

SUR LES PUISSANCES CONVOLUTIVES DES FONCTIONS

Claude Gauthier

Peu de propriétés du produit de convolution sont connues. Nous savons par exemple qu'il peut jouer le rôle du produit dans une algèbre où la distribution de Dirac tient lieu d'élément unité ou encore, en tant qu'opération fondamentale, servir dans la méthode des transformations intégrales pour la résolution d'équations intégrales. En ce qui concerne sa nature propre cependant, beaucoup de questions demeurent sans réponse. Nous présentons ici une formule explicite pour l'expression d'une puissance convolutive réelle quelconque de certaines fonctions.

Soit $f(x)$ une fonction entière à valeurs réelles, définie sur $[0, \infty)$ et de type exponentiel, c'est-à-dire qu'il existe a et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que:

$$|f(x)| \leq Ae^{ax},$$

pour tout $0 \leq x < \infty$. Le produit de convolution que nous considérons est celui rencontré dans la théorie de la transformation de Laplace. Ainsi:

$$(f * f)(x) = \int_0^x f(u)f(x-u) du.$$

Si $f(t, x)$, $t \in \mathbb{N}^*$, est la puissance convolutive t -ième de $f(x)$, alors:

$$\begin{aligned} f(1, x) &= f(x), \\ f(2, x) &= (f * f)(x), \\ f(3, x) &= (f * f * f)(x), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant chercher une expression de $f(t,x)$ en supposant $t \in \mathbb{R}$.

Comme la fonction $f(x)$ est par hypothèse entière, nous aurons, pour $0 \leq x < \infty$;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n . \quad (1)$$

La transformation de Laplace appliquée à (1) donne alors, d'après [1], p. 197:

$$\mathcal{L}[f(x)] \equiv F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{s^{n+1}} , \quad (2)$$

lorsque $|s| > r \geq 0$ et $r \leq a$. De plus, $F(s)$ est holomorphe en $s = \infty$ et

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 .$$

Le fait que, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{L}[f(t,x)] = [F(s)]^t$$

nous incite à définir $f(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, par:

$$f(t,x) = \mathcal{L}^{-1}\{[F(s)]^t\} . \quad (3)$$

Dans le but de développer $f(t,x)$ en série de puissances de x , nous utilisons la série du binôme:

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n!} (a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^n , \quad (4)$$

où $t^{(n)} = t(t-1) \dots (t-n+1)$, convergente uniformément pour tout x tel que:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right| < 1 .$$

D'après [2], p. 189, si $a_1 \neq 0$:

$$(a_1x + a_2x^2 + \dots)^n = (a_1x)^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_1^n A_{n,k} \left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_{k+1}}{a_1} \right) x^{n+k}, \quad (5)$$

où

$$A_{n,k}(b_1, b_2, \dots, b_k) = \sum_{P(k)} \frac{n^{(r)}}{r_1! r_2! \dots r_k!} b_1^{r_1} b_2^{r_2} \dots b_k^{r_k},$$

$$P(k) = \{(r_1, r_2, \dots, r_k) \in \mathbb{N}^k : r_1 + 2r_2 + \dots + kr_k = k\}$$

et

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_k.$$

Donc, si nous multiplions (4) par $(a_0x)^t$, $a_0 \in \mathbb{R}^*$, et posons $c_1 = a_0$, $c_j = a_0 a_{j-1}$, $j = 2, 3, \dots$, de (4) et (5) il vient que si $c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} (c_1x + c_2x^2 + \dots)^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n!} c_1^{t-n} c_2^n x^{t+n} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n!} c_1^{t-n} c_2^n A_{n,k} \left(\frac{c_3}{c_2}, \frac{c_4}{c_2}, \dots, \frac{c_{k+2}}{c_2} \right) x^{t+n+k} \end{aligned} \quad (6)$$

uniformément pour tout x tel que:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} x^n \right| < |c_1|.$$

En appliquant (6) à l'expression (2) de $F(s)$, nous obtenons un développement de $[F(s)]^t$ en série de puissances de s^{-1} dont l'originale (voir [1], p. 195) est:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n! \Gamma(t+n)} [f(0)]^{t-n} [f'(0)]^n x^{t+n-1} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n! \Gamma(t+n+k)} [f(0)]^{t-n} [f'(0)]^n A_{n,k} \left(\frac{f^{(2)}(0)}{f'(0)}, \dots, \frac{f^{(k+1)}(0)}{f'(0)} \right) x^{t+n+k-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

lorsque $f(0) \neq 0$ et $f'(0) \neq 0$. La convergence de ce développement est en outre

uniforme pour tout x vérifiant:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{x^n} \right| < |f(0)| .$$

EXEMPLE 1. Si $f(x) = 1 + x$, (7) devient:

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n! \Gamma(t+n)} x^{t+n-1}$$

pour $x > 1$. En particulier,

$$f(\tfrac{1}{2}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n! (2n-1)} x^{n-\frac{1}{2}}$$

si bien que

$$f'(\tfrac{1}{2}, x) = - \frac{e^{-x}}{2x^{3/2} \sqrt{\pi}} .$$

EXEMPLE 2. Si $f(x) = e^x$, alors

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(n)}}{n! \Gamma(t+n)} x^{t+n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{(n)} (n+k-1)^{(k)}}{n! k! \Gamma(t+n+k)} x^{t+n+k-1}$$

pour $x > 2$.

Les puissances convolutives réelles de certaines fonctions ne satisfaisant pas aux conditions reliées à la formule (7) peuvent se déduire directement de (3).

Pour la fonction $f(x) = x$, par exemple, nous avons:

$$\mathcal{L}[f(x)] = s^{-2} ,$$

d'où

$$f(t, x) = \mathcal{L}^{-1}(s^{-2t}) ,$$

et

$$f(t, x) = \frac{x^{2t-1}}{\Gamma(2t)} .$$

Certaines équations fonctionnelles impliquant la convolution fractionnaire peuvent aussi se résoudre à partir de (3). Cherchons par exemple la fonction $f(x)$ telle que $f(t,x) = x^t$.

Comme

$$\mathcal{L}[f(t,x)] = \mathcal{L}[f(x)]^t$$

et

$$\mathcal{L}[x^t] = \frac{\Gamma(t+1)}{s^{t+1}},$$

alors

$$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{[\Gamma(t+1)]^{1/t}}{s^{1+1/t}},$$

de sorte que

$$f(x) = \frac{[\Gamma(t+1)]^{1/t}}{\Gamma(1+1/t)} x^{1/t}.$$

Bibliographie

- [1] DOETSH, G., *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [2] RIORDAN, J., *Combinatorial Identities*, Wiley, New York, 1968.

Département de mathématiques
Collège militaire royal de Saint-Jean
Saint-Jean-sur-Richelieu, Québec
J0J 1R0

Manuscrit reçu le 14 août 1982.
Révisé le 19 janvier 1983.