c = \mathbb{R}^2,$$

ii) l'ensemble des points qui se trouvent dans plus d'un $c \in E$ a une mesure de Lebesgue nulle.

Une telle sous-classe E est appelée un recouvrement polygonal de $\mathbb{R}^2$. Pour une classe $E \in \mathcal{D}$ et un $c \in C$, considérons la fonction $I_c(\cdot)$ ayant $\mathcal{D}$ pour domaine et donnée par $I_c(E) = 1$ si $c \in E$ et $I_c(E) = 0$ autrement. Dénotons par $\mathcal{H}$ la plus petite σ -algèbre de sous-ensembles de $\mathcal{D}$ telle que chaque $I_c(\cdot)$ est mesurable. On a donc l'espace mesuré $(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ et sur cet espace une mesure de probabilité peut être définie, ce qui donne un recouvrement aléatoire du plan. Une mosaïque aléatoire est obtenue à partir de la réalisation d'un recouvrement polygonal aléatoire du plan, E . Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble de n états (ou couleurs) distincts (n fixe) et $p_1, \dots, p_n$ une loi de probabilité sur $\{e_1, \dots, e_n\}$. A chaque polygone de E est assigné un élément de $\{e_1, \dots, e_n\}$ cela suivant la loi de probabilité $p_1, \dots, p_n$ et indépendamment d'un polygone à l'autre. Le résultat de l'ensemble des deux processus: partition polygonale de $\mathbb{R}^2$ et processus de "coloriage" donne une mosaïque aléatoire dans le plan. Plusieurs modèles de mosaïques aléatoires ont été décrits dans la littérature, le lecteur peut consulter par exemple, Matern [4] ou Moore [5].

Il serait utile dans certaines applications de pouvoir mesurer, par un indice, le degré de similitude entre les mosaïques aléatoires générées par un processus donné (en quelque sorte un analogue de la variance pour une variable aléatoire).

Nous allons indiquer comment les concepts introduits plus haut peuvent aider à définir une telle mesure.

Relativement à la terminologie de la section 2, l'espace X est ici l'ensemble de toutes les mosaïques dans le plan et F est la plus petite σ -algèbre de sous-ensembles de X pour laquelle toutes les fonctions $I_{c,i}(\cdot)$, $c \in C$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ sont mesurables,

$$I_{c,i}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \in E \text{ et la couleur de } c \text{ est } e_i \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Pour définir la famille des fonctions ρ , nous allons considérer un ensemble mesurable A fixe dans le plan (que l'on peut considérer comme une fenêtre d'observation) et ne nous intéresser qu'aux réalisations des mosaïques aléatoires sur A . Ainsi, par exemple, la Figure 1 peut être considérée comme la réalisation d'une mosaïque aléatoire de deux couleurs sur un disque:

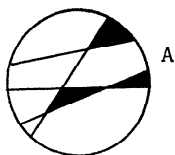


Figure 1

Considérons une mosaïque aléatoire fixe x et définissons la fonction

$$\rho_x(y) = 1 + \text{l'aire de l'ensemble des points de } A \text{ qui sont de la même couleur dans les mosaïques } y \text{ et } x.$$

Nous allons considérer la famille $\{\rho_x(\cdot)\}_{x \in X}$. La famille de mesures M sur (X, F) sera ici une famille de processus donnant des mosaïques aléatoires. Dans l'application considérée, cette famille ne présente pas beaucoup d'importance car les fonctions ρ considérées sont M -admissibles pour cette famille M ; en effet, il est clair que pour chaque $x \in X$ et chaque $\mu \in M$ on a

$$\int_X \rho_x(y) \, d\mu \geq 1.$$

Considérons la fonction $\Phi(x) = x$. Cette fonction satisfait évidemment les conditions imposées à la section 2 et à la section 4. Le module de M , défini en se restreignant à la famille $\{\rho_x(\cdot)\}_{x \in X}$ (cf. Remarque 1), est alors

$$\inf_{x \in X} \int_X \rho_x(y) \, dm. \quad (7)$$

Cette quantité, que nous dénotons $ds_m(X)$, mesure le degré de similitude entre les éléments de X relativement au processus m . En effet,

$$\int_X \rho_x(y) \, dm$$

est l'espérance mathématique, relativement au processus m , de un plus l'aire de ce qui est de même couleur entre une mosaïque fixe x et les autres. Cette quantité peut être considérée comme la concordance moyenne par rapport à une mosaïque fixe x . La concordance moyenne minimale est alors définie comme le degré de similitude dans X .

Comme (7) est en général difficile à obtenir exactement, la possibilité de lui trouver une borne supérieure permettra de mesurer d'une certaine façon la variabilité des éléments de X suivant le processus m . Plus la borne supérieure sur $ds_m(X)$ sera petite, moins les éléments de X sont stables suivant m (c.-à-d. plus la variabilité est grande).

Nous entendons explorer plus à fond, dans un travail ultérieur, cette façon de mesurer la similitude entre les éléments d'une famille d'ensembles aléatoires ainsi que d'autres paramètres du même type.

Remerciements

Les auteurs désirent remercier l'arbitre pour ses commentaires judicieux; ceux-ci permirent de corriger certaines inexactitudes et de rendre plus clairs certains points.

Références

- [1] BERBERIAN, S.K., *Measure and Integration*, Macmillan, 1966.
- [2] COWAN, R., *Properties of ergodic random mosaic processes*, Math. Nachr., 97 (1980), 89-102.
- [3] FUGLEDE, B., *Extremal length and functional completion*, Acta Math., 98 (1957), 171-219.
- [4] MATÉRN, B., *Spatial variation*, Medd. Statens Skogsforskningsinstitut, 49 (1960), 1-144.
- [5] MOORE, M., *On the transition probability function for cell-structure models*, Utilitas Mathematica, Vol. 20 (1981), 35-51.
- [6] OHTSUKA, M., *Extremal Length and Precise Functions in 3-space*, Hiroshima University, 1973.
- [7] PARTHASARATHY, K.R., *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, 1967.
- [8] RENGGLI, H., *Extremallängen und eine konform invariante Massfunktion für Kurvenscharen*, Comm. Math. Helv., 41 (1) (1966-1967), 10-17.
- [9] SCHWARTZ, L., *Cours d'analyse*, Hermann, 1967.

Département de physique-mathématiques
Université de Moncton
Moncton, Nouveau Brunswick
E1A 3E9

Département de mathématiques appliquées
Ecole Polytechnique
C.P. 6079, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3C 3A7

Manuscrit reçu le 20 septembre 1981.
Révisé le 1er décembre 1983.